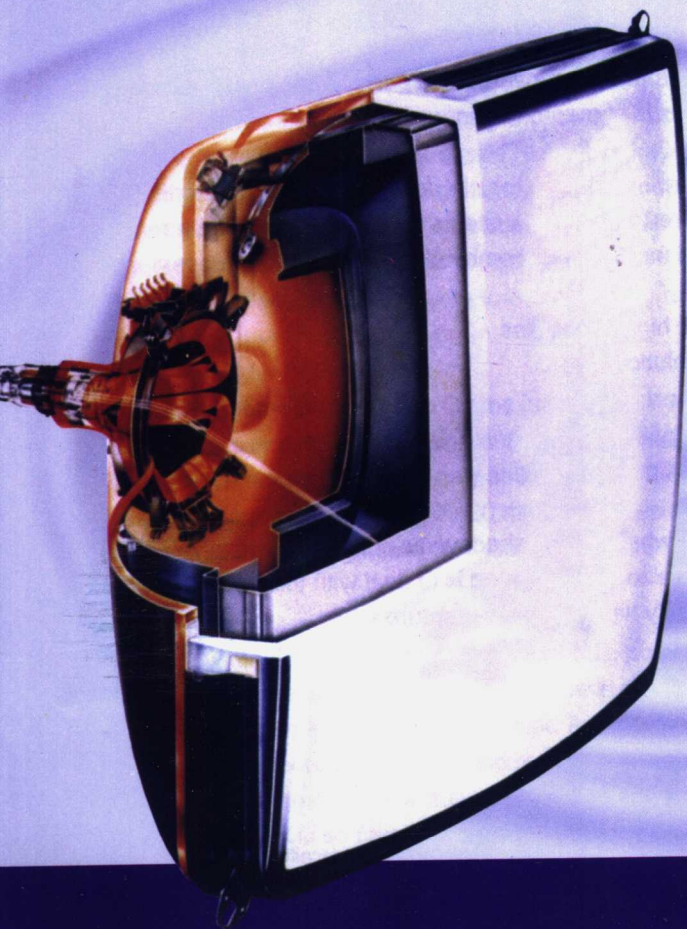


显示技术丛书

XIANSHI JISHU CONGSHU

应用电子光学 新编

○ 尹涵春 张晓兵 王保平/编著



东南大学出版社

显示技术丛书

应用电子光学新编

尹涵春 张晓兵 王保平 编著

东南大学出版社

• 南京 •

内 容 简 介

电子光学是借助光学的概念和规律来研究电子束在电场、磁场中的形成、聚焦、成像和偏转等运动情况的一个学科。本书介绍在电子光学研究中应用到的实际方法:电磁场的计算和求取;电子透镜的实际分析和设计;电子三角学和相空间分析方法在研究中的应用。书中以彩色显示管用的电子枪和电子显微镜为例介绍了静电透镜和磁透镜在实际应用中的构造和作用。最后介绍了电子束在实际应用中的各种作用。可供相关专业作研究生课本或专业工程人员参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用电子光学新编/尹涵春,张晓兵,王保平编著.

南京:东南大学出版社,2004.12

(显示技术丛书)

ISBN 7-81089-406-4

I. 应... II. ①尹...②张...③王... III. 电子光学 IV. 0463

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 089381 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 姜堰市晨光印刷有限公司印刷

开本:700mm×1000mm 1/16 印张:11.75 字数:244 千字

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

定价:18.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行部调换。电话:025-83795801)

前 言

电子光学主要是研究带电粒子在电场或磁场中运动情况的一门学科,分析力学和电动力学是它的基础,光学是它套用的形式——这是因为电子在电场或磁场中的运动与光子在媒体中的传播规律有着相当的类似性。光学由几何光学、波动光学和量子光学三部分组成,电子光学也包括几何电子光学及波动电子光学。几何电子光学主要研究电子束的形成、发射,电子在电场和磁场中的聚焦、成像和偏转等规律;波动电子光学则探讨电子的干涉、衍射和电子全息术等现象。

光学是一门有着悠久历史的学科,人们对它的研究可追溯到 2400 年前。因为光的随处可见性,它的发展主要是出于人们对它的观察、好奇,进而研究、总结并进行理论分析,再走向应用,如望远镜、显微镜等。到了 20 世纪 60 年代,激光科技的发展使古老的光学又成为现代物理学和现代科学技术前沿阵地的重要组成部分。电子光学却要年轻得多,1900 年左右弗莱明(A. Fleming)得到利用电子放大的像。1925 年德布罗依(Lui de Bjoglie)提出了关于物质粒子波动性的假说。1926 年布许(Busch)发表了对螺旋管磁场透镜效应的初步理论分析,指出这种电子透镜对电子射线有玻璃透镜对光线一样的透镜作用——首次证明了电子束可以被不均匀的轴向磁场聚焦。1931~1934 年间戴维逊(Davisson)、卡立克(Callick)、布吕克(Brüche)、约翰逊(Johannson)、努尔(Knoll)、鲁斯卡(Ruska)等人发展了电磁场可以作为“电子透镜”的概念,并从理论和实验证明了磁场和静电场相当于“电子透镜”。1932 年鲁斯卡和努尔制成了第一台电子显微镜,这是完全借鉴光学显微镜的理论和概念而设计的,电子显微镜的诞生宣告了一门新的学科——电子光学,在应用中建立。正是光学的坚实基础和现代发展,给了电子光学的建立和发展以巨大动力,推动它快速发展。而和光学不同的是,电子光学发展的一个明显特点是与其巨大的应用背景牵引密不可分的。1934~1939 年西门子(Siemens)、AEG、RCA、GE 和 MV 等公司先后生产和发展了电子显微镜之后,为了不断开发高性

能电子显微镜,格拉叟(Glaser)和谢赤尔(Scherzer)等人发表了一系列有关电子光学像差理论的文章,奠定了电子光学中像差^{*}的理论基础。1935年马托奇(Mattanch)和赫佐格(Herzorg)制成了双聚焦质谱仪,创立了谱仪电子光学。1939~1945年第二次世界大战期间,由于军事上的需要,电子光学被应用于电子束管,开发和生产了军用雷达指示管、变像管以及速调管和磁控管等。战后的1945~1950年由于高能核物理学的迅速发展,电子光学又被应用于各种新型加速器中聚焦高能电子束,发展了相对论电子光学和束流传输理论。1950~1960年行波管的发展使超高频电子光学得以进一步发展,形成完整的理论体系。1960年以后,由于民用电子产品大量发展,特别是彩色显像管、示波管以及其他电子束管的发展使得介于强流电子光学和窄束电子光学之间的电视中的电子光学得以发展,与变像管、像增强器相联系的宽束电子光学也逐步完善起来。20世纪70年代以来,由于表面科学迅速发展,需要各种高能或低能的带电粒子束来轰击物质表面,同时又需要对物质表面产生的带电粒子进行质量和能谱分析,这就促进了离子光学的发展和谱仪电子光学的进一步发展。80年代,电子光学分析仪器的分辨率和灵敏度不断提高,已能直接观察到原子,在探索微观世界和改造物质世界方面发挥了更大作用。在超大规模集成电路制造中,直径为微米和纳米的电子束加工技术不断发展,研制出了超高速超大容量的电子计算机。高清晰度电视的急速发展要求高清晰度彩色显像管体积更扁、屏面更平、重量更轻、面积更大,对电子光学系统提出了更高的要求。研究物质微结构的需要以及相干电子源的发展,使波动电子光学特别是电子全息学有了很大发展。

随着电子束在各种科学技术领域的应用,电子光学迅速渗透到其他学科和技术领域中,凡是涉及产生、控制、利用电子束的问题都要利用电子光学的成果;同时,生产实践的开拓进展,不断向电子光学提出新的要求,也促进了它的发展;20世纪60年代,高性能高速电子计算机的出现,使得用电子光学系统的CAD成为可能,目前几乎所有高质量电子光学系统的设计都利用这一有力工具,随之而来的最优化技术也被用于电子光学系统的设计中,电子光学系统的正设计、逆设计与优化设计至今仍是一个十分活跃的研究内容;而光学的有关新成就也被引入到电子光学中,如

20 世纪 60 年代光学传递函数被引入到电子光学中,在这方面 K-Jhanszen、F. Lens 以及 W. Hoppe 等人做出了贡献。

综上所述,可以看出,电子光学是在不断发展的科学技术的需求中发展的。而层出不穷的科学技术的进展,又丰富完善了电子光学,推动了它的发展。电子光学的发展史就是应用电子光学的发展史。

近几年来,随着电子束在各种科学技术领域的广泛应用,电子光学已有很大发展,电子光学迅速应用到各种现代技术领域,例如电子光学器件(热电子束器件,如 CRT;冷阴极电子束器件,如 FED)、仪器(如电子显微镜、质谱仪)、装置(如电子束曝光机、电子束加工机)以及超大规模集成电路技术、纳米技术等;同时,电子光学也渗透到其他学科,如无线电电子学、表面科学、材料科学、高能物理学、等离子体物理学等。电子光学是它们在设计、研制、生产和改进中的理论基础。所有这些都说明了几何电子光学向着更广义的应用方向发展;而波动电子光学的应用则在迅速扩大,理论也在不断完善。为此,在本书中更广义的讨论了几何电子光学的内容,增加了波动电子光学在各种应用中的原理、现状和前景的介绍。另一方面,近几年已有各种电子光学的专著问世,涉及内容大同小异。在本书中我们尽量不再重复它们,略去一般的概念和理论的介绍以及太繁复的公式推导;增加了作者长期工作积累中的一些内容,用更多的图片形象地介绍一些抽象的概念,希望起到抛砖引玉的作用;而实际要用到的公式尽量系统地完整地给出,如各种电子轨迹方程、各种差分方程的形式等等,便于读者查阅。

此外,需要说明的是,本书中物理量符号的使用每章统一。

作 者

2004 年 4 月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 电子轨迹的确定	(1)
1.2 几何光学与几何电子光学	(2)
1.2.1 光的直线传播定律	(2)
1.2.2 光的反射定律	(2)
1.2.3 光的折射定律	(2)
1.2.4 光的独立传播定律	(3)
1.3 费马原理与最小作用原理	(5)
1.3.1 费马原理的数学形式——光程的概念	(5)
1.3.2 最小作用原理(哈密顿原理)	(6)
1.4 应用电子光学及其应用	(7)
第 2 章 高斯电子光学	(10)
2.1 电子透镜的基本参量和公式	(10)
2.1.1 透镜的基点	(11)
2.1.2 光像的概念	(13)
2.1.3 几个重要的透镜公式	(13)
2.2 高斯电子光学	(15)
第 3 章 静电场、静磁场和电子轨迹的数值计算	(22)
3.1 场计算的基本理论和公式	(22)
3.2 静电场有限差分法的数值计算	(23)
3.2.1 基本思路	(23)
3.2.2 解题步骤	(25)
3.3 静电场有限元素法的数值计算	(29)
3.3.1 基本思路	(29)
3.3.2 解题步骤	(30)
3.4 静磁场的有限元素法数值计算	(33)
3.4.1 非饱和磁透镜中,不包含激励线圈区域的磁场分布的有限元解法——磁标量位的计算	(34)
3.4.2 非饱和磁透镜中,包含激励线圈区域的磁场分布的有限元解法——线性 $H-B$ 关系,磁矢量位的计算	(36)

3.4.3 饱和磁透镜中磁场分布的有限元解法——非线性 $H-B$ 曲线, 矢量磁位的计算	(38)
3.5 电子轨迹的数值计算	(44)
3.5.1 在静电场中求解运动方程	(46)
3.5.2 在静磁场中求解傍轴轨迹方程	(49)
第4章 静电透镜 磁透镜 四极透镜	(51)
4.1 静电透镜	(52)
4.1.1 旋转对称静电透镜的基本性质	(52)
4.1.2 单膜片透镜	(56)
4.1.3 双电位透镜(浸没透镜)	(59)
4.1.4 单透镜	(64)
4.1.5 浸没物镜(阴极透镜)	(67)
4.2 磁透镜	(68)
4.2.1 磁透镜的基本性质	(68)
4.2.2 钟形磁场分布的磁透镜	(70)
4.3 四极透镜	(71)
第5章 电子三角学	(76)
5.1 基本原理	(77)
5.1.1 等电场空间与等电位空间的变换	(77)
5.1.2 抛物线空间	(78)
5.2 多段电子三角学方程	(83)
5.3 磁系统和复合系统的电子三角学	(85)
第6章 电子光学系统中的相空间分析法	(87)
6.1 相空间分析的基本原理	(87)
6.1.1 相空间、相点、相轨迹和能量曲面	(87)
6.1.2 刘维原理	(88)
6.1.3 发射度和接收度	(90)
6.1.4 传输矩阵	(91)
6.2 相空间图与传输矩阵在电子光学系统分析中的应用	(93)
第7章 彩色显示管用电子枪	(98)
7.1 电子枪概述	(98)
7.2 阴极透镜	(100)
7.2.1 阴极透镜的焦距	(101)
7.2.2 阴极的电子发射	(101)
7.2.3 交叉截面	(103)

7.2.4 阴极透镜的电特性	(104)
7.2.5 阴极透镜的预像散	(110)
7.3 预透镜	(111)
7.4 主透镜	(114)
7.4.1 三束静会聚	(115)
7.4.2 DAF(动态聚焦)四级系统	(116)
第8章 电子显微镜	(120)
8.1 发展简史	(120)
8.1.1 光学显微镜的分辨率极限	(120)
8.1.2 电子波长	(121)
8.2 电子显微镜的基本介绍	(123)
8.2.1 电子源	(123)
8.2.2 电子透镜——磁透镜	(124)
8.2.3 机械系统和真空系统	(126)
8.3 透射电子显微镜	(127)
8.3.1 透射电子显微镜的透镜结构	(128)
8.3.2 透射电子显微镜的样品以及显微镜的应用	(131)
8.4 扫描电子显微镜	(133)
8.4.1 扫描电镜中电子与材料的相互作用	(133)
8.4.2 扫描电子显微镜的结构与成像原理	(136)
第9章 电子束的应用	(139)
9.1 电子束焊	(139)
9.1.1 电子束焊的工作原理和分类	(139)
9.1.2 电子束焊的特点和优缺点	(140)
9.1.3 电子束焊的应用与前景	(142)
9.2 电子束辐射	(144)
9.2.1 电子束辐射在矿物加工领域的应用	(144)
9.2.2 电子束辐射在环境保护领域的应用	(148)
9.2.3 电子束辐射在食品保鲜领域的应用	(151)
9.2.4 电子束辐射在其他领域的应用	(151)
9.3 电子束精炼	(152)
9.3.1 电子束精炼的工作原理和分类	(152)
9.3.2 电子束精炼的特点	(153)
9.3.3 电子束精炼熔炉的构成	(154)
9.3.4 电子束精炼的主要应用及国内外相关报道	(156)
9.4 电子碰撞离子源	(157)

9.4.1 电子碰撞离子电离的原理	(157)
9.4.2 电子碰撞离子源的结构	(158)
9.4.3 国内外相关报道	(158)
9.5 电子束印刷技术	(159)
9.5.1 电子束印刷技术的主要特点和分类	(159)
9.5.2 电子束印刷的过程	(161)
9.5.3 电子束印刷过程中可能出现的问题	(162)
9.5.4 电子束印刷技术的主要应用及国内外相关报道	(162)
附录	(165)
参考文献	(173)

第1章 绪 论

由于光子具有“波粒二象性”，派生了几何光学与波动光学。当光遇到的物体尺寸比光波长大得多时，光不表现其波动性，可用几何光学理论来处理它；当物体尺寸与光波长可比时，光的波动性呈现出衍射、干涉等现象，就要用波动光学理论来处理它了。而量子理论则把光的波粒二象性辩证地统一了起来。

德布罗依告诉我们，电子同样存在“波粒二象性”，这两种粒子本质上的相似，产生了电子光学这门学科。几何电子光学中的电子被处理成粒子，它有质量，所带的电荷使它在电场和磁场中受到库仑力和洛伦兹力的作用。于是，通过分析力学中的质点运动学就可以惟一地决定电子的运动情况了，这就是几何电子光学研究的范畴，这时电子束的运动与几何光束的传播有着极大的相似性。而当电子显现出波动性时，它与光波的性能更是一致，这时薛定谔(Schrödinger)方程就是它的波动方程。它产生的干涉、衍射现象，一方面限制了电子束在器件中的分辨率，另一方面又开拓了如在谱仪、全息等用于材料分析、表面科学等方面的新领域。

1.1 电子轨迹的确定

电子光学是通过设计一定分布的电磁场，使经过其中的电子的行为如同通过透镜或干涉仪等器件的光子行为，达到用电子束代替光束的目的。众所周知，电磁场一定要满足麦克斯韦(Maxwell)方程(见附录1)，这就为这种设计带来一定难度。这里首先需要介绍电子在电磁场中是如何运动的，即确定经过电磁场时的电子轨迹。在电磁场内，电子受洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

式中， e 是电子电量， $\mathbf{v}$ 是电子速度， $\mathbf{E}$ 是电场强度， $\mathbf{B}$ 是磁通量密度。非相对论下电子遵循质点运动学规律而运动。由牛顿运动方程

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.2)$$

将上式写成在各种坐标系中各坐标分量上的相应形式的运动方程，用常微分方程的数值计算方法求解，即可得到电子经过电磁场的轨迹，这种方法称为从运动方程求电子轨迹。这时自变量是时间 t ，步长是 Δt 。

通过并不复杂的数学推导，用斜率 $x' = \frac{\dot{x}}{z} = \frac{dx}{dz}$ ， $y' = \frac{\dot{y}}{z} = \frac{dy}{dz}$ 消去时间变量 t ，可以得到电子在各种坐标系下的普遍轨迹方程，加入傍轴条件可得到傍轴轨迹方程。

同样,用常微分方程的数值计算方法求解,即可得到电子经过电磁场的轨迹,这种方法称为从轨迹方程求电子轨迹。这时自变量是轴向距离 z ,步长是 Δz 。

具体计算公式见附录 2。

1.2 几何光学与几何电子光学

在几何光学中可以用一条几何线来表示光的传播方向,并称这条线为光线。借助于光线的这个概念,几何光学基本原理的要点可以表述如下。

1.2.1 光的直线传播定律

在均匀媒质中,光沿直线传播,即在均匀媒质中,光线为一直线。

1.2.2 光的反射定律

当光线由一媒质进入另一媒质时,光线在两个媒质的分界面上可以发生反射。反射光线遵循反射定律:入射光线、分界面上入射点的法线和反射光线三者都在同一平面内,反射光线与法线组成的夹角 α_2 (反射角)等于入射光线与法线组成的夹角 α_1 (入射角),如图 1.1 所示。

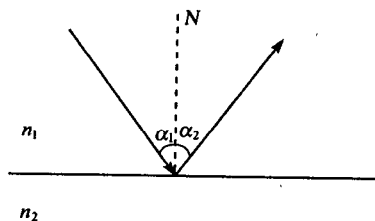


图 1.1 光的反射定律

1.2.3 光的折射定律

当光线由一媒质进入另一媒质时,光线在两个媒质的分界面上还可以发生折射,即入射光被分为反射光线和折射光线。折射光线遵循折射定律:入射光线、分界面上入射点的法线和折射光线三者都在同一平面内,并且入射角 α_1 的正弦与折射角 α_2 (折射光线和法线间的夹角)的正弦之比,反比于两种媒质光学折射率之比。亦可表示为下式:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (1.3)$$

式中, n_1 、 n_2 分别为入射空间媒质和折射空间媒质的光学折射率,如图 1.2 所示。

当光线从光密媒质射向光疏媒质时($n_1 > n_2$),会发生全反射现象。根据折射定律,这时折射角大于入射角,如果增大入射角,使折射角大于 90° ,折射光线不再存在,这时就发生全反射现象,光线无法进入光密媒质。折射角等于 90° 时的入射角称为临界角。

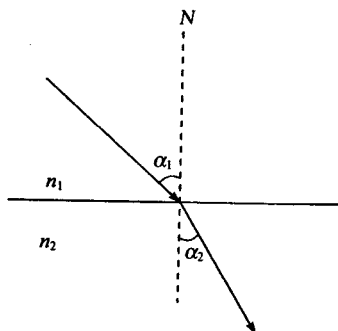


图 1.2 光的折射定律

1.2.4 光的独立传播定律

发自不同方向或由不同物体发出的光线若相交,对每一光线的独立传播不发生影响;此外,还有光路可逆定理、透镜成像定理、牛顿公式等等。

现在考虑一个简单例子:空间有3个区域,区域I为电位为 U_1 的等位空间,区域II为 U_2 的等位空间,设 $U_1 > U_2$,它们之间由两个平行栅网相隔的相当于平行板电容器的空间为区域III。电子从区域I向下斜入射(见图

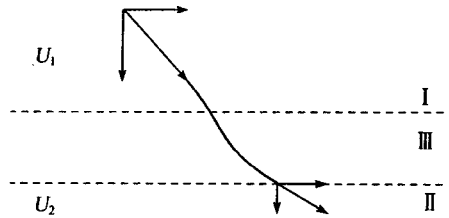


图 1.3 电子轨迹折射说明($U_1 > U_2$)

1.3), 电子有初始速度 $v_1 = \sqrt{\frac{-2eU_1}{m_0}}$, m_0 为电

子静止质量。该速度可分解成水平分量 v_x 和垂直分量 v_y 。在区域I、II, 电子不受力, 作直线运动; 在区域III中电子水平方向不受力, v_x 不变, 垂直方向受向上的力, 即作减速运动。如果 U_2 足够低, 使 v_y 降至0, 电子在洛伦兹力作用下改变运动方向, 作向上的加速运动, 最后回到区域I, 这时的 v_y 与初始值相等, 方向相反。如果 U_2

不够大, 电子通过区域III, 进入区域II, 电子有最终速度 $v_2 = \sqrt{\frac{-2eU_2}{m_0}}$ 。如果上下栅网靠到足够近, 电子水平移动足够小, 于是就有类似于光线传播定律的运动规律:

(1) 在等位区中, 电子作直线运动, 与光线在均匀媒质中的直线传播定律类似。

(2) 电子从等位区 U_1 射向等位区 U_2 (设 $U_1 > U_2$), 假设入射电子速度方向与界面的法线之夹角, 即电子的入射角 α_1 满足

$$\cos \alpha_1^2 \leq \frac{U_1 - U_2}{U_1} \quad (1.4)$$

则电子反射回等位区 U_1 , 并服从与光学相当的反射定律——反射角 α_2 等于入射角 α_1 。

(3) 电子从等位区 U_1 射向等位区 U_2 , U_2 不够小或 $U_1 < U_2$, 电子进入等位区 U_2 。因为电子的水平分量不变, 则有

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2$$

通过上述公式, 把 v_1, v_2 用 U_1, U_2 代替, 得到

$$\sqrt{U_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{U_2} \sin \alpha_2 \quad (1.5)$$

这就是电子光学中的折射定律。从上式可以直观地看到电子光学中的 $\sqrt{U}$ 相当于光学中的折射率 n , 所以式(1.5)亦可写成式(1.3)的形式。

由式(1.3), 若入射角 $\alpha_0 = \arccos \sqrt{\frac{U_1 - U_2}{U_1}}$, 电子刚发生反射, 所有 $\alpha_1 > \alpha_0$ 的电子都反射, α_0 即为临界角。

在实际电场中, 并不存在这样的界面。但可以用一系列的等位面将整个场区分成若干个等位区, 在每一个等位区中电子作直线运动, 在等位面上用式(1.5), 就可以

从电子进入电场的位置和速度逐步求出在整个电场中的运动轨迹。

(4) 当电子束流密度不高时,例如导流系数 $I/U^{3/2} < 10^{-9}$ 时,因为可以不考虑空间电荷效应,电子的传播可以认为是相互独立的。实际上由于库仑力的存在,两个电子束相交传输时电子间会发生碰撞或散射,这点与光束的传播规律有着深刻的区别。

如上所述,电子在电磁场中的运动,尽管运动规律在表面形式上与光线传播规律有类似性,但究其本质,它们之间还是有着差别的。在某些方面,这种差别还是实质性的,如:

(1) 在几何光学中,用于光学仪器的透镜媒质的折射率一般都差别不大,所以它们的相对折射率都不大,常用的材料,折射率最大不超过 2.5。而在电子光学中,透镜场的电位决定了它的折射率。如在静电场构成的透镜中,不论是改变电极上的电位还是改变电极的形状,都可以改变折射率,并能使折射率比几何光学中的大几千倍,这是电子光学与几何光学的一个重要的差别。因此,在折射率有巨大变化的电子光学系统中,不能搬用几何光学的一些计算方法。

(2) 几何光学中,在均匀媒质中有单一的折射率,而在不同媒质的界面上发生折射率的突变。通过适当地选择媒质的材料及其表面的形状,就可以改变折射率的空间分布,所以在光学透镜中可以很好地消除一些像差。但在电子光学系统中,这种随意性不复存在。如在静电透镜中,电位要满足拉普拉斯(Laplace)方程,所以对一种边界条件,就惟一地决定了空间电位,即惟一地决定了空间折射率,这种折射率在空间是连续变化的,人们无法造成一个折射率突变的表面。因为这些,电子透镜的光学性能比光学透镜的要差得多。

(3) 在静电电子光学中,折射率与射线的传播方向无关,所以它是各向同性的。但在磁场中,复合场的折射率与电子运动方向有关,这时电子轨迹在磁场中就不可逆了,它就不是各向同性的。具体讨论见有关章节。

(4) 电子的能量可以连续变化且任意改变,但在几何光学中则不可能,这一点是很重要的。对于光和电子来说,它们都服从亥姆霍茨—拉格朗日定律。这个定律很重要,它在光度学计算方面起着特别重要的作用,因为它实际上是一种能量守恒定律。必须指出,亥姆霍茨—拉格朗日定律对任何光学系统普遍适用,不管光学组成部分的数量多少,反射式还是折射式的以及光学系统的任何组合都不可能破坏这个定律的正确性。它同样适用于电子光学以及光纤。对于通量密度为 j_0 的源在空间另一点形成通量密度为 j_1 的像都受亥姆霍茨—拉格朗日定律限制,这个定律可写为

$$n_0^2 j_1 \sin^2 \alpha_0 \leq n_1^2 j_0 \sin^2 \alpha_1 \quad (1.6)$$

n_0 和 n_1 分别是在光源和光像处的折射率, α_0 和 α_1 分别为在这两处的发散角,如果光源处光线向半个空间发射, $\alpha_0 \approx \frac{\pi}{2}$ 。对于光线来说 $n_0 = n_1 = 1$, 在像点处的通量密度 j_1 为

$$j_1 \leq j_0 \sin^2 \alpha_1 \quad (1.7)$$

由于功率密度 P 正比于 j_0 , 则

$$P_1 \leq P_0 \sin^2 \alpha_1$$

可以看到, 在像点处的光功率密度决不会大于光源处的功率密度。

但对电子束而言, $n_0^2 = U_0$ (U_0 为源处的电位, 即阴极电位), $n_1^2 = U_1$ (U_1 为像处即阳极电位)。因为像点处的 U_1 可以高达几万伏特, 而对于氧化物阴极, $\frac{kT}{e} = 0.1 \text{ V}$, 它的电位低到 0.1 V 。根据亥姆霍茨—拉格朗日定律计算, 同样假设阴极电子向半个空间发射, $\alpha_0 \approx \frac{\pi}{2}$, 即使考虑热初速效应

$$j_1 = j_0 \left(\frac{U_1}{U_0} + 1 \right) \sin^2 \alpha_1 \approx j_0 \frac{U_1}{U_0} \sin^2 \alpha_1 \quad (1.8)$$

只要 α_1 不是非常非常小, j_1 就可以远大于 j_0 , $P_1 = j_1 U_1$ 就可以远大于 $P_0 = j_0 U_0$ 。电子束的这种功率密度可以放大的性能使它在多种电子束加工领域, 如电子束焊接、电子束切削等方面得到应用。

1.3 费马原理与最小作用原理

1.3.1 费马原理的数学形式——光程的概念

光在各向均匀媒质中的传播规律, 可由前述几何光学的几个基本原理完全确定。但在实际问题中研究光在不均匀媒质中的传播问题, 更具有普遍的意义。这时光线在媒质中的传播服从费马原理: 在两点之间的光线总是沿着所需时间最短的路线传播, 它的变分形式为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = 0 \quad (1.9)$$

为确定传播时间, 我们考虑不均匀媒质 $1, 2, \dots, N$, 设光在每一媒质中的传播速度分别为 $v_1, v_2, \dots, v_N$, 走过路程的几何长度分别为 $s_1, s_2, \dots, s_N$ 。于是光从媒质 1 中的 A 传播到媒质 N 中的 B, 所需时间为

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_N}{v_N} = \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{v_i} \quad (1.10)$$

光学媒质的折射率为 $n_i = \frac{c}{v_i}$, c 是光在真空中的速度, 于是式 (1.10) 可写成

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N n_i s_i \quad (1.11)$$

如果这一系列不均匀媒质是连续分布的, 上式可写成

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (1.12)$$

因为 c 是常数, 它的变分形式 (1.9) 式即为

$$\delta t = \delta \int_A^B n ds = 0 \quad (1.13)$$

人们感兴趣的不是时间,而是光从 A 点经过一系列不均匀媒质到达 B 点所传播的路径。定义式(1.11)中 $\sum_{i=1}^N n_i s_i = tc = S$ 为光在这一系列不均匀媒质中的总光程,记作 S,它在数值上相当于光在同样时间内在真空中所能走的路程。对连续不均匀媒质,总光程为

$$S = \int_A^B n ds \quad (1.14)$$

比较式(1.13)和式(1.14),费马原理亦可表述为在两点之间的光线总是沿最短的路程传播的。费马原理规定了光线传播的路径,它是几何光学最基本的原理,光线的传播规律都可从它得到。

1.3.2 最小作用原理(哈密顿原理)

在电子光学中,有与费马原理相当的哈密顿原理,亦称最小作用量原理。

哈密顿原理及拉格朗日函数的详细讨论在所有分析力学书中都可找到,我们在《应用电子光学》(1991年版)一书中已介绍过。这里先考虑一个电子在纯电场中运动时的拉格朗日函数,再简单引入由 m 个电子组成的系统中的情况。

电子在电场中具有位能 $W=eU$ 和动能 $T=\frac{1}{2}mv^2$,在直角坐标下 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ 。

定义拉格朗日函数 L :

$$L=T-W \quad (1.15)$$

或写作

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mv^2 - eU \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eU \end{aligned} \quad (1.16)$$

考虑更普遍的形式,引入广义坐标 q_1, q_2, q_3 ,它们可以是任意一个坐标系。 q 对时间的导数称为广义速度,记作 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ 。如果讨论的是由 k 个电子组成的一个体系,它的广义坐标、广义速度即为 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 及 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, n=3k$ 。记拉格朗日函数从时间 t_0 到 t_1 的积分 I 称为哈密顿作用量,亦称最小作用量:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (1.17)$$

哈密顿原理则叙述为在 t_0 和 t_1 时刻具有相同端点的邻近路径中真实路径使积分 I 具有极值。而 I 取极值,即它的变分为 0。

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (1.18)$$

根据变分原理,式(1.18)等价为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.19)$$

单个电子的情况:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eU \right\} dt = 0 \quad (1.20)$$

由式(1.16),有

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e \frac{\partial U}{\partial x} = eE_x = F_x \quad (1.21-a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad (1.21-b)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} \quad (1.21-c)$$

式中, E_x 、 F_x 分别为电场强度和电场力在 x 方向的分量, $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$ 则分别是 x 方向的速度和加速度。由式(1.21),可得

$$m \ddot{x} = F_x \quad (1.22)$$

这就是牛顿运动方程。

从式(1.21-b)可知, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ 具有动量的量纲,可以定义广义动量 P_i 为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.23)$$

由式(1.18)所描述电子运动遵循的哈密顿原理是与描述光子传播遵循的费米原理相一致的。它们同是最小作用原理,只是相对物理量不同。

同样,人们感兴趣的是电子经过的路径,经过推导,从式(1.18)、(1.19)和(1.23),可以得到与式(1.24)相对应的最小作用量原理:

$$\delta \int_A^B P ds = 0 \quad (1.24)$$

式(1.24)中被积函数是光学媒质折射率 n ,可以推想式(1.24)中 P 为对应的电子光学折射率。借助相对论修正电位,可以得到:

$$n = P = \sqrt{U_r} + \sqrt{\frac{-e}{2m_0}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_0 \quad (1.25)$$

式中 U_r 是相对论修正电位,当电子速度远小于光速时即为实际电位; $\mathbf{A}$ 是矢量磁位; $\mathbf{s}_0$ 是运动方向上的单位矢量。在纯电场的情况下:

$$n = \sqrt{U} \quad (1.26)$$

这与 1.2 节中讨论折射定律时的推断一致。

1.4 应用电子光学及其应用

若要应用具有给定能量的电子束,需在发射系统和靶之间有一系列光学元件。