



应用结构稳定计算

刘古岷 张若晞 张田申 编著



科学出版社
www.sciencep.com

应用结构稳定计算

刘方强 张世明 张启华 编著



中国石化出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

应用结构稳定计算

刘古岷 张若晞 张田申 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书全面系统地阐述了结构稳定问题的各类数学方法,并以实际应用中的稳定问题为例,说明求解的技巧。

全书包括:轴心压杆的稳定,压弯杆件在平面内的稳定,各类变截面压杆的稳定性、解析解与近似解,刚架与连续梁的稳定,开口薄壁杆件的稳定,拱的稳定,薄板的稳定等。

本书可供从事设计与施工的土木建筑、桥梁工程、机械工程的科技人员及相关专业的高等院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用结构稳定计算/刘古岷等编著. —北京:科学出版社,2004

ISBN 7-03-013572-5

I. 应… II. 刘… III. 结构稳定性-结构计算

N. TU311.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063310 号

责任编辑:杨家福 / 责任校对:张 琪

责任印制:吕春珉 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年7月第一版 开本:B5(720×1000)

2004年7月第一次印刷 印张:22 1/4

印数:1—2 000 字数:435 000

定价 45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前 言

结构稳定理论是结构力学的一个独立分支,近年来随着计算技术的发展,稳定理论的应用愈益广泛。然而,不少工程技术人员在大学毕业后一碰到“稳定问题”往往束手无策,究其原因除去对基本理论理解不深外,主要问题是对解决稳定问题的许多数学方法知之甚少。为了弥补这一缺憾,作者在1990年前后就萌发了编写《应用结构稳定计算》一书的想法,经过多年努力终于完成编写。本书在尽可能讲清楚理论的同时,主要从应用着手,对广泛应用的各种数学方法做详细的介绍,做严密的推导。书中还收入了作者近年来的一些研究成果作为解决具体问题的实例,以便加深读者对理论的理解并掌握解决稳定问题的方法。

本书适用于建筑、桥梁、机械结构工程等专业的大学毕业生、研究生及工程师阅读,既可作为进一步深造的入门教科书,也可作为学习的参考书。

本书共分七章。除第二章由张田申编写、第六章由张若晞编写外,其余各章均由刘古岷编写。刘古岷负责全书定稿。由于水平所限,本书的内容或编排难免存在不妥之处,希望广大同行提出宝贵意见。

承蒙铁道部大桥局周璞高工审阅本书,特表谢意。南京市规划设计院周晓路、苏州市市政工程公司陈优负责了本书的初排及图表绘制,在此一并致谢。

目 录

第一章 轴心压杆的稳定	1
1.1 概述	1
1.2 用静力法计算理想中心压杆的临界荷载	3
1.3 弹性支承轴心压杆的稳定	4
1.4 格构式柱的稳定.....	12
1.4.1 剪力对临界荷载的影响	12
1.4.2 格构式压杆的稳定	14
1.5 轴心压杆的大挠度理论.....	17
1.6 初始缺陷对轴心压杆的影响.....	21
1.6.1 初弯曲	21
1.6.2 初偏心	23
1.6.3 残余应力的影响	25
1.7 轴心压杆的非弹性屈曲.....	29
1.7.1 切线模量理论	30
1.7.2 双模量理论	31
1.7.3 Shanley 理论	33
1.8 轴心受压杆的稳定理论在钢结构设计中的应用.....	37
1.8.1 以分岔屈曲荷载为依据	37
1.8.2 以边缘纤维屈服为依据	38
1.8.3 以极限荷载为依据	39
第二章 压弯杆件在平面内的稳定	42
2.1 概述.....	42
2.2 两端铰支弹性压杆在横向荷载作用下的内力与变形.....	43
2.2.1 横向均匀荷载作用下的压弯杆件	43
2.2.2 杆中央有集中荷载的压弯杆件	45
2.2.3 等距双横向力作用的压弯杆件	47
2.3 两端固定弹性压杆在横向荷载作用下的内力与变形.....	49
2.3.1 基本微分方程	49
2.3.2 横向均匀分布荷载的压弯杆件	50
2.3.3 跨中有集中荷载作用的压弯杆件	51
2.4 端弯矩作用下弹性压弯杆件的内力与变形.....	53

2.4.1	不等端弯矩作用在简支压杆上的挠曲线	53
2.4.2	杆件内的最大弯矩	54
2.4.3	两端固定弹性压杆在三分点处有两个相同的横向荷载作用时的变形与内力	55
2.5	压弯杆件的等效弯矩	56
2.6	压弯杆件的弹塑性屈曲	61
2.6.1	Jegek 解析法	61
2.6.2	数值积分法	66
2.7	压弯杆件平面内稳定理论在工程中的应用	71
2.7.1	冷弯薄壁型钢杆件的设计公式	71
2.7.2	钢结构中压弯杆件的设计公式	72
第三章	各类变截面压杆的稳定性、解析解与近似解	77
3.1	用静力平衡法求解各类变截面压杆的临界荷载	77
3.1.1	在变截面处作用有轴向集中力的简支压杆	77
3.1.2	一级台阶柱的临界荷载	80
3.1.3	塔式起重机双拉杆水平吊臂在回转方向的稳定性	82
3.1.4	变截面桁架柱的稳定性	85
3.1.5	具有抛物线型弦杆的对称柱	91
3.1.6	长细液压油缸的稳定性	92
3.1.7	均布轴向荷载作用下的压杆	95
3.2	用初始参数法求多级台阶柱的稳定性	97
3.3	能量法	101
3.3.1	能量法的基本原理	101
3.3.2	直接近似法	104
3.3.3	Ritz-Timoshenko 法	105
3.3.4	Galerkin 法	110
3.4	有限差分法	113
3.5	渐进法	119
3.6	有限单元法	123
3.6.1	单元刚度矩阵	124
3.6.2	结构刚度矩阵与杆件屈曲条件	126
第四章	刚架与连续梁的稳定	132
4.1	用微分方程方法求解刚架的稳定性	132
4.2	台阶柱门式刚架的屈曲荷载	134
4.3	转角-位移法基本方程的推导	136
4.4	用转角-位移法求解刚架稳定性实例	146

4.5	单层框架的平面内屈曲	149
4.5.1	单层框架的对称屈曲	149
4.5.2	单层框架的反对称屈曲	150
4.6	双层框架的平面内屈曲	153
4.6.1	双层框架的对称屈曲	154
4.6.2	双层框架的反对称屈曲	155
4.7	多层多跨刚架的屈曲	157
4.7.1	多层刚架的对称屈曲	157
4.7.2	多层刚架的反对称屈曲	160
4.8	连续梁的屈曲	163
4.8.1	刚支座的三弯矩方程	163
4.8.2	弹性支座的三弯矩方程	164
4.8.3	框架梁的三弯矩方程	166
4.9	塔式起重机塔柱与吊臂的屈曲	167
4.9.1	塔式起重机塔柱附着支撑为刚性支撑时的屈曲荷载计算	167
4.9.2	塔式起重机塔柱附着支撑为弹性支撑时的屈曲荷载计算	170
4.9.3	塔式起重机水平吊臂平面内屈曲荷载的计算	173
4.9.4	塔式起重机水平吊臂平面外屈曲荷载的计算	176
4.10	桁架梁中压杆的屈曲	180
4.10.1	桁架梁中交叉腹杆的屈曲	180
4.10.2	上承式桁架腹杆的屈曲	182
4.10.3	K型竖杆的屈曲	183
4.10.4	敞开式桥上弦杆的侧向屈曲	185
第五章	开口薄壁杆件的稳定	190
5.1	开口薄壁杆件的约束扭转	190
5.2	轴心受压杆件的弹性扭转屈曲	202
5.2.1	轴心受压杆件的弹性扭转屈曲荷载	202
5.2.2	残余应力对扭转屈曲荷载的影响	207
5.2.3	杆件两端边界条件的影响	209
5.3	轴心受压杆件的弯扭屈曲	210
5.3.1	单轴对称截面轴心受压杆件弯扭屈曲的平衡方程	210
5.3.2	两端简支轴心受压杆件的弯扭屈曲荷载	211
5.3.3	两端固定的轴心受压杆件的弯扭屈曲荷载	212
5.3.4	不对称截面轴心受压杆件的弯扭屈曲荷载	213
5.4	压弯杆件的弯扭屈曲	217
5.5	用能量法求任意截面压弯杆件的弯扭屈曲荷载	223

5.6	纯弯杆件的弹性弯扭屈曲	230
5.6.1	杆件两端简支	231
5.6.2	杆件两端固定	233
5.6.3	悬臂杆件的纯弯曲	233
5.7	端弯矩不等时薄壁杆件的侧向弯扭屈曲	236
5.8	在横向荷载作用下薄壁杆件的弯扭屈曲	237
5.8.1	横向均布荷载的情况	238
5.8.2	横向集中荷载的情况	239
5.9	薄壁杆件的弹塑性屈曲	242
5.9.1	近似法	243
5.9.2	数值算法	243
5.10	开口薄壁杆件稳定理论在钢结构设计中的应用	247
5.10.1	考虑压弯杆件弯扭屈曲的设计公式	247
5.10.2	钢结构构件的整体稳定系数	250
第六章	拱的稳定	257
6.1	曲杆平面弯曲的基本方程	257
6.1.1	力的平衡方程	257
6.1.2	曲杆变形的几何关系	258
6.1.3	曲杆弯曲的基本方程	259
6.2	圆拱在均匀法向荷载作用下的屈曲	260
6.2.1	圆拱的平面内屈曲方程	260
6.2.2	各类边界条件下圆拱的屈曲	261
6.3	任意拱轴线按挠度理论的基本方程	267
6.4	用差分法求抛物线拱的屈曲荷载	274
6.5	用转角-位移法求抛物线拱的临界荷载	279
6.6	拱在平面内的计算长度	282
6.6.1	圆拱的计算长度	282
6.6.2	抛物线拱的计算长度	283
6.7	扁拱的平面内屈曲	285
6.8	拱的侧倾稳定平衡方程	287
6.8.1	拱侧倾的变形几何关系与平衡方程	288
6.8.2	侧倾时拱轴的不伸缩条件	290
6.9	圆弧拱的侧倾屈曲	291
6.9.1	圆弧拱在均布径向荷载作用下的侧倾屈曲	291
6.9.2	圆弧拱两端受大小相等、方向相反力偶作用时的侧倾	295

6.10	等截面圆弧拱的“非保向力”效应	296
6.11	系杆拱的侧倾	298
第七章	薄板的稳定	302
7.1	薄板小挠度变形的平衡方程	302
7.2	单向均匀受压时薄板的临界荷载	307
7.3	用能量法求解薄板的屈曲荷载	309
7.4	剪应力作用下四周边简支板的屈曲	314
7.5	单向非均匀受压简支板的屈曲	316
7.6	组合应力作用下板的屈曲	319
7.6.1	纯弯曲应力与剪应力联合作用时的相关方程	319
7.6.2	单向均匀压应力与剪应力联合作用时的相关方程	320
7.6.3	单向线性分布压应力与剪应力联合作用时的相关方程	321
7.6.4	临界换算应力	321
7.7	板的有限挠度理论(大挠度理论)	322
7.7.1	平衡方程	322
7.7.2	变形协调方程	324
7.8	单向均匀受压四周简支板的屈曲强度	326
7.9	薄板的弹塑性屈曲	331
7.9.1	单向受压板的弹塑性屈曲	331
7.9.2	受组合应力作用板的弹塑性屈曲	334
7.10	薄板稳定理论在钢结构设计中的应用	335
7.10.1	轴心压杆中的板件	336
7.10.2	受弯杆件中的板件	338
7.10.3	压弯杆件中的板件	340
参考文献		345

第一章 轴心压杆的稳定

1.1 概 述

工程构件诸如房屋的柱、悬索桥、斜拉桥的塔、塔式起重机的立柱、桁架梁的上弦杆等工作时均处于受压状态。L. Euler(1707~1783)早在 1774 年就研究了压杆的变形。他发现当轴向压力增大到某一数值之前,杆仍可以保持直线平衡状态。若此时有一小小的外力对杆加以干扰,使之产生微小的弯曲变形,一旦干扰消失,变形也随之消失。但当轴压力大到某一特定值时,由任何附加外力所产生的弯曲变形,在其外力取消后弯曲变形仍继续存在,甚至还有增加的趋势。直杆这种受力变形现象叫失稳,或称作杆发生了屈曲。

工程结构是不允许失稳的。19 世纪欧洲有几座敞开式桁架桥(如 1875 年的 Кевля 河桥)因发生失稳造成了桥梁破坏。20 世纪也发生过桥梁失稳的事故,如 1925 年前苏联 Мозыр 桥斜腹杆失稳造成了破坏。工程构件的失稳破坏并不是因为材料的强度不够,根本原因是杆件的长细比过大,这属于杆件自身的几何特征问题。正是这个原因,虽然近年来许多高强度低合金钢应用于建筑结构,一些材料的最大强度达 100MPa,但由于结构件截面特征不合要求,失稳现象仍屡有发生,其原因是在设计时忽视了杆的几何特征造成的不利因素。近几十年来,研究结构的失稳已发展成结构力学的一个重要分支——结构稳定理论。

工程构件失稳可分成两大类:第一类失稳是分叉失稳;第二类失稳为极值点失稳。

对一个两端简支的轴心受压杆件,在轴压力 P 的作用下,当荷载 P 小于某个特定值 P_{cr} 时,杆不发生弯曲变形,仍保持直线状态。当荷载 $P=P_{cr}$ 时,杆的平衡既可能呈直线状态,也可能呈曲线状态,由于直线状态是不稳定的,杆弯曲成曲线状态,挠度 Δ 会随 P 的增加迅速增大,变化的路线如图 1.1(b)的 OAB 。图中 OA 为直线平衡形式, AB 与 AC 为曲线平衡形式。当轴向压力大到 P_{cr} 时,直线形式的平衡向曲线形式的平衡转变,对于简支杆而言,左右两个方向均可以弯曲。因此 $P-\Delta$ 曲线既可向左,也可向右,在 A 点形成分岔,这种失稳形式称为分岔失稳。分岔失稳的轴压力称为临界荷载 P_{cr} 或称 Euler 荷载 P_E 。像简支梁、均匀径向荷载作用下的圆环以及窄梁的侧向屈曲均属于这类失稳。

图 1.1(b)中的曲线 2,即 CAB 为理想轴心压杆按照大挠度理论得到的荷载变形曲线,1 为按 Euler 小挠度理论得到的临界荷载曲线。实际的压杆与理想轴心压

杆不同,由于存在作用力的偏心,预先在杆内产生了弯矩,杆一旦受压就会发生弯曲,或者杆存在初弯曲,因此实际的荷载变形曲线如 3、4 曲线。当压力 P 尚未达到临界值 P_E 时,它们就开始了屈曲。由于初偏心与初弯曲的方向是一定的,所以变形方向也一定。因此,对这类杆说,并不存在分岔失稳,但由于曲线 3 趋近于直线 1,因此实际研究仍把它们当作分岔失稳来对待。

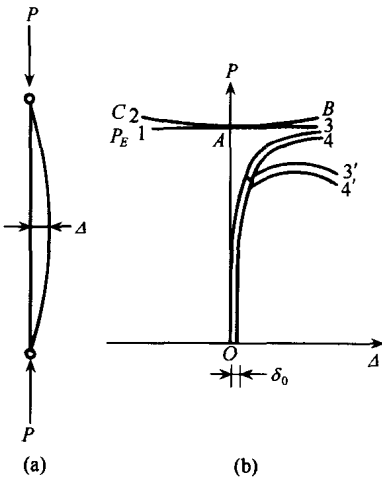


图 1.1 压杆变形的 $P-\Delta$ 曲线

对某一类杆,他们的长细比较小,在轴向力尚未达到临界荷载时,由于初偏心与初弯曲的存在,杆受压的一侧已达到了屈服点,这时材料的弹性模量急剧下降,变形迅速增大,但在塑性区扩大的阶段,压力 P 与变形 Δ 的变形曲线仍有向上的趋势,即曲线此时的斜率为正。随着塑性区加大,曲线的斜率逐渐变小至最后变为零。如(b)图中的 3'、4' 曲线。随后结构就失去了支撑刚度,曲线 3'、4' 的极小值称为极值点,也叫极限荷载和压溃荷载。这一类失稳形式称为第二类失稳,也叫极值失稳,习惯上用 P_0 表示。

工程杆件实际发生的失稳绝大多数属于第二类失稳。如前所说,由于第一类失稳力学状态简单明确,研究方便,因此常把第二类失稳用第一类失稳来处理。第一类失稳是理想失稳状态。为什么会发生这类情况呢? Salvadori 和 Heller 在 1963 年出版的《建筑结构》^[31]中写道:“一根细长柱子,在端部荷载作用下受压时要缩短,与此同时,荷载位置降低;荷载要降低位置的趋势是一个基本的自然规律。每当在不同线路之间存在着一选择时,一个物理现象将按最容易的线路发生,这是另一个基本的自然规律。而对弯出去还是缩短的选择,对柱子发现,当荷载相当小的时候,缩短容易些;当荷载大到某一数值,弯出去比较容易。换何话说,当荷载达临界值时,用弯曲的办法来降低荷载位置要比用缩短的办法更容易些。”

分析结构稳定的基本方法有平衡法、能量法与动力法三种。从图 1.1 可知,当 $P=P_E$ 时,只要有一个小小的外力干扰,原来的平衡位置 OA 就偏离到新的平衡位置。平衡法就是先假定杆件发生了一个微小的变形,通过变形后杆内力与外力产生弯矩的平衡建立杆的平衡微分方程。它的解必须满足杆的一组齐次线性方程组,为求得非零解,待定系数的系数行列式应为零。从这个关系中所求得的最小的临界荷载就是分岔点的值 P_E 。

能量法的基本原理是:当杆在外力作用下发生变形,杆便产生了应变势能,这部分势能又称内力势能,同时轴向力对位移做了功,产生了外力势能。总的势能为内力势能与外力势能之和。根据势能驻值原理,当杆处于平衡状态时,其总势能的

一阶变分为零,由变分学可推导出杆的平衡方程,再由平衡方程可求得临界荷载。这样得到的仍是第一类失稳的临界荷载。从这个意义上说,用能量法求解与用平衡法求解从解析的意义上是相同的,在稳定理论中,能量法是近似计算临界荷载的一个重要手段。能量法的基本原理是假定一个满足边界条件的变形曲线,把它代入到总势能的表达式中,若能满足一阶变分为零的条件,这个曲线就是真实的变形曲线。一般假定的变形曲线与实际变形曲线不会一样,于是常用满足边界条件的一组曲线的线性组合来代替变形曲线,把它代入总势能的表达式,一阶变分为零的条件变成了总势能对线性组合的待定系数的偏导数为零的条件,由此可求出待定系数的线性方程组,待定系数有非零解的条件为其系数行列式为零。从这个条件求得的最小荷载即为临界荷载。

变形曲线 $y=y(x)$ 是 x 的函数,总势能又是 y 的函数,数学上称之为泛函数,即表示函数的函数。与函数的极大极小值一样,当用总势能表示的泛函数的二次变分大于零时,则变形曲线为使总势能为最小值的稳定平衡状态,若二次变分小于零,则平衡状态是不稳定的;当二次变分等于零,平衡为随遇平衡。

动力法的基本原理是:若杆在轴力的作用下处于平衡状态,当它受到微小力的干扰时,便产生了自由振动。若振动是收敛的,则杆处于稳定平衡状态;若振动是发散的,则杆处于不稳定状态,能使杆件振动收敛的最大轴向力即是临界力。动力法属于结构动力学的范畴,用在这里求临界荷载是把静力平衡作为动力平衡的一种特殊情况。

1.2 用静力法计算理想中心压杆的临界荷载

所谓理想中心压杆是指压杆应满足下面几个条件:

- (1) 两端为简支,截面为双轴对称截面,轴向力作用在形心上,屈曲时杆只发生弯曲,不发生扭转。
- (2) 杆内无初应力。
- (3) 材料服从 Hooke 定律。
- (4) 临界状态时的变形为小变形,变形曲率可近似用 $y'' = \frac{1}{\rho}$ 代替。

这样的理想中心压杆也称 Euler 柱。Euler 第一个研究柱的稳定,并用数学形式建立了杆的变形方程。他在 1759 年发表的“关于柱的承载能力”中推导了变形方程

$$C \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

求出了临界荷载的数值,并说明了 C 的量纲为长度平方与力的乘积。

图 1.2 为理想中心压杆的变形图。(b) 图为轴长为 x 处的一小段隔离体,由其

可建立力矩平衡方程

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Py \quad (1.1)$$

式中, E 为材料弹性模量, I 为截面惯性矩。令 $k^2 = \frac{P}{EI}$, 式(1.1)可改写成

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (1.2)$$

它的通解为

$$y = A \cos kx + B \sin kx \quad (1.3)$$

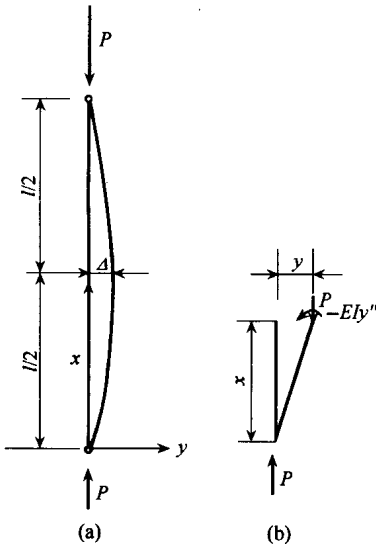


图 1.2 理想中心压杆变形图

由边界条件 $x=0, y=0; x=l, y=0$, 有

$$A + B \cdot 0 = 0$$

$$A \cos kl + B \sin kl = 0$$

由于小变形成立, A, B 不能同时为零, 因此稳定性条件可以系数行列式为零求得, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos kl & \sin kl \end{vmatrix} = 0$$

最后有

$$\sin kl = 0$$

$$kl = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

临界荷载为使上式为最小的值, 即 $n=1$ 时

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1.4)$$

这就是两端铰接的理想中心压杆屈曲的临界荷载。临界荷载又称屈曲荷载, 但为了从物理意义上更为明确, 临界荷载是指理想中心压杆的第一类失稳的分岔值, 而屈曲荷载是指非理想压杆的极限荷载。式(1.4)也称 Euler 荷载, 今后均用 P_E 表示。

1.3 弹性支承轴心压杆的稳定

许多实际工程压杆的端部既不是铰接, 也不是固定, 而是介于铰接与固定之间, 即所谓弹性支承的轴心压杆。例如图 1.3(a) 为下端固定, 上端有一长链杆支撑, 当竖杆在轴压力作用下屈曲变形时, 上部链杆也会产生位移, 链杆受轴向力压缩, 就好像一个弹簧一样。这里可取弹性常数 $k = \frac{EA}{l_b}$ 。又如图 1.3(b) 所示的 Γ 形刚架, 上部与一水平杆刚性连接, 当竖直杆屈曲变形时, 水平杆除去有轴向变形产

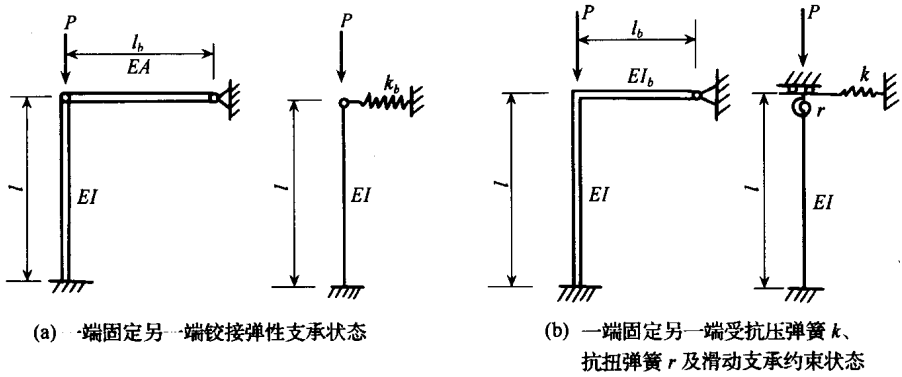


图 1.3 弹性支承压杆

生水平位移外, \$\Gamma\$ 刚架的角点还会发生转动, 因而在杆的上端除去有一水平弹簧约束, 还有一抗扭弹簧约束, 其抗扭刚度为 $\frac{dM}{d\theta} = \frac{3EI_b}{l_b}$ 。计算简图如图 1.3(b) 的右图。

由材料力学知道, 对不同的边界条件所建立的二阶微分方程是不相同的。然而, Timoshenko 指出, 一个四阶微分方程可适应任何边界条件的求解。下面就来推导这个方程。图 1.4 给出了杆的一段微元, 两端的水平力各为 Q_x 与 $Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx$, 微元两端的弯矩为 M_x 与 $M_x + \frac{dM_x}{dx} dx$, 其正号是使杆向内凹。由水平力的平衡有

$$Q_x - \left(Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx \right) = 0$$

或

$$\frac{dQ_x}{dx} = 0 \quad (1.5)$$

由力矩的平衡有

$$M_x + Pdy + Q_x dx - \left(M_x + \frac{dM_x}{dx} dx \right) = 0$$

或

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} - P \frac{dy}{dx} \quad (1.6)$$

对上式微分一次, 并注意到式(1.5)的结果

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} - P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

又由于 $M_x = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$, 代入上式后

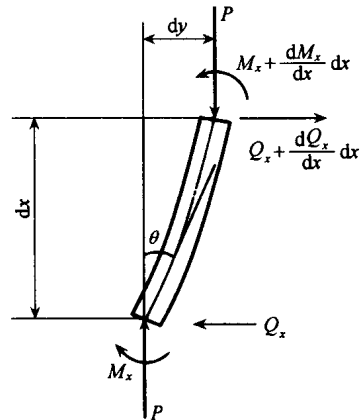


图 1.4 压杆微元的平衡

$$EIy^{(4)} + Py'' = 0 \quad (1.7)$$

或

$$y^{(4)} + k^2 y'' = 0 \quad (1.8)$$

由式(1.6)水平剪力为

$$Q_x = - (EIy''' + Py') \quad (1.9)$$

或

$$Q_x = - EI(y''' + k^2 y') \quad (1.10)$$

式(1.8)的解为

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 \\ y' &= C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx + C_3 \\ y'' &= -C_1 k^2 \sin kx - C_2 k^2 \cos kx \\ y''' &= -C_1 k^3 \cos kx + C_2 k^3 \sin kx \\ M_x &= -EIy'' = C_1 P \sin kx + C_2 P \cos kx \\ Q_x &= -PC_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

有了上面的表达式,即可从杆端的几何边界条件与变形协调关系建立变形约束方程。

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ 铰接端} \\ y=0 \quad M_x=0 \quad y''=0 \\ (2) \text{ 固定端} \\ y=0 \quad y'=0 \\ (3) \text{ 自由端} \\ M_x=0 \text{ 或 } y''=0 \quad Q_x=0 \text{ 或 } y''' + k^2 y' = 0 \\ (4) \text{ 上端只有平移的弹性约束} \\ y''(l)=0 \quad Q(l) = -PC_3 = -k_b y(l) \\ (5) \text{ 上端只有转动的弹性约束} \\ y(l)=0 \quad M(l) = -EIy''(l) = -r_b y'(l) \\ (6) \text{ 上端有平移同时又有转动的约束} \\ -C_1 P = -k_b y(l) \quad -EIy''(l) = -r_b y'(l) \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

由杆件四个独立的边界条件可建立四个线性方程组

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

要得到上面线性方程组的非零解,其系数行列式必须为零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

由于 a_{ij} 中已含有力 P , 通过求解式(1.13)可得到临界荷载 P_{cr} , 它是式(1.13)解中的最小值。

【例 1.1】 求图 1.5 所示下端铰接、上端弹性支承杆的临界荷载。

解: 由式(1.11)

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$$

当 $x=0$ 时, $y=0$ 有

$$C_2 + C_4 = 0$$

当 $x=0$ 时, $y''=0$ 有

$$C_2 = 0 \quad \text{所以 } C_4 = 0$$

$$y = C_1 \sin kx + C_3 x$$

当 $x=l$ 时, $Q(l) = -PC_3 = -k_b y(l)$, 有

$$k_b C_1 \sin kl + (k_b l - P) C_3 = 0$$

又 $x=l$ 时 $y''=0$, 即

$$C_1 k^2 \sin kl = 0$$

稳定性条件为 C_1, C_3 的系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} k^2 \sin kl & 0 \\ k_b \sin kl & k_b l - P \end{vmatrix} = 0$$

或

$$k^2 \sin kl (k_b l - P) = 0$$

上面的方程有两个解: 当 $\sin kl = 0$ 时 $P_{cr} = \pi^2 EI / l^2$, 此时竖杆屈曲成正弦曲线。若 $k_b l - P = 0$, 则竖杆像刚杆一样偏移 $y = C_3 x$ 。

比较两个临界荷载, 令其相等, $k_b l = \pi^2 EI / l^2$, 若 $k_b < \frac{\pi^2 EI}{l^3}$, 则杆为刚性侧移屈曲; 若 $k_b > \frac{\pi^2 EI}{l^3}$, 则杆发生了正弦曲线那样的屈曲。

【例 1.2】 求图 1.3(a)的临界荷载。

解: 仍按式(1.11), 由 $x=0, y=0$, 有

$$C_2 + C_4 = 0$$

由 $x=0, y'=0$, 有

$$C_1 k + C_3 = 0$$

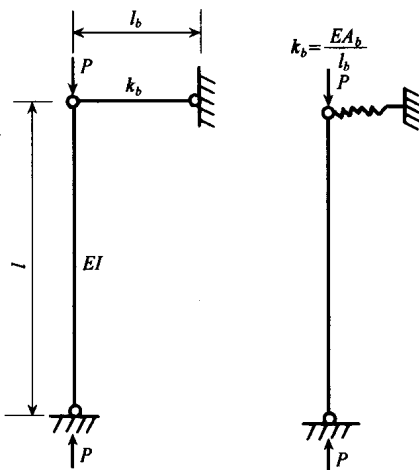


图 1.5 下端铰接、上端为弹性支承的压杆