

查 理 斯 密

# 大 代 數 學

連 江 陳 文  
南 海 何 崇 禮 編 譯

商 務 印 書 館 發 行

# 查 理 斯 密

## 大 代 數 學

### 下 卷



## 目 錄

		頁
第貳拾伍編	級數之和 ... ..	1
	例題 ... ..	2
	問題 例題 ... ..	5
	分項及問題 ... ..	10
	積彈 例題 ... ..	13
	形數 多角數 ... ..	16
	例題三十三 ... ..	18
	問題 例題 ... ..	21
	任意級數 ... ..	27
	逐差法 ... ..	27
	循環級數 問題 定理 ... ..	31
	數級數及發級數 二項級數 ... ..	37

	頁
Cauchy 氏之定理 ... .. .	41
例題三十四 ... .. .	46
<b>第貳拾陸編</b> 不等式 ... .. .	53
例題 定理 雜例 ... .. .	56
例題三十五 ... .. .	64
<b>第貳拾柒編</b> 連分數 ... .. .	68
漸近分數 例題 ... .. .	71
連分數之作法 例題 ... .. .	72
漸近分數之性質 ... .. .	74
例題三十六 ... .. .	78
一般之漸近分數 ... .. .	81
循環連分數 ... .. .	85
連分數之斂級數 ... .. .	87
化連分數爲二次不盡根之法 ... .. .	91
化二次不盡根爲連分數之法 ... .. .	93
用連分數顯之級數 ... .. .	99
例題三十七 ... .. .	103
<b>第貳拾捌編</b> 數之理論 ... .. .	109
Eratosthenes 氏之選法 ... .. .	109
例題 ... .. .	118
Fermet 氏之定理 例題 ... .. .	118
例題 ... .. .	119
例題三十八 ... .. .	128

	頁
等剩式 等剩式之性質 ... ..	...130
Fermet 氏之定理 ... ..	...133
Wilson 氏之定理... ..	...134
Fermat 氏之定理之擴張 ... ..	...138
Lagrange 氏之定理 ... ..	...139
循環小數之分數變化... ..	...141
雜例 ... ..	...143
例題三十九 ... ..	...144
<b>第貳拾玖編</b> 不定方程式 ... ..	...147
例題四十... ..	...158
<b>第貳拾玖編</b> 種貳次不定方程式(荷廬及奈脫氏第二十八編) ...	...161
例題二十八 ... ..	...166
<b>第參拾編</b> 適遇法, 例題 ... ..	...168
期望, 例題... ..	...180
反適遇, 通例, 例題 ... ..	...182
雜例 ... ..	...188
例題四十一 ... ..	...191
<b>第參拾壹編</b> 行列式 ... ..	...196
例題 ... ..	...204
小行列式 ... ..	...205
行列式之展開, 例題 ... ..	...206
乘法之原則, 例題 ... ..	...215
複縱線, 聯立一次方程式, 例題 ... ..	...218

	頁
消去法 ... ..	...222
例題四十二 ... ..	...224
<b>第參拾貳編</b> 方程式之理論, 函數 ... ..	...231
根原之定理, 根及係數之關係 ... ..	...232
根之等勢式 ... ..	...233
根之等勢函數, 等勢函數之例 ... ..	...238
方程式之變化 ... ..	...240
應用, 例題四十三 ... ..	...248
虛根, 不盡根, 例題 ... ..	...250
兩方程式之通根, 根之關係 ... ..	...252
可通約之根 ... ..	...255
例題四十四 ... ..	...256
變函數, 有理函數之變化 ... ..	...259
Rolle 氏之定理 ... ..	...269
Descartes 氏之符號規則 ... ..	...270
例題四十五 ... ..	...273
三次方程式, 普通三次方程式 ... ..	...275
四次方程式 ... ..	...277
Sturm 氏之定理 ... ..	...279
綜合除法 ... ..	...287
拾之倍數 Horner 氏之法 ... ..	...291
例題四十六 ... ..	...296
<b>編外雜題</b> ... ..	...300
<b>下卷之答</b> ... ..	...322

查 理 斯 密  
大 代 數 學  
下 卷

---

第 貳 拾 伍 編

級 數 之 和 (Summation of Series)

(315). 級數 級數之最要者既舉於前。即等差, 等比, 調和, 三級數。詳於第十七編。二項級數。詳於288款。指數及對數之級數。詳於第二十四編。是也。本編惟舉他種必需之級數。

(316). 記法 以  $U_n$  顯級數之第  $n$  項。以  $S_n$  顯其  $n$  項之和。若級數為斂級數。則至無窮項之和。可用  $S_\infty$  顯之。

(317). 公項之差 求級數之和。雖無一定之法則。然級數之公項  $U_n$  (即第  $n$  項) 多能分為兩式之差。使一式含有  $n$ , 一式含有  $n-1$ , 由是可求其和。

〔例〕 於  $\frac{a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)(x+2a)} + \frac{a}{(x+2a)(x+3a)} + \dots$ ,

內其第  $n$  項即  $\frac{a}{(x+n-1)a(x+na)}$  等於  $\frac{1}{x+(n-1)a} - \frac{1}{x+na}$

故此級數可書為  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right) + \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+2a}\right)$

$+ \left(\frac{1}{x+2a} - \frac{1}{x+3a}\right) + \dots + \left\{\frac{1}{x+(n-1)a} - \frac{1}{x+na}\right\}$ ; 而除首

項及末項外諸項悉消盡。

故  $S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+na} = \frac{na}{x(x+na)}$ .

### 例 題

1. 求級數  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$  之  $n$

項之和。

答  $1 - \frac{1}{n+1}$ .

2. 求級數  $\frac{1}{\underline{2}} + \frac{2}{\underline{3}} + \frac{3}{\underline{4}} + \dots + \frac{n}{\underline{n+1}} + \dots$  之  $n$  項

之和。

今  $U_n = \frac{1}{\underline{n}} - \frac{1}{\underline{n+1}}$  答  $1 - \frac{1}{\underline{n+1}}$

3. 求級數  $\frac{1}{3\underline{1}} + \frac{1}{4\underline{2}} + \frac{1}{5\underline{3}} + \dots + \frac{1}{(n+2)\underline{n}} + \dots$

至無窮項之和。

$$\text{今 } U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

答  $\frac{1}{2}$ .

4. 求級數  $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$

至無窮項之和。

答 1.

5. 求級數  $\frac{1}{1.3} + \frac{2}{1.3.5} + \frac{3}{1.3.5.7} + \dots + \frac{n}{1.3.5 \dots (2n+1)}$ .

之  $n$  項之和  $\left[ 2U_n = \frac{1}{1.3.5 \dots (2n-1)} - \frac{1}{1.3.5 \dots (2n-1)(2n+1)} \right]$ .

答  $\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1.3.5 \dots (2n+1)} \right\}$

6. 求級數  $\frac{2}{1.3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{3.5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5.6} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$

$+ \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$  至無窮項之和  $\left[ \text{然 } \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$

$= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), 4U_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n}.$

答  $\frac{1}{4}$ .

7. 求級數  $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \dots$  至無

窮項之和。

答  $\frac{1}{2}$ .



$$8. \text{ 求級數 } \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)} \\ + \frac{x^3}{(1-x^3)(1-x^4)} + \dots \text{ 之 } n \text{ 項之和}$$

$$\text{答 } \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)(1-x^{n+1})}$$

(31C). 問題 求次之級數之  $n$  項之和

$$\{a(a+b)\dots(a+\overline{r-1}.b)\} + \{(a+b)(a+2b)\dots(a+rb)\} + \dots \\ + \{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\dots(a+\overline{n+r-2}.b)\} + \dots$$

此級數之性質。(1) 各項有  $r$  因子。(2) 任意一項之諸因子成等差級數。(3) 連續諸項之諸第一因子。成與第一項諸因子相同之等差級數。

欲考察以同規律所成之級數。宜先於此各項之最後因子之次。更加一因子。作成新級數。而設此級數之第  $n$  項為  $v_n$ 。

$$\text{由是 } v_n = \{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\dots(a+\overline{n+r-1}.b)\}$$

$$\text{然 } v_n - v_{n-1} = \{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\dots(a+\overline{n+r-1}.b)\}.$$

$$- \{(a+\overline{n-2}.b)(a+\overline{n-1}.b)\dots(a+\overline{n+r-2}.b)\}.$$

$$= \{(a+\overline{n-1}.b)\dots(a+\overline{n+r-2}.b)\}$$

$$\{(a+\overline{n+r-1}.b) - (a+\overline{n-2}.b)\}.$$

$$= (r+1)b\{(a+\overline{n-1}.b)\dots(a+\overline{n+r-2}.b)\}.$$

由是  $v_n - v_{n-1} = (r+1)b \times U_n$

於是次第變  $n$  爲  $n-1$  則得次之各式即

$$v_{n-1} - v_{n-2} = (r+1)b \times U_{n-1},$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$v_2 - v_1 = (r+1)b \times U_2,$$

又  $v_1 - v_0 = (r+1)b \times U_1.$

但  $v_0$  爲依相同之規律而成者。即在  $v_1$  前之項也故

$$v_0 = \{(a-b)a(a+b)\dots\dots(a+\overline{r-1}.b)\}$$

又於  $v_n$ , 設  $n=0$ , 亦可得  $v_0$ .

由是。依加法  $(v_n - v_0) = (r+1)bS_n$

$$\therefore S_n = (v_n - v_0) \div (r+1)b.$$

## 例 題

1. 求級數  $1.2+2.3+3.4+\dots\dots+n(n+1).$

今  $U_n = n(n+1)$ ,  $v_n = n(n+1)(n+2)$ ,  $v_0 = 0.1.2$ ,  $r=2$ .

及  $b=1$ .

由是  $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

上式乃用公式以求其和。若代以求公式之方法則如次。是爲最單簡之例。

$$n(n+1) = \frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\},$$

$$(n-1)n = \frac{1}{3}\{(n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n\},$$

..... = .....

$$1.2 = \frac{1}{2}\{1.2.3 - 0.1.2\}.$$

由是  $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

2. 求級數  $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2)$  之和。

答  $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)(n+3).$

3. 求級數  $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \dots$

$+ n(n+1)(n+2)(n+3)$  之和。

答  $\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$

4. 求級數  $3.5.7 + 5.7.9 + 7.9.11 + \dots$  之  $n$  項之和。

今  $U_n = (2n+1)(2n+3)(2n+5),$

$$v_n = (2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7),$$

$$v_0 = 1.3.5.7, r = 3, \text{ 及 } b = 2$$

由是  $S_n = \frac{1}{4.2}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7) - 1.3.5.7\}.$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必為所設之級數。故可用具上式之若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例如次。

5. 求級數  $1.3+2.4+3.5+\dots$  之  $n$  項之和。

$$\text{今 } U_n = n(n+2) = n(n+1) + n.$$

而級數  $1.2+2.3+\dots+n(n+1)$  之和爲

$$\frac{1}{2}\{n(n+1)(n+2) - 0.1.2\}$$

級數  $1+2+\dots+n$  之和爲  $\frac{1}{2}\{n(n+1) - 0.1\}$

由是所求之和爲  $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}n(n+1)$ 。

6. 求級數  $2.3.1+3.4.4.+4.5.7+\dots$

$+ (n+1)(n+2)(3n-2)$  之和。

$$\text{今 } U_n = (n+1)(n+2)(3n-2)$$

$$= 3n(n+1)(n+2) - 2(n+1)(n+2).$$

$$\therefore S_n = \frac{3}{4}\{n(n+1)(n+2)(n+3) - 0.1.2.3\}$$

$$- \frac{2}{3}\{(n+1)(n+2)(n+3) - 1.2.3\}$$

$$= \frac{1}{12}(9n-8)(n+1)(n+2)(n+3) + 4.$$

- (319). 問題 求以下式爲公項之級數之和。

$$\frac{1}{(a+n-1.b)(a+nb)(a+n+1.b)\dots(a+n+r-2.b)}$$

此級數爲前款之級數各項之反商。而削去此分母之第一因子。則得第二級數而其公項爲

$$v_n = \frac{1}{(a+nb)(a+n+1.b)\dots(a+n+r-2.b)}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{然 } v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{(a+nb)(a+n+1.b)\dots(a+n+r-2.b)} \\
 &= \frac{1}{(a+n-1.b)(a+nb)\dots(a+n+r-3.b)} \\
 &= \frac{1}{(a+n-1.b)\dots(a+n+r-2.b)} \\
 &\quad \{ (a+n+1.b) - (a+n+r-2.b) \},
 \end{aligned}$$

$$\therefore v_n - v_{n-1} = -(r-1)b \times U_n.$$

令  $n$  爲  $n-1$  則  $v_{n-1} - v_{n-2} = -(r-1)b \times U_{n-1}$ ,

由是類推 .....

$$v_2 - v_1 = -(r-1)b \times U_2,$$

$$v_1 - v_0 = -(r-1)b \times U_1.$$

但  $v_0$  爲依相同之規律而成者。即在  $v_1$  前之項也。

$$\text{故 } v_0 = \frac{1}{a(a+b)\dots(a+r-2.b)}.$$

由加法  $v_n - v_0 = -(r-1)b \times S_n$ ;

$$\therefore S_n = (v_0 - v_n) / (r-1)b.$$

## 例 題

1. 求級數  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  之和。

$$\text{今 } U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, v_n = \frac{1}{n+2}, v_0 = \frac{1}{2} \quad r=2, b=1.$$

$$\text{由是 } S_n = \frac{1}{11} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

2. 求級數  $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$  之  $n$  項之和及無窮項之和。

$$\text{今 } U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}, v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$v_0 = \frac{1}{1.2.3}, r=4 \text{ 及 } b=1.$$

$$\text{由是 } S_n = \frac{1}{3.1} \left\{ \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\},$$

$$\text{及 } S_\infty = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{18}.$$

3. 求級數  $\frac{1}{3.7.11} + \frac{1}{7.11.15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$  之和。

$$\text{答 } S_n = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3.7} - \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} \right\}.$$

若級數非如上所述之形狀。然分離其各項。必為所設之級數。故可用具上式若干級數之代數和顯之。由是可直書其和於式下。今示其例於次。

4. 求級數  $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots$  之和。

$$\text{今 } U_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

而以  $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$  及  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  爲公項之兩級數，具有本款所說之形狀。故已知級數之和。如次

$$\begin{aligned} S_n & \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ & = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

5. 求級數  $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{2.4.6} + \dots + \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$  之和

$$\begin{aligned} U_n & = \frac{1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ & = \frac{n(n+4)+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ & = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由是 } S_n & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2.3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right\} \\ & \quad + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right\}. \end{aligned}$$

(320). 分項 前記之級數。可用分項分數之方法求其和。

$$\text{例於 } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

設  $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$  依第二十三編得

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{及} \quad B = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{由是 } 2U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \quad \therefore 2U_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3},$$

$$2U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad 2U_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \dots\dots\dots$$

$$2U_{n-2} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}, \quad 2U_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

$$2U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{由加法 } 2S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\therefore S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

(321) 求級數前  $n$  個整數之  $r$  方乘之和。

[第一] 求  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  之和。

$U_n \equiv n^3 = n(n+1) - n$  由是依 318 款。

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

[第二] 求  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$  之和。

$$U_n \equiv n^3 = n(n+1)(n+2) - 3n^2 - 2n$$

$= n(n+1)(n+2) - 3n(n+1) + n$ . 依 318 款。

$$S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3 \times \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$+ \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+2)(n+3) - 4(n+2) + 2\}$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$



$$1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

$$\therefore 1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2,$$

即前  $n$  個整數之立方之和等於前  $n$  個整數之和之平方。

〔別法〕 又  $1^3+2^3+\dots+n^3$  之和可用下法得之。

由恆等式  $4n^3 = \{n(n+1)\}^2 - \{(n-1)n\}^2$  設  $n$  依次減 1

$$\text{則} \quad 4(n-1)^3 = \{(n-1)n\}^2 - \{(n-2)(n-1)\}^2,$$

.....

$$4 \cdot 2^3 = (2 \cdot 3)^2 - (1 \cdot 2)^2,$$

$$4 \cdot 1^3 = (1 \cdot 2)^2 - (0 \cdot 1)^2.$$

$$\text{由加法} \quad 4S_n = n^2(n+1)^2.$$

〔第三〕 求  $1^r+2^r+3^r+\dots+n^r$  之和。

凡前  $n$  個整數之  $r$  乘方之和。若  $r$  為任意之特別值。亦可用與  $r=2$  及  $r=3$  之例相同之法求之。

例如求  $1^4+2^4+\dots+n^4$  之和當變其公項如次。

$$n^4 \equiv n(n+1)(n+2)(n+3) - 6n(n+1)(n+2)$$

$$+ 7n(n+1) - n.$$

又  $r$  方乘之和依二項式之定理。可用低於  $r$  之方乘之和之項顯之。即如次。