随机振动的虚拟激励法

林家浩 张亚辉 ▶ 著

$$\tilde{x}(t)=\sqrt{S_{xx}}\,e^{i\omega t}$$

$$\left[S_{xx}(\omega)\right]=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\{\psi\}_j\{\psi\}_j^{*T}$$

科学出版社
www.sciencep.com

随机振动的虚拟激励法

林家浩　张亚辉　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍了由作者首创的随机振动"虚拟激励法"系列。全书共分十章。除第一章扼要地介绍随机振动的基础知识外,后九章几乎全部渗透了作者与其合作者结合虚拟激励法的研究成果(也介绍了各领域学者应用和发展虚拟激励法的成果)。第二、三章介绍平稳、非平稳随机振动的虚拟激励法原理;第四、五章介绍精细积分、辛代数与虚拟激励法的结合应用;第六、七章介绍虚拟激励法在地震工程、风工程、海洋工程、汽车工程等领域的应用;第八章介绍结构参数与荷载参数同时具有随机性的"双随机问题"虚拟激励法;第九章介绍用"逆虚拟激励法"处理随机荷载的识别问题(随机振动反问题);第十章介绍虚拟激励法在非线性随机振动分析中的应用。

作者用尽量通俗易懂的语言和数学工具来阐述历来被认为是比较抽象难懂的随机振动原理和方法;由浅入深,辅之以大量有助于理解消化和实际应用的例题,使本书不但具有新颖的学术思想,也具有较高的实际应用价值。

本书可供土建、水利、车辆和船舶制造、航空航天工业、海洋平台建造等许多工程领域的大学高年级本科生、研究生、教师以及科技人员和工程设计人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机振动的虚拟激励法/林家浩,张亚辉著.—北京:科学出版社,2004

ISBN 7-03-012700-5

Ⅰ.随… Ⅱ.①林…②张… Ⅲ.随机振动-激励理论 Ⅳ.O324

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 002304 号

责任编辑:吕 虹 田士勇/责任校对:刘小梅

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年9月第一次印刷 印张:18 1/2

印数:1-3 000 字数:345 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序　一

力学能为科学技术的进步发挥重要作用，靠的是它的理论、实验和计算三个方面的工作。在前计算机时代，计算是个瓶颈。很多问题就是卡在计算上，得不到实际所必需的数值答案，造成研究进展缓慢，这是大家深有体会的。虽然 50 年前电子计算机问世提供了先进计算设备，但要真能解决各种困难问题，还必须有新的思想、新的计算方法和相应的软件，于是自然形成了计算力学这门新的学科。40 多年来，计算力学确实有所进展，解决了不少问题。

这本书研究的是自然界的随机激励，如地震、风、浪等作用下工程结构的响应分析。作者林家浩教授 20 年来在刻苦治学之道中，蓦然回首，忽有所悟，发现一种“虚拟激励”可以将平稳随机振动分析转化为简谐振动分析，不仅计算效率有数量级的提高，而且保证了理论上的精确性。在这个契机上，又发展到非平稳、多点的随机振动分析中。这真是天道酬勤，工夫不负有心人。现在这种方法已为国内学者用在很多工程上，其成功在国际交流中也颇出人意料。美国 CRC 出版社决定近期出版《振动与冲击手册》(*Vibration and Shock Handbook*（新版）)，其主编 Clarence de Silva 教授邀请林家浩教授撰写“大跨度结构的随机振动”一章。这项研究成果值得我们力学工作者关注。

钱令希

序　　二

《随机振动的虚拟激励法》一书不同于以往出版的诸多有关随机振动的学术专著。这是一本介绍我国计算力学工作者在该领域系统的创新性成果及其在多个工程领域被实际应用的学术专著。

作者于1980年赴美国普林斯顿大学作访问学者期间,对于随机振动的广阔应用前景及计算效率严重低下的现状有了深刻的认识。回国后,他潜心于该问题的研究近20年,多次得到国家自然科学基金委员会和英国皇家学会资助,以其灵机启发的全新思路建立了随机振动分析的高效精确"虚拟激励法"系列。目前该成果已经在工程界得到日益广泛的应用。这本书是他系统总结这项成果的第一本专著。

虚拟激励法的最大特点是将平稳随机振动分析转化为简谐振动分析,将非平稳随机振动分析转化为确定性时间历程分析,从而使计算步骤大大简化,却仍保持了理论上的精确性。以往被认为复杂难懂的随机振动理论成为易于理解和实际应用的工具。对于复杂问题,计算效率提高达2～4个数量级,打破了多年来束缚随机振动理论工程应用计算效率极其低下的瓶颈。迄今已经在许多工程领域使长期以来未能解决的一系列难题取得了突破性的进展。例如在处理大跨度桥梁或水坝抗震时,必须考虑地面运动的非均匀性。以前在求解高阶随机微分方程时,碰到难以逾越的困难。近年来,我国一些著名学者应用虚拟激励法并加以发展,使困难得到解决,有力地推动了相关研究和工程应用的发展。虚拟激励法还被应用于大型桥梁的风激随机振动计算,汽车振动控制及优化设计,海洋平台波浪响应分析,子结构链中随机波传播的局部化现象研究等等。其中涉及的不少复杂随机振动计算在以前是很难实施的,现在借助于虚拟激励法已经可以在普通微机上从容应对了。虚拟激励法还可能推动随机振动理论研究向更广阔深入的领域发展,例如随机荷载识别问题(随机振动反问题),随机结构的随机振动问题(双随机问题),非线性随机响应分析问题等等。虚拟激励法不但思想新颖,而且十分实用。它在大大推动随机振动理论成果在实际工程中应用的同时,又反过来推动了随机振动理论研究的发展。成为近年来一项令人瞩目的学术成果。

序者近年来与林家浩教授在中美两国科学基金会资助下,三次访美,在多所国际一流大学发表学术演讲,并与许多世界著名的同行教授深入交流。林教授对上述困难问题的成功解决,特别是我国多个工程领域的几十位著名专家放弃了在该领域沿用多年的传统计算方法,转而应用由我们中国学者自己研究出的高效虚拟

激励算法,解决了许多一直困扰工程界的实际问题,使他们深感意外。

本书绝大部分内容是国内外各种有关随机振动的专著中所没有的最新研究成果,包括了虚拟激励方法在结构受单点/多点、平稳/非平稳、完全相干/部分相干、均匀调制/非均匀调制随机激励下的快速计算方法,以及与精细积分、辛几何的有机结合等。书中还列举了多个工程领域专家对虚拟激励法的成功应用,并包含大量示范性例题,讲解深入浅出。本书不但是一本有特色的学术专著,也是对许多领域工程技术人员有实用价值的参考书。

钟万勰

前　言

基于概率论的结构动力分析方法在近代工程分析中占据了日益重要的地位。作者 1980 年在普林斯顿大学访问期间，曾研修与工程随机分析相关的研究生课程。回国后致力于该问题的研究近 20 年，以新的思路建立和逐步发展了随机振动分析高效精确的“虚拟激励法”系列。该方法由起初不太为人理解到逐渐在工程界得到日益广泛应用，在国内外学术界也得到了较高的评价。近年来，作者更就本项成果在美、英、法、德、意、日等国的 30 多所大学和工程单位介绍了这项成果，引起了广泛的重视和积极的反响。

本书是系统介绍虚拟激励法的专著。全书共分十章。第一章扼要介绍关于随机振动的基础知识；第二、三章介绍平稳、非平稳随机振动的虚拟激励法原理；第四、五章介绍精细积分、辛代数与虚拟激励法的结合应用；第六、七章介绍虚拟激励法在地震工程、风工程、海洋工程、汽车工程等领域的应用；第八章介绍结构参数与荷载参数同时具有随机性的“双随机问题”虚拟激励法；第九章介绍用“逆虚拟激励法”处理随机荷载的识别问题（随机振动反问题）；第十章介绍虚拟激励法在非线性随机振动分析中的应用。

本书除第一章介绍本学科的基本概念和传统理论方法之外，第二至十章主要反映了作者与合作者近十几年来的研究成果。书中也介绍了其他学科和工程领域的专家学者在应用和发展虚拟激励法过程中所取得的成就。

随机振动这门学科历来被认为是比较抽象难懂的。本书不拘泥于严谨的数学论证，而是更着力于物理概念和计算力学方法的阐述。尽量用通俗易懂的语言和数学工具来阐明随机振动的原理和方法，由浅入深，辅之以大量有助于理解消化和实际应用的例题。其目的是使这门极其有用的近代力学理论更容易融入到广泛的工程应用中去。

在本书相关内容的研究和全书写作过程中，钱令希、钟万勰、程耿东院士始终给予了多方面的指导和热情鼓励与支持，帮助作者克服了许多困难。他们在多个领域的深邃见解和融会贯通，常令作者茅塞顿开。作者正是得益于他们无微不至的关心和支持，才使这项研究成果得以日臻成熟。

本书的写作也得到了张文首教授，岳前进教授，孙东科、智浩、赵岩、刘高等博士的许多帮助。

由于书中许多内容是新近的研究成果，恐尚欠锤炼，加之作者的水平十分有

限,必有不少疏误之处。诚恳地希望专家和读者给予指正。

虚拟激励法的研究连续五次得到国家自然科学基金的资助(编号 18972017,19342003,19332030,19772009,10072015),还得到了国家博士研究专项基金,国家重点基础研究专项("973")经费(编号 G1999032805)和英国皇家学会的资助,作者在此一并表示衷心感谢。

林家浩

2003 年 8 月于大连理工大学

目　　录

第一章　随机振动基础知识

在随机振动这门学科中，无论是荷载（输入）还是响应（输出），有时候还包括结构参数，都要用概率统计方法来描述和分析。本章叙述随机振动理论在工程应用中最经常用到的有关概率统计的基本概念与基础知识[1,2]。

1.1　随机变量与随机过程

1　随机变量的概念

随机变量（random variable）是随机现象的数量化描述。它的取值随偶然因素而变化，但是又遵从一定的概率分布规律。随机变量按其取值的不同，可分为离散型和连续型两大类。

离散型随机变量（discrete random variable）是指可能的取值能够一一列举出来的（有限个或可列无限个）随机变量。如掷一枚骰子，所得到的点数 X 就是一个离散型的随机变量，X 的可能取值为：1、2、3、4、5、6。

连续型随机变量（continuous random variable）是指取值范围不能一一列举，而是连续取值的随机变量。如从一批灯泡中任取一个，在指定的条件下做寿命实验，则灯泡的寿命 X 就是一个连续型的随机变量。X 可取区间 $[0,T]$ 上的一切值，其中 T 是某个正数。

2　概率密度函数和概率分布函数

设 X 为离散型随机变量，可能的取值是 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$，取各可能值的**概率**（probability）为

$$p_i(x_i)=P(X=x_i)\qquad(i=1,2,\cdots)\tag{1.1.1}$$

则称 $p_i(x_i)(i=1,2,\cdots)$ 为 X 的**分布（律）列**或**概率分布**（probability distribution）。

对于连续型随机变量，应研究 X 落在某一区间上的概率，而不是某一可能值的概率。称连续型随机变量 X 落在区间 $[x,x+\Delta x]$ 内的概率与区间长度 Δx 之比

$$\frac{P(x\leqslant X<x+\Delta x)}{\Delta x}$$

为**平均概率密度**（average probability density）。如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x} = p(x) \tag{1.1.2}$$

存在,则函数 $p(x)$就描述了X 在点x 的概率分布的密集程度,故称 $p(x)$为随机变量X 的**概率密度函数**(probability density function)。则随机变量 X 落在某一区间$[a,b)$内的概率为

$$P(a \leqslant X < b) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.3}$$

给定一随机变量 X(无论是离散型的还是连续型的),其取值不超过 x(为任一实数) 的事件的概率 $P(X \leqslant x)$是x 的函数,称为 X 的**概率分布函数**(probability distribution function),记作 $F(x)$

$$F(x) = P(X \leqslant x) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{1.1.4}$$

显然,离散型随机变量的分布函数是阶梯形函数。对于连续型随机变量,其分布函数可以表达为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.1.5}$$

概率分布函数有如下性质:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

(2) 概率分布函数是单调上升的;

(3) 其左极限($x \to -\infty$ 时) 为 0,而右极限($x \to +\infty$ 时) 为 1;

(4) 对于连续型随机变量,有

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) \tag{1.1.6}$$

图 1.1(a) 和(b) 是概率密度函数 $p(x)$和概率分布函数$F(x)$的典型的形状。

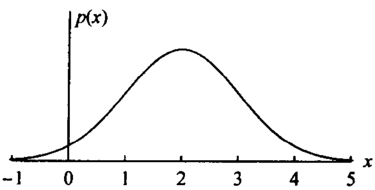

图 1.1(a)　概率密度函数 $p(x)$

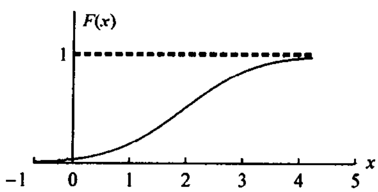

图 1.1(b)　概率分布函数 $F(x)$

3　多个随机变量

在实际问题中常常遇到必须同时考虑两个或两个以上随机变量的情况。例如炮弹在地面上命中点的位置,要由平面上的坐标,即一对随机变量 X、Y 来描述。又如,在下文中将要介绍的随机过程就是一个随机变量族。多维随机变量需要用

联合概率函数描述。

首先考虑两个随机变量 X、Y 的联合性质。X、Y 的**联合概率分布函数**(joint probability distribution function) 定义为

$$F(x,y)=P(X\leqslant x;Y\leqslant y) \tag{1.1.7}$$

对于连续型随机变量 X、Y 的**联合概率密度函数**(joint probability density function) 定义为

$$p(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y) \tag{1.1.8}$$

则

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.1.9}$$

若 X、Y 是独立的,则有

$$p(x,y)=p(x)p(y) \tag{1.1.10}$$

两个随机变量的联合分布可直接推广到多个随机变量。n 个随机变量的联合概率密度函数为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}F(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1.11}$$

4 随机变量的数字特征

随机变量的分布函数能完整地描述随机变量的概率分布。然而在实际问题中,求随机变量的分布函数往往不是一件容易的事情。因此,去寻求能够表征随机变量的某些非随机性的数字特征有着重要的实用意义。随机变量的这些数字特征包括均值、方差及相关系数等等。

1) 数学期望(均值)

数学期望(expected value) 或**均值**(mean value) 描述了随机变量取值的平均值。

对于离散型随机变量 X,数学期望表示为

$$E[X]=\mu=\sum_i x_i p_i \tag{1.1.12}$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 为随机变量 X 可能取的数值,其分布列为 $p_i=P(X=x_i)(i=1,2,\cdots)$。

对于连续型随机变量 X,若其概率密度函数为 $p(x)$,则数学期望表示为

$$E[X]=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1.13}$$

两个连续型随机变量 X 和 Y 乘积的数学期望表示为

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,\mathrm{d}F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (1.1.14)$$

式中 $F(x,y)$，$p(x,y)$分别为随机变量X和Y的联合概率分布函数和联合概率密度函数。

2) *方差*

方差(variance) 描述了随机变量取值与其均值的偏离程度。

对于离散型随机变量 X，方差表示为

$$D[X] = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i \quad (1.1.15)$$

对于连续型随机变量 X，若其概率密度函数为 $p(x)$，则其方差表示为

$$D[X] = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)\mathrm{d}x \quad (1.1.16)$$

σ 称为**标准差**(standard deviation)、**标准离差**或**均方差**(mean square deviation)。

3) *变异系数*

变异系数(coefficient of variation)

$$\xi = \sigma/\mu \quad (1.1.17)$$

是一个无量纲量，在工程中常用以表示随机变量偏离平均值的程度。一般要求$\sigma \ll \mu$。

4) *n 阶原点矩*

对于离散型随机变量 X，**n 阶原点矩**(n-th moment) 表示为

$$m_n = E[X^n] = \sum_i x_i^n p_i \quad (1.1.18)$$

对于连续型随机变量 X，若其概率密度函数为 $p(x)$，则 n 阶原点矩表示为

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\mathrm{d}x \quad (1.1.19)$$

当 $n=2$ 时，$m_2 = E[X^2]$称为**均方值**(mean square value) 或**二阶原点矩**。其平方根称为**均方根值**(mean square root)。

5) *n 阶中心矩*

对于离散型随机变量 X，**n 阶中心矩**(n-th central moment) 表示为

$$K_n = E[(X-\mu)^n] = \sum_i (x_i - \mu)^n p_i \quad (1.1.20)$$

对于连续型随机变量 X，若其概率密度函数为 $p(x)$，则 n 阶中心矩表示为

$$K_n = E[(X-\mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n p(x)\mathrm{d}x \quad (1.1.21)$$

当 $n=2$ 时，$K_2 = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$，因此方差又称为**二阶中心矩**。

6) 协方差与相关系数

设随机变量 X 与 Y 的平均值 μ_X、μ_Y 和方差 σ_X^2、σ_Y^2 都存在,则 X 与 Y 的**协方差**(covariance) $\text{cov}(X,Y)$ 为

$$\text{cov}(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \tag{1.1.22}$$

而 X 与 Y 的**规格化协方差**或**相关系数**(correlation coefficient) 为

$$\rho=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{1.1.23}$$

相关系数为协方差的无量纲化表达。协方差与相关系数是 X 与 Y 之间关系"密切程度"的表征。

平均值与方差有如下几个重要性质:

(1) $D[X]=E[X^2]-(E[X])^2$ (1.1.24)

(2) $E[a]=a, D[a]=0$ 　(a 为常数) (1.1.25)

(3) $E[cX]=cE[X]$ 　(c 为常数) (1.1.26)

(4) $E[XY]=E[X]E[Y]+E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ (1.1.27)

(5) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n 个随机变量,则

$$E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n] \tag{1.1.28}$$

$$D[X_1+X_2+\cdots+X_n]=\sum_{i,j=1}^{n}E\left[\left(X_i-\mu_{X_i}\right)\left(X_j-\mu_{X_j}\right)\right] \tag{1.1.29}$$

(6) 设 $Y=g(X)$ 是随机变量 X 的连续函数,则

(i) 如 X 是离散型随机变量,其分布列是 $p_k=P(X=x_k), k=1,2,\cdots$,且 $\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k$ 收敛,则 Y 的数学期望为

$$E[Y]=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k \tag{1.1.30}$$

(ii) X 是连续型随机变量,其概率密度为 $p(x)$,若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|p(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 Y 的数学期望为

$$E[Y]=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.31}$$

5　几种重要的分布函数

1) 正态分布

客观世界存在的大量现象都是许多随机因素叠加的结果。高斯和拉普拉斯首先观察到并提出了**正态分布**(normaldistribution)或**高斯分布**(Gaussian distribution)在自然界中大量存在的现象;而李雅普诺夫(Lyapunov)则首先通过**中心极限定理**(central limit theorem),从数学上解释了为什么会存在这种现象。该定理表明:互相独立的均匀微小的随机变量的总和近似地服从正态分布律。正态分布的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.1.32}$$

概率分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\xi \tag{1.1.33}$$

正态分布的概率密度函数 $p(x)$ 的形状如一倒钟形(图1.2所示),μ 为曲线顶点的横坐标值,代表随机变量的平均值。σ 代表随机变量的标准差,较小的 σ 对应较窄的曲线,表示随机变量大多数集中于平均值附近。

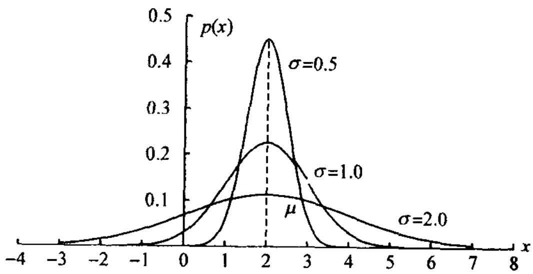

图1.2 正态分布的概率密度函数

正态分布的 n 阶中心矩为

$$K_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^n\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{1.1.34}$$

不难验证①$K_0=1$;②当 n 为奇数时,该积分的值为0;③当 n 为其他偶数时

$$K_2=\sigma^2;\quad K_4=3\sigma^4;\quad K_6=15\sigma^6 \tag{1.1.35}$$

其递推公式为

$$K_n=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n-1)\sigma^n \tag{1.1.36}$$

计算服从正态分布律的随机变量 X 落在区间(α,β)内的概率是经常遇到的

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \tag{1.1.37}$$

作代数变换