注册工程师考试系列图书

100天突破

一级注册结构工程师（房屋结构）执业资格考试基础考试复习指南

孙跃东　主编

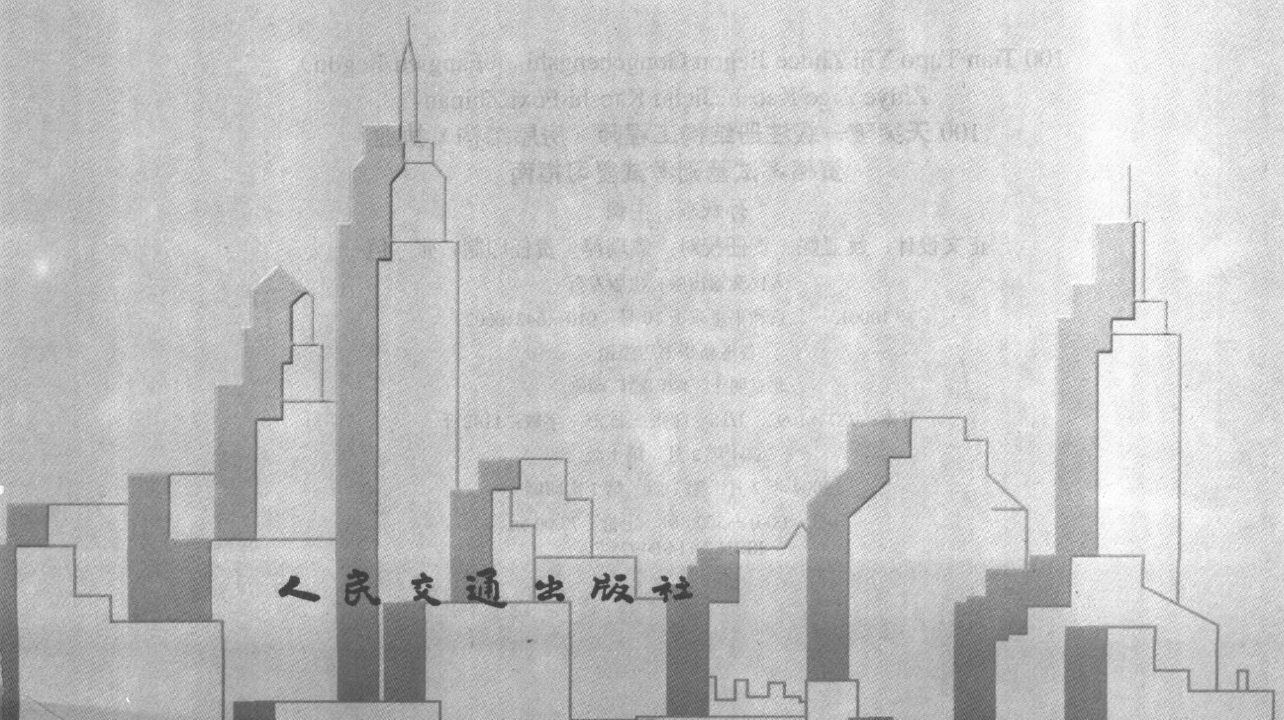
人民交通出版社
China Communications Press

注册工程师考试系列图书

100天突破

一级注册结构工程师（房屋结构）执业资格考试基础考试复习指南

孙跃东　主编



人民交通出版社

内 容 提 要

为帮助考生在短期内做好一级注册结构工程师(房屋结构)执业资格考试基础考试的复习备考工作,特组织有多年培训经验的专家,按考试大纲要求,考虑考生复习备考的特点,按照简明、实用,突出重点和难点,注重考前训练的原则,编写本指南。本书各章包括考试大纲、重点难点分析与例题解析、复习题与讲评等几部分,最后附两套模拟题。本书以大量习题及讲评和例题解析为重点,希望能高效率地帮助考生复习备考、解决疑难。

本书适合参加一级注册结构工程师(房屋结构)执业资格考试基础考试的考生使用。

图书在版编目(CIP)数据

100天突破一级注册结构工程师(房屋结构)执业资格考试基础考试复习指南 / 孙跃东主编. 一北京:人民交通出版社,2004.3
ISBN 7-114-04975-7

Ⅰ.1… Ⅱ.孙… Ⅲ.建筑结构-工程师-资格考核-自学参考资料 Ⅳ.TU3

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第011883号

100 Tian Tupo Yiji Zhuce Jiegou Gongchengshi (Fangwu Jiegou)
Zhiye Zige Kaoshi Jichu Kaoshi Fuxi Zhinan
100天突破一级注册结构工程师(房屋结构)执业
资格考试基础考试复习指南
孙跃东 主编
正文设计:姚亚妮 责任校对:戴瑞萍 责任印制:张 恺
人民交通出版社出版发行
(100013 北京和平里东街10号 010-64216602)
各地新华书店经销
北京明十三陵印刷厂印刷
开本:787×1092 1/16 印张:45.25 字数:1142千
2004年2月 第1版
2004年2月 第1版 第1次印刷
印数:0001-5000册 定价:72.00元
ISBN 7-114-04975-7

100天突破一级注册结构工程师(房屋结构)执业资格考试基础考试复习指南

编 委 会

主　任:吕爱钟

副主任:赵锦桥　孙跃东

主　编:孙跃东

副主编:王　来　肖建庄

编　委(以拼音为序):

陈新华　丁志军　董焕河　董效斌　付厚利

高　明　韩晓冬　黄　靖　刘福臣　孙跃东

王　来　王成明　王崇革　王洪强　王守海

王育平　肖建庄　许乔莉　张利民　张　鹏

前　　言

为了有效帮助参加一级注册结构工程师(房屋结构)执业资格考试基础课考试的人员备考,我们在多年组织注册结构工程师考前培训的基础上,组织参加过培训教学的几位专家和教授,按照考试大纲要求,深入考虑参考人员的复习备考特点,按照简明、实用,突出重点和难点,注重考前训练的原则,编写此书。本书每一章都包含四部分内容:考试大纲、重点难点分析与例题解析、复习题、复习题答案与讲评。重点和难点分析是为了帮助考生更好地把握考试内容,复习题和讲评则给出解题方法、解题技巧和解题中应注意的问题。同时附有两套模拟题和考试分科题量、时间、分数分配表。

本书由孙跃东主编,编写人员的具体分工如下:第一章董焕河;第二章王守海;第三章王成明;第四章王崇革;第五章王育平、高明;第六章付厚利;第七章丁志军;第八章陈新华;第九章王洪强、张英婕;第十章肖建庄;第十一章韩晓冬;第十二章董效斌、孙跃东; 第十三章黄靖、张鹏;第十四章孙跃东;第十五章王来;第十六章孙跃东、王来;第十七章刘福臣;第十八章张利民;第十九章许乔莉。

由于时间仓促和编者水平所限,在编写过程中难免有疏漏之处,敬请读者批评指正。(读者如有指正请发信至 czmxc@263.net)

编　者

2004.3

目　　录

第一章 高 等 数 学

第一部分 考 试 大 纲

一、空间解析几何

向量代数,直线,平面,柱面,旋转曲面,二次曲面,空间曲线。

二、微分学

极限,连续,导数,微分,偏导数,全微分,导数与微分的应用。

三、积分学

不定积分,定积分,广义积分,二重积分,三重积分,平面曲线积分,积分应用。

四、无穷级数

数项级数,幂级数,泰勒级数,傅立叶级数。

五、常微分方程

可分离变量方程,一阶线性方程,可降阶方程,常系数线性方程。

六、概率与数理统计

随机事件与概率,古典概型,一维随机变量的分布和数字特征,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验,方差分析,一元回归分析。

七、向量分析

八、线性代数

行列式,矩阵,n 维向量,线性方程组,矩阵的特征值与特征向量,二次型。

第二部分 重点、难点分析与例题解析

一、空间解析几何

(一)向量代数

1.空间直角坐标系与向量

向量是本章重点,它是学习平面和空间直线知识的基本工具。要掌握空间两点之间的距离公式,两点连线的向量表示,向量的模和方向余弦,向量的坐标式和分解式以及它们的运算。

2.数量积

两个向量的数量积是一个数。利用数量积可求两向量的夹角。

3.向量积

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$;$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$;$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系。

【例 1-1】 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴的夹角分别为 $\alpha=60°,\beta=120°$，求该向量与 z 轴的夹角 γ。

解：由方向余弦 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得

$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\gamma=45°,135°$。

【例 1-2】 已知空间三点 $A(1,1,0)$，$B(-2,1,3)$，$C(2,-1,2)$，求 $\triangle ABC$ 的面积。

解：由向量的定义得到启发，作向量 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AC}$，则

$\boldsymbol{AB}=\{-2-1,1-1,3-0\}=\{-3,0,3\}$，$\boldsymbol{AC}=\{2-1,-1-1,2-0\}=\{1,-2,2\}$

以 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AC}$ 为邻边的平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|$

而 $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&0&3\\1&-2&2\end{vmatrix}=\{6,9,6\}$，$|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\sqrt{6^2+9^2+6^2}=3\sqrt{17}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}\sqrt{17}$。

(二)平面与直线

1.平面

熟练掌握平面的点法式方程，掌握平面的一般方程，会求平面方程、点到平面的距离。求平面方程的关键是找出法方向 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$（掌握平面的点法式方程和平面的一般方程）。

2.空间直线

掌握空间直线的标准方程、参数方程和一般方程，会进行方程间互化并会求直线方程。会用方向向量讨论平面、直线以及它们之间的位置关系。建立直线方程的关键也是确定其方向向量 $\boldsymbol{l}=\{l,m,n\}$。

3.平面与平面、直线与直线、平面与直线的位置关系

【例 1-3】 求过坐标原点和点 $P(-1,2,1)$，与平面 $2x+3y+7=0$ 垂直的平面方程。

解：平面 $2x+3y+7=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{2,3,0\}$，经过坐标原点和点 $P(-1,2,1)$ 的向量为 $\boldsymbol{n}_2=\{-1,2,1\}$，设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，故有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_2$，所以 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，故所求平面方程为 $3x-2y+7z=0$。

【例 1-4】 已知空间三点 $A=(1,1,0)$，$B(-2,1,3)$，$C(2,-1,2)$，求过这三点的平面方程。

解：方法 1：由向量的定义得到启发，作向量 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AC}$，则所求平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}$，而 $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&0&3\\1&-2&2\end{vmatrix}=\{6,9,6\}$，由平面的点法式方程，可得 $6(x+2)+9(y-1)+6(z-3)=0$。

方法 2：可以利用平面的一般式方程，设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$。

代入三个点坐标，由 $\begin{cases}A+B+D=0\\-2A+B+3C+D=0\\2A-B+2C+D=0\end{cases}$，解得 $B=\frac{3}{2}A$，$C=A$，$D=-\frac{5}{2}A$，代入平面

方程,整理可得 $2x+3y+2z-5=0$。

【例 1-5】 设平面 $\pi_1: 2x-y+z=0$;平面 $\pi_2: x+y+2z-11=0$,求 π_1 和 π_2 的夹角。

解:两平面法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{2,-1,1\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{1,1,2\}$,由两平面的夹角公式得 $\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{2}$,所以夹角为 60°。

【例 1-6】 求直线 $L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ 的夹角。

解:两直线方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=\{1,-4,1\}$, $\boldsymbol{l}_2=\{2,-2,-1\}$

两直线的夹角 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2|}{|\boldsymbol{l}_1||\boldsymbol{l}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以两直线的夹角为 45°。

【例 1-7】 判断直线 $L_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{1}$ 与 $L_2: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$ 的位置关系。

解:两直线方向向量为 $\boldsymbol{l}_1=\{1,-4,1\}$, $\boldsymbol{l}_2=\{3,1,1\}$,两直线的夹角为 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2|}{|\boldsymbol{l}_1||\boldsymbol{l}_2|}=0$,所以两直线的夹角为 90°,故两直线垂直。

(三)二次曲面、旋转曲面、柱面

1.旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面,这条定直线叫旋转曲面的轴。比如顶点在坐标原点,以 z 轴为旋转轴,半顶角为 α 的圆锥面方程为 $z^2=a^2(x^2+y^2)$, $(a=\cot\alpha)$。

2.柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面,这条定曲线叫柱面的准线,动直线叫柱面的母线。比如椭圆柱面。

3.二次曲面

三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面。例如:球面,椭球面,椭圆抛物面,双曲抛物面,单叶双曲面,双叶双曲面。

【例 1-8】 方程 $z^2-x^2-y^2=0$ 所表示的曲面是( )。

A.旋转双曲面　　B.双叶双曲面　　C.圆锥面　　D.单叶双曲面

解:在圆锥面方程中,令 $a=1$,即为所给方程。故选 C。

(四)空间曲线

空间曲线 C 可看作空间两曲面的交线,要掌握曲线的一般方程、参数方程,尤其是螺旋线的参数方程。

【例 1-9】 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解:交线为椭圆。

二、微分学

(一)极限

1.理解函数极限的描述性定义

2.理解无穷小量的概念(极限为 0 的变量是无穷小量)

了解无穷小量的运算性质及其与无穷大量的关系(倒数关系);知道无穷小量的比较。当$x\to 0$,有下列常用的等价无穷小:$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$。

无穷小量的运算性质主要有:

(1)有限个无穷小量的代数和是无穷小量;

(2)有限个无穷小量的乘积是无穷小量;

(3)无穷小量和有界变量的乘积是无穷小量。

【例 1-10】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=(\quad)$。

解:由于$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$(无穷小量乘以有界变量等于无穷小量)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\times 1=0$$

3.掌握极限的计算方法

包括极限的四则运算法则,消去极限式中的不定因子,利用无穷小量的运算性质,有理化根式,两个重要极限,函数的连续性等方法。

求极限有几种典型的类型:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x^k}-a}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{a^2+x^k}-a)(\sqrt{a^2+x^k}+a)}{x^k(\sqrt{a^2+x^k}+a)}=\dfrac{1}{2a}$

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+ax+b}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{x-x_0}=x_0-x_1$

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$

4.掌握两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$(或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$)。

重要极限的一般形式:

$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$;$\lim\limits_{f(x)\to\infty}(1+\dfrac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$(或$\lim\limits_{g(x)\to 0}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}}=e$)。

利用两个重要极限求极限,往往需要作适当的变换,将所求极限的函数变形为重要极限或重要极限的扩展形式,再利用重要极限的结论和极限的四则运算法则,

如 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}}=\frac{e^2}{e^{-1}}=e^3$$

(二)连续

1.理解函数连续性的定义

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则函数$f(x)$在$x_0$连续;判断函数在一点的连续性(函数在该点有定义,有极限,极限值等于函数值),三个条件缺一不可;会求函数的连续区间。

2.函数间断点的概念

不连续点就是间断点(即上面的三条中任何一条不满足就是间断点)。间断点分为第一类间断点和第二类间断点,其中第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

3.初等函数的连续性

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数。连续函数的和、差、积、商(分母不为0)及复合仍是连续函数,一切初等函数在其定义区间内连续。

4.掌握闭区间上连续函数的性质

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界;$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有极值。重点掌握零点定理。

【例 1-11】 求函数$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x},x<0\\2x+1,x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点。

解:$f(x)$是分段函数,$x=0$是$f(x)$的分段点,先考虑函数在$x=0$处的连续性。因为$\lim\limits_{x\to 0^-}x^3\sin\frac{1}{x}=0$;$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$;$f(0)=1$,所以函数$f(x)$在$x=0$处是间断的。又$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$都是连续的,故函数$f(x)$的间断点是$x=0$,且是第一类间断点。

【例 1-12】 设函数$f(x)=\begin{cases}ax^2+b,x<0\\1,\quad x=0\\\frac{\sin ax}{x},\quad x>0\end{cases}$,问$a,b$为何值时,$f(x)$在$x=0$处连续?

解:依函数连续的定义知,函数在某点处连续的充要条件是

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2+b)=b$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)=a$ 所以,当$b=1=f(0)=a$,

有$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$成立。于是有,当$a=b=1$时函数在$x=0$处连续。

(三)导数

1.导数的定义

掌握函数的导数的几何意义,建立曲线的切线方程;了解函数可导与连续的关系。

2.牢记导数基本公式

熟练掌握下列求导方法。

(1)导数的和、差、积、商四则运算法则；

(2)复合函数求导法则；

(3)隐函数求导方法；

(4)对数求导方法；

(5)参数表示的函数的求导法；

(6)高阶导数。

函数的高阶导数即为函数的导数的导数。因此要求函数的二阶导数就要先求函数的一阶导数。要求函数的 n 阶导数就要先求函数的 $n-1$ 阶导数。

【例 1-13】 求曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $y=2x$ 平行的切线方程，与直线 $y=2x$ 垂直的法线方程。

解：直线 $y=2x$ 的斜率为 2，曲线 $y=\ln x$ 的斜率 $y'=\dfrac{1}{x}$，得切点 $x=\dfrac{1}{2}$

代入曲线方程得 $y=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$，所以所求切线方程为：

$y+\ln 2=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，所求法线方程为 $y+\ln 2=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$。

【例 1-14】 已知函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$，求 y'。

解：$y=x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

【例 1-15】 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-2}}$，求 y'。

解：直接求导比较麻烦，可采用取对数求导法，将上式两端取对数得

$\ln y=\dfrac{1}{2}\ln(x+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2)$，两端求导得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{3(x-2)}$

整理后便可得 $y'=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\cdot\dfrac{x-8}{6(x^2-x-2)}$

【例 1-16】 由方程 $\cos(x^2+\sqrt{y})=x(0<y<\pi)$ 确定了 y 是 x 的函数，求 $y'(0)$。

解：方程两端对 x 求导，得 $-\sin(x^2+\sqrt{y})\left(2x+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}\right)=1$，故 $y'=2\sqrt{y}\left[-\dfrac{1}{\sin(x^2+\sqrt{y})}-2x\right]$，将 $x=0$ 代入原方程中，得 $\cos\sqrt{y}=0$，$\sqrt{y}=\dfrac{\pi}{2}$，$y=\dfrac{\pi^2}{4}$，于是 $y'(0)=-\pi$。

【例 1-17】 $y=\ln\left(x+\cos\dfrac{1}{x}\right)$，求 y'。

解：
$$y'=\frac{1}{x+\cos\frac{1}{x}}\left(x+\cos\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x+\cos\frac{1}{x}}\left[1+\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{x+\cos\frac{1}{x}}\left[1+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right]$$

【例 1-18】 求 $(\sin x)^{(n)}$，$(\cos x)^{(n)}$。

解：$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(四)微分

1.了解微分定义,掌握微分的计算

一元函数可微的充分必要条件是函数可导;微分的计算可以归结为导数的计算,即函数的微分等于函数的导数与自变量微分的乘积。但要注意它们之间的不同之处。

2.微分的应用

当 $f'(x_0)\neq 0$, $|\Delta x|$ 很小时,有 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$,

从而 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$。

需要掌握下面几个工程上常用的近似公式($x\to 0$ 时):

$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$, $\sin x\approx x$, $\tan x\approx x$, $e^x\approx 1+x$, $\ln(1+x)\approx x$。

【例 1-19】 $y=\sin\frac{1}{x}\cdot e^{\tan x^2}$,求 dy。

解:$y'=\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\tan x^2}+\sin\frac{1}{x}\cdot e^{\tan x^2}\cdot 2x\sec^2 x^2$,

则 $dy=\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot e^{\tan x^2}+2x\sin\frac{1}{x}\cdot e^{\tan x^2}\sec^2 x^2\right)dx$。

【例 1-20】 计算 $\sqrt{1.01}$ 的近似值。

解:$\sqrt{1.01}=\sqrt{1+0.01}$,利用公式 $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$,取 $x=0.01$,得 $\sqrt{1.01}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.01 = 1.005$。

(五)导数的应用

1.掌握罗尔定理和拉格朗日中值定理

会用洛必塔法则求“$\frac{0}{0}$”、“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式的极限,以及较简单的“$\infty-\infty$”、“$0\cdot\infty$”型不定式的极限。有时可连续使用洛必塔法则,只要其满足上述条件。简单的“$\infty-\infty$”、“$0\cdot\infty$”型不定式的极限可通过简单的变形转化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型,然后用洛必塔法则。

2.会用导数判断函数的单调、极值、最值、凹凸性

3.会求曲线的渐近线、弧微分、曲率

【例 1-21】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$。

解:属 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$。

【例 1-22】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$。

解:属 $\frac{0}{0}$ 型,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$。

【例 1-23】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$。

解:属 $0\cdot\infty$ 型,通过变形化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}-2\sqrt{x}=0。$$

【例 1-24】 求曲线 $y=\frac{x}{x^2+1}$的单调区间、极值点、凹凸区间和拐点。

解：$y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$驻点为 $x=\pm1$，单调增加区间是$(-1,1)$，单调减少区间是$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，极大值点是 $x=1$，极小值点是 $x=-1$。

$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$，凹区间是$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},+\infty)$，凸区间是$(-\infty,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$，拐点是$(-\sqrt{3},0)$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},0)$。

【例 1-25】 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x$ 在区间$[-1,2]$上的极值。

解：$f'(x)=x^2-5x^2+4=(x-4)(x-1)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=4$，由于 $x_2=4$ 不属于区间$[-1,2]$，故舍掉。

又 $f(1)=\frac{11}{6}$，$f(-1)=-\frac{41}{6}$，$f(2)=\frac{2}{3}$，所以函数的最小值点为 $x=-1$，最小值为 $f(-1)=-\frac{41}{6}$，函数的最大值点为 $x=1$，最大值为 $f(1)=\frac{11}{6}$。

【例 1-26】 函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$，在 $x=\frac{\pi}{3}$处取得极值，则 a 的值为多少？

解：按可导函数取得极值的必要条件：$f'(x_0)=a\cos x_0+\cos 3x_0=0$，代入 $x_0=\frac{\pi}{3}$，得 $a=2$。

(六)偏导数

1.一阶偏导

偏导数的定义及计算：就是将一个变量固定，求另一个变量的导数。一般说只要会求一元函数的导数就会求二元函数的偏导数。

2.高阶偏导

当二阶偏导 f''_{xy}与f''_{yx}都连续时，它们必相等(初等函数在偏导存在的定义域中都满足)，但这只是二阶偏导可交换的充分条件，并不是必要条件。

3.多元复合函数的求导法则

z 是变量 u，v 的二元函数：$z=f(u,v)$，u，v 都是变量 x，y 的二元函数：$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，在$(x,y)$处有 $f_x'=f_u'\cdot u_x'+f_v'\cdot v_x'$，$f_y'=f_u'\cdot u_y'+f_v'\cdot v_y'$。

4.隐函数求导

5.偏导数的应用

(1)掌握空间曲线的切线与法平面；

(2)掌握曲面的切平面与法线；

(3)掌握多元函数的极值。

极值存在的必要条件和极值存在的充分条件。

(七)全微分

掌握全增量和全微分定义。

$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记为 $dz=A\Delta_x z+B\Delta_y z$。如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域中有连续偏导数，则它在点(x,y)处必可微，且 $A=f_x'(x,y)$，$B=f_y'(x,y)$，$dz=$

$f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$。

注意计算二元函数的全微分，实际上就是计算两个偏导数。

【例 1-27】 设 $z=u^2\ln v$，$u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{u^2}{v}\cdot 3=\dfrac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\dfrac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)+\dfrac{u^2}{v}\cdot(-2)=-\dfrac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\dfrac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$。

【例 1-28】 设 $z=f(x,y)$是由方程 $3x^2+2y^2+z^2-2xyz=0$ 确定的函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：方程两端对 x 求偏导，得 $3x+2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2yz-2xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，

整理得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2yz-3x}{2z-2xy}$；

方程两端对 y 求偏导，得 $4y+2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}-2xz-2xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，

整理得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2xz-4y}{2z-2xy}$。

【例 1-29】 下列结论正确的是：

A. $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数存在是 $z=f(x,y)$在该点连续的充分条件

B. $z=f(x,y)$在点(x,y)的连续是 $z=f(x,y)$的偏导数存在的必要条件

C. $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数存在是 $z=f(x,y)$在该点可微的充分条件

D. $z=f(x,y)$在点(x,y)连续是 $z=f(x,y)$在该点可微的必要条件

解：由 $z=f(x,y)$在点(x,y)可微的定义知，$z=f(x,y)$在该点可微必定在该点连续，故选择 D。

【例 1-30】 求曲线 $x=t^2-1$，$y=t+1$，$z=t^3$ 在点(0,2,1)处的切线和法平面。

解：点(0,2,1)对应的参数 $t=1$，切线的方向向量为$\{x',y',z'\}_{t=1}=\{2t,1,3t^2\}_{t=1}=\{2,1,3\}$，故切线方程为$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{3}$，法平面方程为 $2x+(y-2)+3(z-1)=0$。

【例 1-31】 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面方程。

解：设 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，则点(2,1,0)处的切平面法向量为 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)_{(2,1,0)}=\{y,x,e^z-1\}_{(2,1,0)}=\{1,2,0\}$，故所求切平面方程为$(x-2)+2(y-1)=0$。

【例 1-32】 求函数 $z=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值。

解：求驻点，由 $z_x=2x-y-2=0$，$z_y=-x+2y+1=0$，得驻点(1,0)，求二阶导数 $z_{xx}=2$，$z_{xy}=-1$，$z_{yy}=2$，在驻点(1,0)处，$B^2-AC=-3<0$，$A=2>0$，故(1,0)为极小值点，极小值为 $z(0,1)=-1$

三、积分学

(一)不定积分与定积分

1. 原函数与不定积分概念