新中學文庫

# 數學全書

第三册 解析

韋柏 著
鄭太朴 譯

商務印書館發行

# 數學全書

## 第三册　解析

Von H. Weber 著
鄭太朴 譯

中華民國二十六年三月初版
中華民國三十六年四月二版



(557840)

數學全書 第三冊 解析

Enzyklopädie der Elementarmathematik
Drittes Buch, Analysis

定價國幣肆元
印刷地點外另加運費

原著者　Von H. Weber
譯述者　鄭太朴
發行人　朱經農
印刷所　商務印書館印刷廠
上海河南中路
發行所　商務印書館
各地

(本書校對者王養吾)

# 目　次

## 第 十 九 章

## 無 盡 級 數


§ 116. 收斂與發散 … … … … … … … … 1

§ 117. 收斂之標識 … … … … … … … … 15

§ 118. 有條件的與無條件的收斂 … … … … 28

§ 119. 複項級數 … … … … … … … … … .. 35

§ 120. 無盡級數之運算 … … … … … … … 39


## 第 二 十 章

## 乘方級數 二項式級數


§ 121. 乘方級數之收斂 … … … … … … … 45

§ 122. 乘方級數之連續性 … … … … … … 51

§ 123. 不定係數法 偶函數與奇函數 … … … 57

§ 124. 二項式級數 … … … … … … … … 60


## 第 二 十 一 章

## 指數函數及三角函數


§ 125. 數目 $e$ … … … … … … … … … … 70

§ 126. 指數函數 … … … … … … … … … 75
§ 127. 函數 sin $x$ 及 cos $x$ … … … … … … … 81
§ 128. 柏氏數 tg $x$ 及 ctg $x$ 之級數 … … … … 89
§ 129. 用無盡乘積以表正弦及餘弦 … … … … 97

## 第二十二章

## 自然對數 反三角函數 三角級數

§ 130. 自然對數及廣義乘方 … … … … … … 109
§ 131. 對數級數 … … … … … … … … … 115
§ 132. 反三角函數 … … … … … … … … 123
§ 133. Arc tg 級數及 $\pi$ 之求法 … … … … … … 126
§ 134. 三角級數 … … … … … … … … … 131

## 第二十三章

## $\pi$ 之乘積表法 乘方和數 $\zeta(2n)$ 歐氏常數

§ 135. $\pi$ 之乘積表法 斯氏公式 … … … … … 142
§ 136. 乘方和數 $\zeta(2n)$ … … … … … … … 147
§ 137. 歐氏常數 … … … … … … … … … 153

## 第二十四章

## $e$ 與 $\pi$ 之超絕性

§ 138. 問題之所在 史實 … … … … … … … 160

§ 139. 指數函數之屬性 … … … … … … … 162
§ 140. $e$ 之超絕性 … … … … … … … … 165
§ 141. $\pi$ 之超絕性 … … … … … … … … 170

# 數學全書

## 第三册 解析

## 第十九章 無盡級數

### §116. 收斂與發散

1. 級數係按照規律而構成的數目序列:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots$$

此項數目名爲級數之項. 倘此規律可無限使用,因而對於任何一標數 $n$,可求得其相當之 $a_n$,則此級數謂之無盡者. 今茲所欲論者,姑先以實數所成者爲限.

例如自然數 $1, 2, 3, \cdots\cdots$,實構成一無盡級數,又如算術級數之項 $a, a+b, a+2b, a+3b, \cdots$ 或幾何級數之項 $1, a, a^2, a^3, \cdots$ 或 $1^k, 2^k, 3^k, \cdots\cdots$($k$ 爲任何指數)等數目,均可構成無盡級數.

廣之,吾人亦可將級數之項,視爲一函數之值 $f(\nu)$,於此,其中之變數遍取 $\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 整值[1]. 任何一整數 $n$ 所構

---

註: (1) 因之,變數取整值以外之值時,函數可不確定,例如 $f(\nu)$ 爲第 $\nu$ 個質數.

成之式 $f(n)$ 或 $a_n$ 吾人名之爲級數之普通項.

**2.** 設有一級數

(1) $$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots,$$

則可設

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n,$$

以得一新級數

$$s_1, \ s_2, \ s_3, \cdots\cdots\cdots$$

$s_1, s_2, s_3, \cdots\cdots$ 名爲級數 (1) 之部分和數 (Partialsummen).

吾人今按 §28 內之概念, 作一定義如下:

倘一無盡級數之部分和數, 構成一收斂的數列, 則此級數謂之收斂者.

因之, 倘極限值

(2) $$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

存在, 則級數 (1) 係收斂者. 倘部分和數所成之數列, 無有極限值, 則此級數謂之發散者.

按之 §28 之 **1.**, 吾人可云:

倘有一確定的數目 $S$, 且對於每一已知正數 $\varepsilon$, 可有

一標數$n$,能

$$(3)\qquad |S-s_{n+\nu}|<\varepsilon, \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

則無盡級數(1)爲收斂者.

倘級數爲收斂者,則其極限值$S$名爲級數(1)之和數或值,寫作:

$$S=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots$$

此項寫法之意義,在表明求級數之和時,祇須取其充分多之項,則可隨吾人之意,以與$S$相接近.因之,吾人每可用無盡級數,以求$S$之值,其近似可隨吾人之意爲之,且在事實上,吾人求某種數目或函數之值時,級數往往爲最重要之法門,甚或爲唯一之法門也.

**3.** 略去(1)中首數項而得之級數

$$(4)\qquad a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\cdots$$

名爲(1)之餘級數(Restreihen)[1].此級數之爲收斂或發散,與原級數(1)同.蓋(4)之部分和數爲

$$\sigma_1=s_{n+1}-s_n,\ \sigma_2=s_{n+2}-s_n,\cdots\cdots$$

$$\sigma_\nu=s_{n+\nu}-s_n,\cdots\cdots,$$

故如$\lim\limits_{\nu\to\infty}s_{n+\nu}$存在,即(1)爲收斂時,則$\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma_\nu$亦存在,且僅

註: (1) 無盡級數之收斂或發散雖尚未能決定,但在書寫上,不妨先以和數之形式出之.

於此時方能存在也;此時(4)之和數爲 $\lim\sigma_\nu = S - s_n$. 差數

$$\rho_n = S - s_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

名爲收斂級數(1)之餘數,而按(3),則可知對於任何一正數 $\varepsilon$,可有一標數 $n$,能

$$|\rho_{n+\nu}| < \varepsilon, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

是卽在收斂級數方面,其餘數向極限值 0 收斂.

**4.** 用 §28, **6.** 之定理,吾人可無須先對於 $S$ 有所假定,卽不難決定一級數之收斂性. 蓋

如對於每一正數 $\varepsilon$,可有一標數 $n$,能

$$(5) \qquad |s_{n+\nu} - s_n| < \varepsilon, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

則無盡級數(1)爲收斂者,亦僅於此時方爲收斂者. 但 $s_{n+\nu} - s_n = \sigma_\nu$ 爲餘級數(4)之部分和數:

$$s_{n+\nu} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\cdots + a_{n+\nu},$$

故可得定理如下:

倘對於每一正數 $\varepsilon$,可有一餘級數,其部分和數之絕對值恆小於 $\varepsilon$,則此無盡級數爲收斂者,亦僅於此時方爲收斂者.

**5.** 今試以

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots\cdots$$

爲例[1],其中之分母,係三角數(§56, 3.)所成.此級數亦可如下寫之:

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots\cdots,$$

其普通項爲

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

其部分和數,則爲

$$s_1=1=2\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$s_2=\frac{4}{3}=2\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$s_3=\frac{3}{2}=2\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

廣之,有

$$s_n=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots$$
$$+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

由此可見 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 存在,且

註:(1)此級數爲最初所研究及的無盡級數中之一,Lord Brouncker 已於其 Phil. Trans. (1668) 中及之.

$$\lim s_n = 2,$$

故此級數爲收斂者,其和爲2.吾人於是可寫之作

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots=2.$$

同時,吾人復可見此級數之收斂甚緩,故如欲所得之和,準確至三位小數,其差不及0.0005,則由 $s_n$ 之值,已可見所用之項須至4000之多.

**6.** 試再一論以下之級數:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots,$$

其普通項爲[(1)]

$$a_n=\frac{1}{2^n},$$

其部分和數則爲

$$s_0=1=2-1$$

$$s_1=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$$

$$s_2=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{4}$$

$$s_3=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8},$$

廣之有

註: (1) 此處吾人用 $a_0$ 以表首項,其部分和數則相當的用 $s_0$, $s_1$, $s_2$,……表之.

(6) $$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$=2-\frac{1}{2^n}.$$

由此可知 $\lim s_n=2$, 此級數爲收斂者,而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots=2.$$

由 (6), 吾人復可知推求部分和數時,所至之準確程度可如何.倘欲使級數之和其差小於 $\frac{1}{1000000}$, 則須取21項 $(n=20)$ 用之.

**7.** 上節內所論之級數,實爲一無盡的幾何級數

(7) $$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$$

之特例,其中之 $x$ 可爲任何一實數.按 §20, **11**., 其部分和數 $s_n$ 爲

(8) $$s_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

倘 $x$ 爲一眞分數(正或負), 則 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, 故 $\lim s_n$ 存在,而得如次之定理:

倘 $|x|<1$, 則此無盡級數係收斂者,其和爲

(9) $$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

今如以 $-x$ 代 $x$, 則可知該級數仍係收斂者,而有

$$(9a)\qquad 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots=\frac{1}{1+x}.\qquad (|x|<1)$$

倘 $x\geqq 1$, 則 (7) 之部分和數,卽無極限值,蓋其值可超過任何大之數也.又如 $x<-1$, 則 (8) 中之 $x^n$ 卽無有界限,因而 $s_n$ 亦然,而如 $x=-1$, 則其部分和數交替的爲 1 與 0, 故亦無有極限值可求.因之:

倘 $|x|\geqq 1$, 則此無盡幾何級數爲發散者.

循環小數亦在收斂的幾何級數之範圍內.蓋如

$$\gamma=\{0,\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}\cdots\cdots\}$$

爲一無盡小數,其週期爲 $\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}$, 而其十進寫法之數作

$$\{z_1z_2\cdots\cdots z_f\}=m,$$

則此小數實與以下之級數[1]相同:

$$\gamma=\frac{m}{10^f}+\frac{m}{10^{2f}}+\frac{m}{10^{3f}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{m}{10^f}\left(1+\frac{1}{10^f}+\frac{1}{10^{2f}}+\cdots\cdots\right).$$

此處括弧中卽爲一無盡幾何級數,於此, $x=\frac{1}{10^f}=10^{-f}$, 故

$$\gamma=\frac{m}{10^f}\cdot\frac{1}{1-10^{-f}}=\frac{m}{10^f-1},$$

註: (1) 此處吾人已先用此定理,卽凡收斂之級數,倘用一定數 $c$ 乘其各項,亦仍收斂,且其和亦被 $c$ 所乘;蓋其每一部分和數 $s_n$ 轉成爲 $cs_n$, 而有

$$\lim cs_n=c\lim s_n=cS$$

也 (參觀 § 29, 1.).

此則吾人於§31, 3. 中已以他法求得之矣.

不循環之無盡小數,亦可視之爲無盡級數:

$$\{0, z_1z_2z_3\cdots\cdots\}=\frac{z_1}{10}+\frac{z_2}{10^2}+\frac{z_3}{10^3}+\cdots\cdots \qquad (0\leqq z_i\leqq 9)$$

此級數亦爲收斂者,其部分和數爲§30內用$A_1, A_2, A_3,\cdots\cdots$表出之有盡小數,而用小數所表出之實數$\alpha=\lim A_n$則爲級數之和.

8. 數學家從事於無盡級數以來,爲時已久,但鮮有注意及其收斂及發散者.十八世紀時代所致力者,都爲不收斂之級數,例如公式(9a),實僅可於$|x|<1$之前提下用之但彼時之人則往往於其中設$x=1$或$x=2$,因而求得$1-1+1-1+\cdots\cdots$之和爲$\frac{1}{2}$, $1-2+4-8+16-\cdots\cdots$之和爲$\frac{1}{3}$,且對於此項可注意之結果,力求玄學的及神學的理由,以補充數學論證之不足(Leibniz 1696, Grandi 1703). Euler氏亦曾以同法($x=1$時之級數值)求$1^n-2^n+3^n-4^n+$ 及$1!-2!+3!-4!+\cdots\cdots$等級數之和.如是,彼時之人,實將每一公式視爲普遍可用,獨立存在,不問其來源如何,以爲其中之變數,任何值均可取者[1].彼時固已有人對此發生

註: (1) 試以二項級數爲例,即可知其結果將如何:

$$\sqrt{1-z}=1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2\cdot4}z^2-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}z^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}z^4-\cdots\cdots$$

今於其中設$z=2$,則實數之和,將成爲一虛數矣.

疑問,如 Varignon (1712), Nikolaus II, Bernoulli (1743), d'Alembert (1768) 等,但大率爲偶然的,對於彼時之思想,可謂毫無影響.直至十九世紀時,始發生此確信,知唯有收斂之級數,乃能有其存在之理由,亦唯有收斂之級數,方可由之以推論確切之結果. Gauss, Abel 及 Cauchy 諸人,於此方面貢獻尤多[1],自是以來,論證上之精密謹嚴,乃成爲數學研究上之特徵.

**9.** 及至輓近,有極多發散的級數,始亦成爲精密研究之對象.於此,所用之方法殊多,但其共同之根本思想,則在將發散的級數與某種收斂的數列相關,而將後者之極限値視爲級數之値.凡發散級數,如能適用此種方法,則謂之可求其和者,且可按收斂數列之性質而分別之.例如在某種狀況下,吾人可對發散級數與一收斂的連分相關,因而將連分之値視爲級數之値.但關於發散級數之詳盡理論,則尤以某種平均値之構成爲其基礎.今姑以最簡單之例示其一斑.

---

註: (1) Gauss 氏曾於其 Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) 中,謂"吾人之研究,自僅可限於收斂的事例方面,故如 $x>1$ 而欲求其値,此爲無意義之問題". 四十年之後, Gauss 於其致 Schumacher 之信中,復謂"收斂之級數,有清晰之意義可言,如此條件不存在,則其意義亦即隨而失去……余始終未承認發散的級數之亦可應用……無論何處,余僅能用及收斂之級數……"Abel 氏之 Untersuchung der binomischen Reihe (1826) 以及 Cauchy 之 Cours d'analyse (1821) 亦可參閱.

級數

$$(\mathfrak{A})\qquad a_1+a_2+a_2+\cdots\cdots$$

之爲收斂與否,隨其部分和數之數列

$$(\mathfrak{S})\qquad s_1, s_2, s_3, s_4,\cdots\cdots$$

是否爲收斂而定.今試作部分和數之算術平均數:

$$(\mathfrak{S}')\qquad s_1, \frac{s_1+s_2}{2}, \frac{s_1+s_2+s_3}{3},\cdots\cdots,$$

則可知 $(\mathfrak{S})$ 收斂時, $(\mathfrak{S}')$ 亦必收斂,且其極限值相同.但有時亦可 $(\mathfrak{S}')$ 收斂而 $(\mathfrak{S})$ 則不然,於是 $(\mathfrak{A})$ 卽發散,但吾人藉 $(\mathfrak{S}')$ 之助,仍不失其爲有和可求者,且可將

$$s=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}$$

視爲其值.

試以

$$1-1+1-1+1-\cdots\cdots$$

爲例,則有

$$1, 0, 1, 0, 1,\cdots\cdots$$

爲 $(\mathfrak{S})$,因而其 $(\mathfrak{S}')$ 爲

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7},\cdots\cdots$$

故如 $n$ 爲奇數,則

$$\frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$