

温度场和 温度应力

◎ 王润富 陈国荣 编著



科学出版社

www.sciencep.com

温度场和温度应力

王润富 陈国荣 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

温度应力是土木、水利、机械等工程中的一个重要问题。在结构中,温度应力常常超过由荷载产生的应力,并易引起混凝土结构的裂缝,危及结构的安全。

本书的内容包括:温度场的分析;应力场(弹性-徐变应力)的分析;大体积混凝土结构的温度应力和温度控制。书中详细地叙述了温度场和温度应力的基本理论,着重地介绍了工程上实用的各种解法,并对温度控制问题的进展情况做了适当介绍。

本书密切结合土木、水利等工程实践,力求反映国内外有关的最新科研成果,特别是反映中国学者和工程技术人员做出的许多重要贡献。

本书可作为土木、水利等工程专业的研究生和本科生教材,并可供土木、水利类的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

温度场和温度应力/王润富,陈国荣编著. —北京:科学出版社,2005
ISBN 7-03-013820-1

I. 温… II. ①王…②陈… III. 温度-应力 IV. 0551.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065930 号

责任编辑:童安齐 沈 建 / 责任校对:钟 洋
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年1月第一次印刷 印张:11 3/4
印数:1—1 500 字数:223 000

定价:24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

序

温度应力是水利、土木等工程中的一个重要问题。特别是大体积混凝土工程,如水利工程中的混凝土大坝等,由于变温引起的拉应力往往超过荷载引起的拉应力,其数值可能超过混凝土的抗拉强度,常常会使混凝土结构产生裂缝,危及结构的安全。因此,细致地分析结构中的温度应力,相应采取必要的温度控制措施,是工程技术人员必须考虑的一个问题。

要分析温度应力,首先要计算温度场。水利、土木工程中的混凝土结构是弹性-徐变体,不仅具有弹性性质,而且具有显著的徐变性质。因此,分析混凝土结构的温度应力,必然要涉及徐变应力的分析。

在此书中,作者主要介绍了温度场和温度应力(弹性和徐变应力)分析的基本理论,还特别着重于考虑了以下几点:

对温度场和温度应力的基本理论,做了较深入和详细的阐述。如在书中详细地介绍了温度场和温度应力的基本概念;求解温度场的各种基本解法,微分方程和变分方程之间的联系,各变分方程之间的联系,工程上实用的各种求解方法。在温度应力问题中,介绍了按应力求解,按位移求解,引用位移势函数的解法,引用等效体力和等效面力的概念;在弹性-徐变应力的分析中,介绍了几个徐变的定理及求解的基本方法,如初应变法,初应力法等,以及有关的简化计算公式。总之,作者在书中对基本概念、基本方程和各种解法均做了详细的介绍,可供初学者和工程技术人员了解和参考。

此书密切结合工程实际,特别是结合水利、土木工程中的大体积混凝土结构。书中介绍的解法,着重于工程上实用的解法,例如差分法和有限单元法等,可供实际分析时应用。有关的各种近似解法,也可供分析其他问题时参考。

此书力求反映温度应力问题的近期研究成果。随着我国经济建设

的发展,中国学者和工程技术人员在温度应力的课题中,做了大量的理论研究和工程实践,取得了非常丰硕的成果,进入了世界先进行列。作者在书中叙述了温度场和温度应力分析的最新成果,特别是中国学者的研究成果。例如,关于稳定和不稳定温度场的计算方法,关于徐变的一些定理,关于求解徐变应力的计算方法等,都有中国人的贡献,包括本书作者的贡献。

本书着重于介绍温度场和温度应力分析的基本理论和实用计算方法,因此本书可供水利、土木等工程专业的研究生和本科生作为教材学习,也可供水利、土木类的工程技术人员参考使用。

朱伯芳

(中国水利水电科学研究院教授,中国工程院院士)

前 言

温度应力,是物体中由于温度改变(即变温)而产生的应力,与温度本身无关。当物体中发生变温时,它的每一部分都将由于变温而引起热胀冷缩的变形。这种变形受到物体内部各部分之间的相互约束和边界上的外部约束的制约,并不能完全自由地发生,有约束就产生约束力,即所谓温度应力。温度应力是水利、土木、机械、航空等工程中经常遇到的一个重要问题。

温度应力的分析是必须重视的问题。首先,温度应力常常超过荷载引起的应力。例如,设混凝土的弹性模量为 $E=2\times 10^4\text{MPa}$,热胀系数为 $\alpha=10^{-5}/^\circ\text{C}$,若杆件中发生变温 $T=1^\circ\text{C}$ 时,将发生自由的温度变形 $\epsilon=\alpha T=10^{-5}$ 。当杆件两端被完全约束时,这种变形受到阻止,在杆件中将引起 $\sigma=-E\epsilon=-0.2\text{MPa}$ 的压应力。若变温 $T=10^\circ\text{C}$,则将引起 -2MPa 的压应力。因此,几十度的变温将引起相当大的应力。其次,温度应力常引起混凝土结构的裂缝,危及结构的安全。以上述的约束杆件为例,当变温为负值(降温)时, $T=-10^\circ\text{C}$ 将引起 2MPa 的拉应力。混凝土的抗拉极限强度是比较低的,一般只有 $1\sim 3\text{MPa}$ 。当混凝土结构中有较大的降温时,虽然结构内没有达到完全阻止温度变形的约束,但产生的拉应力也常常超过极限抗拉强度,引起混凝土结构的裂缝。这就是北方水库溢洪道底板和许多混凝土结构产生裂缝的原因。总之,无论从数量级的大小,还是从结构的安全性(裂缝危及结构安全)来看,温度应力的分析以及相应的温度控制设计都是十分重要的问题。

求解温度应力,首先要求出物体中的温度场,这是属于**热传导理论**的内容。而两个时刻的温度场之差,就是物体的变温场。然后,根据物体中的变温来求出物体中的应力场。在弹性体中求解温度应力,这是属于**热弹性理论**的内容。在混凝土结构中,混凝土的徐变性质(尤其是早期)十分明显,对温度应力的影响很大。由于徐变的影响,可使混凝土中的实际应力低于弹性应力(约为弹性应力的 $40\%\sim 60\%$)。因此,在分析混凝土结构的温度应力时,必须考虑徐变的因素,须要求解**弹性-徐变体的应力**。在分析中考虑了混凝土的徐变性质,可使得出的应力成果既符合实际情况,又能充分利用材料性能,降低工程造价。

在水利工程和土木工程中,有许多大体积混凝土结构。这些大体积混凝土结构是分块分层施工的,每浇筑一层,混凝土中的水化热将很快地发出热量,使自身温度升高。因此,必须间歇几天使热量散发出去。这就必须随施工过程,分时段逐步计算各时刻的温度场、相应的变温场,并再求解其弹性-徐变应力场。为了防止过大的温差和危险的应力值,必须采取相应的温度控制措施,例如采用低水化热的水泥,降低入仓温度,增加或减少间歇天数,采用水管冷却等等,并分析相应的温度场

和温度应力,直到符合设计要求为止。这是属于大体积混凝土的温度应力和温度控制的分析内容。

本书介绍了温度场和温度应力分析的基本理论和基本解法,适当地介绍了大体积混凝土的温度控制问题。作者力图讲清温度场和温度应力分析的基本概念、基本方程和基本解法,以使初学者容易理解和接受;并力求使书中的内容结合工程的实践,特别是水利、土木工程的实践,着重介绍了工程上实用的计算方法;作者也努力地反映温度场和温度应力分析方面的近期研究成果,特别是中国人的成果,以供工程技术人员参考。

作者衷心感谢河海大学和本校工程力学系对编写本书工作的大力支持,衷心感谢徐慰祖教授、李克敌教授、陈和群教授等对作者长期的帮助和合作。

限于作者的水平和认识,请广大师生和工程技术人员对本书中不妥和错误之处提出宝贵意见。

王润富 陈国荣

2004年3月

目 录

序

前言

第 1 章 温度场分析	1
§ 1.1 温度场问题的基本方程和边值条件	1
§ 1.2 分离变量法	6
§ 1.3 拉普拉斯变换法.....	10
§ 1.4 差分法.....	17
§ 1.5 按热量平衡原理导出温度场的有限单元法.....	24
§ 1.6 稳定温度场的变分原理.....	35
§ 1.7 不稳定温度场的变分原理.....	41
§ 1.8 按变分原理导出稳定温度场的有限单元法.....	44
§ 1.9 按变分原理导出不稳定温度场的有限单元法.....	50
§ 1.10 加权余量法	56
§ 1.11 剖开算子法	62
§ 1.12 平面稳定温度场的复变函数解法	65
习题	72
第 2 章 温度应力分析	77
§ 2.1 温度应力问题的基本理论.....	77
§ 2.2 平面温度应力问题.....	84
§ 2.3 用极坐标求解平面温度应力问题.....	92
§ 2.4 薄板和薄壳的温度应力.....	97
§ 2.5 混凝土的力学性能、徐变和松弛.....	103
§ 2.6 徐变度和松弛系数的试验和经验公式	108
§ 2.7 复杂应力状态下混凝土的变形	112
§ 2.8 关于均质弹性-徐变体的两个定理	114
§ 2.9 关于非均质弹性-徐变体在混合边界条件下的两个定理	117
§ 2.10 松弛系数法.....	119
§ 2.11 初应变法.....	120
§ 2.12 初应变法的简化递推公式.....	125
§ 2.13 初应力法.....	127
§ 2.14 初应力法的例题、几种方法的比较	131

§ 2.15	松弛系数的乘积定理、初应力法的一般简化递推公式	139
§ 2.16	温度应力问题的其他解法	144
§ 2.17	黏弹性理论简介	145
§ 2.18	温度应力的其他问题	150
习题		153
第 3 章	大体积混凝土的温度应力和温度控制	156
§ 3.1	大体积混凝土的温度应力和温度控制问题	156
§ 3.2	混凝土分层分期浇筑时的温度场和温度应力	157
§ 3.3	大体积混凝土的水管冷却	159
§ 3.4	低热和微膨胀水泥的应用	160
§ 3.5	损伤力学和断裂力学在混凝土结构分析中的应用	162
§ 3.6	碾压混凝土坝的应用	166
§ 3.7	有关温度场和温度应力的其他问题	167
附录一	水工混凝土结构设计规范(部分)	170
附录二	混凝土重力坝设计规范(部分)	172
附录三	本书符号说明	174
参考文献		176

第 1 章 温度场分析

§ 1.1 温度场问题的基本方程和边值条件

1. 关于温度场的一些基本概念

温度在时间域和空间域中的分布,称为**温度场**,它可表示为

$$T = T(x, y, z, t). \quad (\text{a})$$

若温度不随时间变化,即 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, 则 $T = T(x, y, z)$ 称为**稳定温度场**。若温度沿 z 向不变,即 $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, $T = T(x, y, t)$, 称为**平面温度场**。

在任一瞬时,连接场内相同温度值的各点,就得到此时刻的**等温面**。沿等温面切向,温度不变。而垂直等温面的法向,温度的变化率最大。表示一点最大增温率的矢量,称为**温度梯度**,即

$$\begin{aligned} \nabla T &= n_0 \frac{\partial T}{\partial n} \\ &= i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{b})$$

其中 n_0 是单位矢量,沿等温面的法线指向增温方向。

在单位时间内通过单位面积的热量,称为**热流密度**,即

$$q = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}, \quad (\text{c})$$

按照国际单位制(SI)* (以后均以国际单位制表示),其量纲为 MT^{-3} ,并用瓦(特)每平方米(W/m^2)为单位表示。

一点的最大热流密度矢量是沿等温面的法线且指向降温方向。根据热传导定律,热流密度与温度梯度成正比而方向相反,即

$$q = -\lambda \nabla T = -n_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (1.1)$$

λ 称为**导热系数**,其量纲为 $\text{LMT}^{-3}\Theta^{-1}$,并以瓦每米摄氏度($\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$)为单位表示。热流密度在 x 方向的分量是

* 国际单位制(SI),以长度(L),质量(M),时间(T),电流(I),热力学温度(Θ),物质的量(N)和发光强度(J)作为基本量。

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos(n, x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, (x, y, z). \quad (d)$$

类似地,在任意方向的热流密度,等于导热系数乘以温度在该方向的变化率的负值。

2. 热传导微分方程

物体内温度的变化与热量有关,热量的增减引起温度的升降。为了确定温度场,必须研究热量在物体内传导的过程。热量是一种能量,满足守恒原理,因此热传导的过程也必然满足热量的平衡条件。

为此,取出物体中的一个微分体积 $dV = dx dy dz$, 考虑在 dt 时段内 dV 体积物体内的热量平衡条件。即在时间域 dt 和空间域 dV 内,升温所需的热量 dQ_1 等于传入的热量 dQ_2 和内热源发出的热量 dQ_3 ,

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3. \quad (1.2)$$

考虑在 dt 时段内,微分体 dV 的温度从 T 变化为 $T + \frac{\partial T}{\partial t} dt$, 升温所需的热量 dQ_1 为

$$dQ_1 = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV,$$

其中 ρ 是物体的密度; c_p 是质量定压热容,即单位质量物体升温一度时所需的热量,其量纲为 $L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$, 并用焦(耳)每千克摄氏度 $\left(\frac{J}{kg \cdot ^\circ C} \right)$ 为单位表示。

设在负 x 面上传入微分体的热量为 $q_x dy dz dt$, 则在正 x 面上传出的热量为 $\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz dt$, 如图 1.1 所示。因此从正负 x 面的净传入的热量是 $-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt$, 代入式(d), 即得 $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dV dt$ 。同样计入 y, z 面上净传入的热量, 得

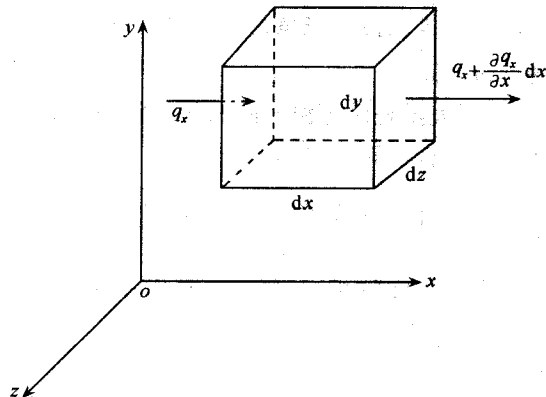


图 1.1

$$\begin{aligned} dQ_2 &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dV dt \\ &= \lambda \nabla^2 T dV dt. \end{aligned}$$

若物体具有内热源,在单位时间单位体积内发出的热量为 W ,则

$$dQ_3 = W dV dt.$$

将上述几项代入式(1.2),并除以 $dV dt$,得到**热传导微分方程**

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + W, \quad (V). \quad (1.3a)$$

或者写为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{W}{c_p \rho}, \quad (V). \quad (1.3b)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$,称为热扩散率(或导温系数),其量纲为 $L^2 T^{-1}$,并用平方米每秒(m^2/s)为单位表示。

假定所讨论的物体是均匀的,连续的,各向同性的,则热学参数 λ, c_p, ρ, a 都可近似地作为常量。在土木工程中,通常 λ 的单位是大卡/(米·时·度), a 的单位是米²/时。

混凝土在硬化期间,由于水化热而发出热量,其内热源强度是用试块的**绝热温升图**表示的。即将搅拌好的混凝土块置于边界绝热的条件下,使水化热发出的热量全部用于提高自身温度,记为 $\theta(t)$, t 为龄期。由于块体内各部分温度 θ 相同,相互之间的热量传导项 $\lambda \nabla^2 \theta = 0$ 。代入式(1.3),并注意绝热条件下温度用 θ 表示,于是得

$$\frac{W}{c_p \rho} = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (1.4)$$

这就是混凝土结构的内热源表达式。

将式(1.4)代入式(1.3b),得到**混凝土结构**在实际工作条件下的**热传导微分方程**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (V). \quad (1.5)$$

例如,某种混凝土的材料性能如下:导热系数 $\lambda = 2.0$ 大卡/(米·时·度)(度是 $^{\circ}C$), $\rho = 2400$ 公斤/米³,质量定压热容 $c_p = 0.20$ 大卡/(公斤·度),热扩散率 $a = \frac{\lambda}{c_p \rho} = 0.00417$ 米²/时 = 0.1 米²/天。

绝热温升 θ 常用经验公式表示,例如,某混凝土的 θ 表示为

$$\theta = 27(1 - e^{-0.384\tau}) \quad (\text{度}).$$

其中 τ 为龄期(天), θ 与 τ 的关系可列表如下:

τ	1	2	3	4	5	7	10	15	∞
θ	8.60	14.47	18.47	21.19	23.04	25.16	26.42	26.91	27.00

可见,该混凝土的内热源在绝热条件下,可使其温度升高 27℃。

混凝土的绝热温升 θ ,常用下列几种方式表达:

1) 指数 I 型,如 $\theta = \theta_0(1 - e^{-a\tau});$

2) 指数 II 型,如 $\theta = \theta_0(1 - e^{-a\tau^b});$

3) 双曲线型,如 $\theta = \theta_0 \frac{\tau}{a + \tau},$

其中 θ_0 为最终温升值, τ 为龄期, a, b 等为系数。

4) 列表,直接列出 $\tau \sim \theta$ 的实验值。在用近似法进行计算时,用插值公式取值。

3. 温度场的边值条件

热传导微分方程包含时间坐标变量和空间坐标变量。为了定解温度场函数 T , 必须考虑两类边值条件,即时间边值条件(又称初始条件)和空间边值条件(又称边界条件)。

1) 初始条件:已知初瞬时整个物体上温度的分布,即

$$T|_{t=t_0} = T_0(P), \quad [P \in (V, s)]. \quad (1.6)$$

其中 $P = P(x, y, z)$, 表示空间点或空间坐标变量; $\in$ 表示“属于”, $\notin$ 表示“不属于”。

2) 边界条件:一般分为三类,即

第一类边界条件,已知 s_1 边界上各瞬时的温度分布,即

$$T|_s = T_b(P, t), \quad (P \in s_1, t > t_0). \quad (1.7)$$

第二类边界条件,已知 s_2 边界上各瞬时的热流密度,即

$$\begin{aligned} q_n|_s &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s \\ &= q_b(P, t), (P \in s_2, t > t_0). \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中 n 表示外法线方向,式(1.8)表示边界上向外的热流密度。若某面为热流对称面,则此面上的 $q_n = 0$,即为绝热边界。

第三类边界,已知 s_3 边界上对流热交换情况。若物体与流体接触,按照热的对流定律,

$$\begin{aligned} q_n|_s &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_s \\ &= \beta(T - T_a), (P \in s_3, t > t_0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中 β 是对流热交换系数,其量纲是 $MT^{-3}\Theta^{-1}$,单位是瓦每平方米摄氏度 $\left(\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}\right)$,工程上常用的单位是大卡/(米²·时·度); T_a 是流体介质的温度。 β 与流体的流速、流态(层流或紊流)、黏滞性等有关。当 β 很小时, $q_n \rightarrow 0$, 接近绝热边界

条件;当 β 很大时,由于 q_n 是有限值,则 $(T-T_a)\rightarrow 0$,所以物体的边界温度 T 接近于流体温度 T_a 。

热传导微分方程中所要求解的未知函数是温度 T 。第一类边界条件直接给出 T 的边界值,第二类边界条件给出了在边界上 T 的导数值 $\frac{\partial T}{\partial t}$,而第三类边界条件中, T 和 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 均为未知,只给出 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 与 T 之间的关系式。在工程上,第三类边界条件是常常遇到的,如混凝土结构表面与水、空气的接触。

对于两个固体接触的情形,可以直接作为接触问题处理。

求解热传导问题,就是在给定的初始条件(1.6)和边界条件式(1.7)~式(1.9)下,从热传导微分方程式(1.3)求出未知的温度函数 T 。由于微分方程式(1.3)中包含有时间变量(t)和空间变量(x, y, z),因此,求解式(1.3)比求解只含空间变量的微分方程要困难得多。

热传导问题的具体解法,可分为解析解法和近似解法两类。

解析解法是用数学分析方法,求出严格地满足微分方程和边值条件的函数形式的精确解答。虽然由此得出的精确解不是很多,且大都对应于较简单边值条件的情形,但这些解答可以用来检验近似解法的精确度。常用的解析解法有:

分离变量法——求解偏微分方程的基本解法。它是将多变量函数表示为几个单变量函数的乘积,然后代入微分方程,使偏微分方程化为几个单变量常微分方程并进行求解。

格林函数法——对于有热源,特别是有点热源作用下的热传导问题,可以用此方法求解,即去找出对应于该热源和边值条件的格林函数解答。

积分变换法——对于含有对时间导数的问题,采用拉普拉斯变换方法,可将对时间 t 的导数消去,化为只含空间变量的微分方程进行求解。然后再将其解答进行逆变换,得出原函数 T 的解。

复变函数解法——将问题中的各实变函数分别用复变函数中的实部和虚部(分别均为实变函数)来表示,从而将该问题在实数域的方程变换为复数域的方程,然后进行求解。对于单连通域中的实体域或带孔域问题,可以再应用保角变换方法,求解出问题的解答。

在**近似解法**中,大多数方法本身就具有近似性,因而得出的是有一定误差的近似解答。但是,由于计算机的迅速发展,使得我们可以采取较细致的网格、单元等手段,应用计算机快速地完成巨大的计算工作,就可以得出满足工程精度要求的解答。对于工程实际问题,由于其边值条件都较为复杂,几乎不可能应用解析解法得出解答。因此,近似解法就成为解决工程问题的实用方法。以下重点介绍的几种近似解法,特别是差分法和有限单元法,就是我们经常使用的。

差分法——微分方程的一种近似数值解法。它采用函数离散化的手段,将连续函数用网格结点上的一些函数值来表示,从而将导数用差商来代替,将微分方程用

差分(代数)方程来代替。因此,能方便地得出问题的数值解答。

变分法——研究泛函及其极值的一种解法,其中的泛函极值条件是与微分方程和边值条件等价的。因此,它是区别于求解微分方程的另一种独立的解法。在变分法中,由于所取的试函数常具有局限性,使得由此得出的解答具有近似性,因而也将变分法归入近似解法之中。

有限单元法——近 50 年发展起来的一种非常有效的数值解法。它首先采用区域离散化的手段,将连续体区域划分为许多单元,并使这些单元在一些结点上连结起来,构成所谓“离散化结构”。然后再将连续体的变分原理应用于离散化结构,导出求解的方程。此外,有限单元法的公式还可以应用平衡原理、加权余量法等来导出。

加权余量法——这也是求解微分方程的一种近似解法。它直接设定试函数或试探值,并代入微分方程和边值条件,计算出其误差(称为余量,或残差,残数),然后再使误差在加权平均意义上趋近于零,从而得出近似的解答。

剖开算子法——前苏联学者提出的求解微分方程的近似解法。它是一种变态的差分格式,将每一步长分为几段,每段分别只对其中的一个变量的算子进行计算,而把其他变量作为常数看待,从而使原来多维变量的问题分别化为几个一维变量的问题来计算。

本书中介绍的近似解法,不仅可用来求解温度场问题,也可以用于求解其他问题。

§ 1.2 分离变量法

分离变量法是解偏微分方程的一种基本解法。它将多变量的函数用几个单变量函数的乘积来表示;代入方程后,可将偏微分方程化为几个单变量函数的常微分方程,然后再进行求解。

首先考察相应于微分方程(1.3)的齐次方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T. \quad (1.10)$$

假设取 T 为变量分离的形式,即

$$T = f(t) \cdot \varphi(x, y, z). \quad (1.11)$$

代入式(1.10),并分开变数于等式两边,得

$$\frac{\partial f}{\partial t} / af = \frac{\nabla^2 \varphi}{\varphi}. \quad (a)$$

式(a)的两边分别是 $t, (x, y, z)$ 独立变量的函数。设固定某一点,即令 (x, y, z) 不变,当 t 变化时式(a)左边将随 t 而变,而右边不发生变化,因此左边也应等于一常数;反之亦然。由此可见,式(a)的两边均应等于同一常数。其次,考察温度场在物体

内的变化情况,确定此常数应为负数。这是因为,当温度 T 为正函数时, $f \geq 0$; 若 $\frac{\partial f}{\partial t} > 0$, 则随 $t \rightarrow \infty$, T 将变成无穷大,这是不可能的,所以 $\frac{\partial f}{\partial t} < 0$, 从而 $\left(\frac{\partial f}{\partial t} / f\right) < 0$, 如图 1.2 所示。反之,当 $f < 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ 必然 > 0 , 也使 $\left(\frac{\partial f}{\partial t} / f\right) < 0$ 。设此负常数为 $-\omega^2$, 则从式(a)得出两个微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\omega^2 f = 0, \quad (1.12)$$

$$\nabla^2 \varphi + \omega^2 \varphi = 0. \quad (1.13)$$

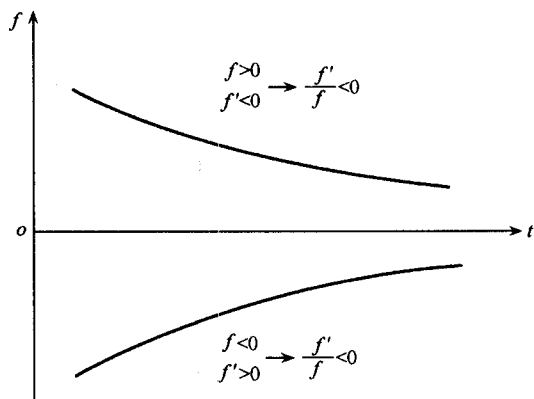


图 1.2

式(1.12)的解是

$$f = e^{-a\omega^2 t}. \quad (1.14)$$

为了求解 $\varphi(x, y, z)$, 令 φ 也为变量分离的形式, 即

$$\varphi = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z). \quad (1.15)$$

代入式(1.13), 得

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \omega^2 = 0. \quad (b)$$

式(b)前三项中的每一项, 均为 x, y, z 单变量的函数, 同理可推出, 每一项均应等于一个常数, 令

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

则得三个常微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X &= 0, \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y &= 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \gamma^2 Z &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

上式的解答分别为

$$\begin{aligned} X &= A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \\ Y &= E \sin \beta y + F \cos \beta y, \\ Z &= G \sin \gamma z + H \cos \gamma z. \end{aligned} \quad (1.17)$$

为了满足初始条件,需要用级数形式表达式(1.11)的解,即

$$T = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a(\alpha_l^2 + \beta_m^2 + \gamma_n^2)t} X(\alpha_l, x) Y(\beta_m, y) Z(\gamma_n, z). \quad (1.18)$$

其中 X, Y, Z 组成傅里叶级数,在工程中遇到的一些边值问题,通常都可以用傅里叶级数展开。式(1.18)中的待定系数和 $\alpha_l, \beta_m, \gamma_n$ 可以从边界条件和初始条件求出。

对于具有内热源的问题,则相应的微分方程(1.5)是非齐次方程,其全解是式(1.5)的特解叠加于式(1.10)的通解式(1.18),然后按相似的方法求解其待定系数和 $\alpha_l, \beta_m, \gamma_n$ 值。

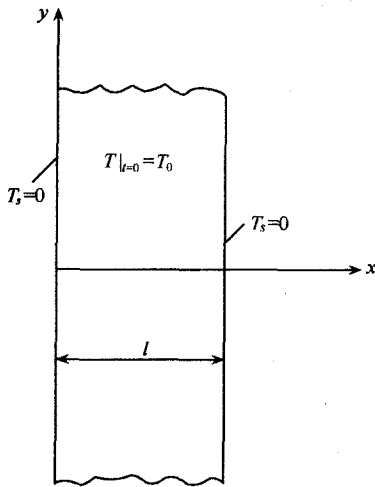


图 1.3

例 1 设宽为 l , y 和 z 向为无限长的物体,其初始温度场为 $T|_{t=0} = T_0$,边界条件为 $T|_s = 0 (t > 0)$,如图 1.3 所示。试按平面问题求其不稳定温度场。

此题是一维问题, $T = T(x, t)$, 相应方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (c)$$

令 $T = f(t) \cdot X(x)$,

代入方程(c),得到两个方程式:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\omega^2 f = 0, \text{ 其解为 } f = e^{-a\omega^2 t};$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \omega^2 X = 0, \text{ 其解取 } X = A \sin \omega x.$$

X 已满足边界条件 $T|_{x=0} = 0$; 考虑另一边界条

件

$$T|_{x=l} = 0, \sin \omega l = 0, \therefore \omega = \frac{n\pi}{l}.$$

为了满足初始条件,取无穷级数作为 T 的解答,即

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-an^2\pi^2 t/l^2} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (d)$$

代入初始条件,令 $t=0$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = T_0. \quad (e)$$

将上式右端 T_0 在区间 $[0, l]$ 展为正弦级数