查理斯密

大代數學

連江陳　文
南海何崇禮
編譯

商務印書館發行

查理斯密

大代數學

下卷

目錄

查理斯密

大代數學

下卷

第貳拾伍編

級數之和 (Summation of Series)

(315). 級數 級數之最要者既舉於前。即等差,等比,調和,三級數。詳於第十七編。二項級數。詳於288款。指數及對數之級數。詳於第二十四編。是也。本編惟舉他種必需之級數。

(316). 記法 以U_n題級數之第n項。以S_n題其n項之和。若級數爲斂級數。則至無窮項之和。可用S_∞題之。

(317). 公項之差 求級數之和。雖無一定之法則。然級數之公項U_n (即第n項) 多能分爲兩式之差。使一式含有n,一式含有$n-1$,由是可求其和。

〔例〕 於 $\frac{a}{x(x+a)}+\frac{a}{(x+a)(x+2a)}+\frac{a}{(x+2a)(x+3a)}+\dots,$

內其第n項卽 $\frac{a}{(x+\overline{n-1}.a)(x+na)}$ 等於 $\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}$

故此級數可書爲 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)+\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}\right)$

$+\left(\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}\right)+\dots+\left\{\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}\right\}$；而除首項及末項外。諸項悉消盡。

故 $$S_n=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+na}=\frac{na}{x(x+na)}.$$

例題

1. 求級數 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots\frac{1}{n(n+1)}+\dots$ 之n項之和。

答 $1-\frac{1}{n+1}.$

2. 求級數 $\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{2}{\lfloor 3}+\frac{3}{\lfloor 4}+\dots\dots+\frac{n}{\lfloor n+1}+\dots.$ 之n項之和。

令 $U_n=\frac{1}{\lfloor n}-\frac{1}{\lfloor n+1}.$ 答 $1-\frac{1}{\lfloor n+1}.$

3. 求級數 $\frac{1}{3\lfloor 1}+\frac{1}{4\lfloor 2}+\frac{1}{5\lfloor 3}+\dots\dots+\frac{1}{(n+2)\lfloor n}+\dots.$ 至無窮項之和。

今 $U_n=\frac{1}{\underline{|n+1}}-\frac{1}{\underline{|n+2}}$.

答 $\frac{1}{2}$.

4. 求級數 $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots.$

至無窮項之和。

答 1.

5. 求級數 $\frac{1}{1.3}+\frac{2}{1.3.5}+\frac{3}{1.3.5.7}+\ldots+\frac{n}{1.3\,5\ldots(2n+1)}$.

之 n 項之和 $\left[2U_n=\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}-\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}\right]$.

答 $\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)}\right\}$

6. 求級數 $\frac{2}{1.3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3.5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.6}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\ldots$

$+\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots$ 至無窮項之和 $\left[\text{然 } \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\right.$

$\left.=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2n-1}-\frac{1}{2n-1}\right),\ 4U_n=\frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^n}\right]$.

答 $\frac{1}{4}$.

7. 求級數 $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\ldots.$ 至無

窮項之和。　　答 $\frac{1}{2}$.

8. 求級數 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)}$

$+\frac{x^3}{(1-x^3)(1-x^4)}+\ldots\ldots$ 之 n 項之和

答 $\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)(1-x^{n+1})}$.

(319). 問題 求次之級數之 n 項之和

$$\{a(a+b)\ldots(a+\overline{r-1}.b)\}+\{(a+b)(a+2b)\ldots(a+rb)\}+\ldots$$
$$+\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}+\ldots$$

此級數之性質。(1) 各項有 r 因子。(2) 任意一項之諸因子成等差級數。(3) 連續諸項之諸第一因子。成與第一項諸因子相同之等差級數。

欲考察以同規律所成之級數。宜先於此各項之最後因子之次。更加一因子。作成新級數。而設此級數之第 n 項為 v_n。

由是 $$v_n=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-1}.b)\}$$

然 $$v_n-v_{n-1}=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-1}.b)\}.$$
$$-\{(a+\overline{n-2}.b)(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}.$$
$$=\{(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}$$
$$\{(a+\overline{n+r-1}.b)-(a+\overline{n-2}.b)\}.$$
$$=(r+1)b\{(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)\}.$$

由是　$v_n - v_{n-1} = (r+1)b \times U_n$

於是次第變 n 爲 $n-1$ 則得次之各式卽

$$v_{n-1} - v_{n-2} = (r+1)b \times U_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_2 - v_1 = (r+1)b \times U_2,$$

又　$v_1 - v_0 = (r+1)b \times U_1.$

但 v_0 爲依相同之規律而成者。卽在 v_1 前之項也。故

$$v_0 = \{(a-b)a(a+b)\ldots\ldots(a+\overline{r-1}.b)\}$$

又於 v_n，設 $n=0$，亦可得 v_0.

由是。依加法　$(v_n - v_0) = (r+1)bS_n$

$$\therefore\quad S_n = (v_n - v_0) \div (r+1)b.$$

例　題

1. 求級數 $1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots+n(n+1)$.

令 $U_n = n(n+1)$，$v_n = n(n+1)(n+2)$，$v_0 = 0.1.2$，$r=2$.

及　$b=1$.

由是　$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

上式乃用公式以求其和。若代以求公式之方法則如次。是爲最單簡之例。

$$n(n+1) = \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\},$$

$$(n-1)n=\frac{1}{3}\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\},$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

$$1.2=\frac{1}{2}\{1.2.3-0.1.2\}.$$

由是　$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

2. 求級數 $1.2.3+2.3.4+\ldots+n(n+1)(n+2)$ 之和。

答　$\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)(n+3).$

3. 求級數 $1.2.3.4+2.3.4.5+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)$ 之和.

答　$\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$

4. 求級數 $3.5.7+5.7.9+7.9.11+\ldots\ldots$ 之 n 項之和。

令　$U_n=(2n+1)(2n+3)(2n+5),$

$v_n=(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7),$

$v_0=1.3.5.7,\ r=3,$ 及 $b=2$

由是　$S_n=\frac{1}{4.2}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)-1.3.5.7\}.$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必為所設之級數。故可用具上式之若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例如次。

5. 求級數 $1.3+2.4+3.5+\ldots\ldots$ 之 n 項之和。

今 $U_n=n(n+2)=n(n+1)+n.$

而級數 $1.2+2.3+\ldots\ldots+n(n+1)$ 之和爲

$$\tfrac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0.1.2\}$$

級數 $1+2+\ldots\ldots+n$ 之和爲 $\tfrac{1}{2}\{n(n+1)-0.1\}$

由是所求之和爲 $\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)+\tfrac{1}{2}n(n+1)$.

6. 求級數 $2.3.1+3.4.4.+4.5.7+\ldots\ldots$

$+(n+1)(n+2)(3n-2)$ 之和。

今 $U_n=(n+1)(n+2)(3n-2)$

$$=3n(n+1)(n+2)-2(n+1)(n+2).$$

$$\therefore\quad S_n=\tfrac{3}{4}\{n(n+1)(n+2)(n+3)-0.1.2.3\}$$

$$-\tfrac{2}{3}\{(n+1)(n+2)(n+3)-1.2.3\}$$

$$=\tfrac{1}{12}(9n-8)(n+1)(n+2)(n+3)+4.$$

(319). 問題 求以下式爲公項之級數之和。

$$\frac{1}{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}.$$

此級數爲前款之級數各項之反商。而削去此分母之第一因子。則得第二級數。而其公項爲

$$v_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}.$$

然 $$v_n-v_{n-1}=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}$$

$$-\frac{1}{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\ldots(a+\overline{n+r-3}.b)}$$

$$=\frac{1}{(a+\overline{n-1}.b)\ldots(a+\overline{n+r-2}.b)}$$

$$\{(a+\overline{n+1}.b)-(a+\overline{n+r-2}.b)\},$$

$$\therefore\quad v_n-v_{n-1}=-(r-1)b\times U_n.$$

令 n 爲 $n-1$ 則 $v_{n-1}-v_{n-2}=-(r-1)b\times U_{n-1}$,

由是類推 ....

$$v_2-v_1=-(r-1)b\times U_2,$$

$$v_1-v_0=-(r-1)b\times U_1.$$

但 v_0 爲依相同之規律而成者。即在 v_1 前之項也。

故 $$v_0=\frac{1}{a(a+b)\ldots\ldots(a+\overline{r-2}.b)}.$$

由加法 $$v_n-v_0=-(r-1)b\times S_n;$$

$$\therefore\quad S_n=(v_0-v_n)/(r-1)b.$$

例 題

1. 求級數 $\frac{1}{2\,3}+\frac{1}{3\,4}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 之和。

令 $U_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $v_n=\frac{1}{n+2}$, $v_0=\frac{1}{2}$ $r=2$, $b=1$.

由是 $S_n=\frac{1}{11}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$

2. 求級數 $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4\ 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 之 n 項之和及無窮項之和。

$$\text{令}\quad U_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\ v_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$v_0=\frac{1}{1.2.3},\quad r=4\quad \text{及}\quad b=1.$$

$$\text{由是}\quad S_n=\frac{1}{3.1}\left\{\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\},$$

$$\text{及}\quad S_\infty=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{18}.$$

3. 求級數 $\frac{1}{3.7.11}+\frac{1}{7.11.15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$ 之和。

答 $S_n=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3.7}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right\}.$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必爲所設之級數。故可用具上式若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例於次。

4. 求級數 $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots\ldots$ 之和。

$$\text{令}\quad U_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

而以 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 及 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 爲公項之兩級數。具有本款所說之形狀。故已知級數之和。如次

$$S_n \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

5. 求級數 $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{2.4.6}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ 之和

$$U_n=\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{n(n+4)+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

由是 $S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2.3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$

$$+\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}.$$

(320). <u>分項</u> 前記之級數。可用分項分數之方法求其和。

例於 $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$

設 $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$ 依第二十三編得

$$A=\frac{1}{2} \text{ 及 } B=-\frac{1}{2}.$$

由是 $2U_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$ $\therefore$ $2U_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$,

$2U_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $2U_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$,........

$2U_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}$, $2U_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$,

$2U_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$.

由加法 $2S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$$\therefore\quad S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

(321) 求級數前 n 個整數之 r 方乘之和。

〔第一〕 求 $1^2+2^2+3^2+......+n^2$ 之和。

$U_n\equiv n^2=n(n+1)-n$ 由是依318款。

$$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

〔第二〕 求 $1^3+2^3+3^3+......+n^3$ 之和。

$U_n\equiv n^3=n(n+1)(n+2)-3n^2-2n$

$=n(n+1)(n+2)-3n(n+1)+n$. 依318款。

$$S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-3\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\}$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

$$1+2+\dots\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

$$\therefore\quad 1^3+2^3+\dots\dots+n^3=(1+2+\dots\dots+n)^2,$$

卽前n個整數之立方之和等於前n個整數之和之平方。

〔別法〕又 $1^3+2^3+\dots\dots+n^3$ 之和可用下法得之。

由恆等式　$4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2$ 設n依次減1

則　$4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2,$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$4.2^3=(2.3)^2-(1.2)^2,$$

$$4.1^3=(1.2)^2-(0.1)^2.$$

由加法　$4S_n=n^2(n+1)^2.$

〔第三〕求 $1^r+2^r+3^r+\dots\dots+n^r$ 之和。

凡前n個整數之r乘方之和。若r爲任意之特別值。亦可用與$r=2$及$r=3$之例相同之法求之。

例如求 $1^4+2^4+\dots\dots+n^4$ 之和當變其公項如次。

$$n^4\equiv n(n+1)(n+2)(n+3)-6n(n+1)(n+2)$$
$$+7n(n+1)-n.$$

又r方乘之和依二項式之定理。可用低於r之方乘之和之項顯之。卽如次。