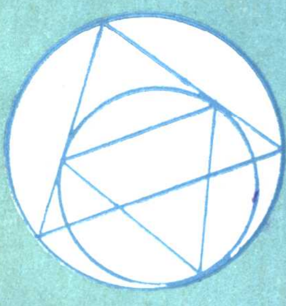
许炽雄　成宗浩　编著

中学数学竞赛基本训练题



机械工业出版社

中学数学竞赛基本训练题

许炽雄　成宗浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

·本书选取和编拟了典型的数学试题339道，突出了试题活、巧、新，可大大训练学生的数学思维，提高学生的解题能力和创造性思维的发展。本书试题不仅可供数学竞赛前的练兵，还可作为基本训练题使用。本书还附有解答，以便读者先自己独立钻研解题，再对比书中答案，了解自己的解题能力，进一步寻求解题途径，总结解题规律。

中学数学竞赛基本训练题

许炽雄　成宗浩　编著

*

责任编辑：董薇薇　尹荣英
封面设计：郭景云

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
河北省永清县印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 · 印张8 5/8 · 字数190千字
1989年11月北京第一版 · 1989年11月北京第一次印刷
印数 0 001—8 000 · 定价：4.20元

*

ISBN 7-111-01906-7/G·107

编者的话

数学竞赛是培养青少年刻苦学习，攀登科学高峰的一个途径，是发现人才、选用人才的一种手段。目前国内外都普遍采用这种竞赛手段挑选优秀人才。

为了更好地使青少年在数学竞赛中取得优异成绩，我们编拟了这本小册子，选取了典型的试题399道，突出了试题活、巧、新，体现了有些试题具有较深理论和一定的背景，但又并不难。因此，本试题可大大训练学生的数学思维，提高学生的解题能力和创造性思维的发展，也可作竞赛前的练兵。

本书选用试题难度适度，因此可作为基本训练题使用。本书虽附有解答，但希望读者先自己钻研，寻求解题途径，总结解题规律，使自己有所得益。当然在自己解出后可对比书中答案，再作一番分析，无疑是大有好处的。

编　者

目　　录

一、试　　题

1．有一个四位数，它被一位数来除，有图式：

```
 × × × × | ×
          ------
 - × ×    | × ×
---------
     × ×
   - × ×
---------
       0
```

被另一个一位数来除，有图式：

```
 × × × ×   ×
          --------
 - ×       × × ×
---------
   × ×
 -   ×
---------
     × ×
   - × ×
---------
       0
```

试确定这个四位数．

2．已知一个数1234567891011121З……99100.从其中划去100个数字，使剩下的数最大．

3．试问有多少个四位数，它加上400以后为某个自然数的平方．

4．有自然数m、n，满足$n^2+1988=m^2$，求：m、n．

5．p、q、r均为大于3的素数，证明$p^2+q^2+r^2$不是素数．

6．把可以表示为两个整数的平方和的全体记为M，试

证：属于M的任二个数的积也属于M。

7．设集合$M=\{3^0, 3^1, 3^2, \cdots, 3^{n-1}\cdots\}$

试证：任意自然数N可表示集合M的若干元素的和或差。

8．如果x、y、z是整数，且$x+y+z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$也是整数，求证：$xy+yz+zx$是偶数。

9．设k、l、m、n为非负整数，且有$\dfrac{(x+1)^k}{x^l}-1=\dfrac{(x+1)^m}{x^n}$，求：$k$、$l$、$m$、$n$值。

10．$f(x)=px^2+qx+r$对于整数r，$f(n)$是整数。试证：$2p$是整数。

11．1至300自然数n中，$\sqrt{n}$的整数部分能被7整除的共有几个？$\sqrt[3]{n}$的整数部分能被5整除的共有多少？

12．已知一直角三角形三边长都是二位整数，其中一个直角边长的个位数字与十位数字相调换所成的数恰是斜边长，求此直角三角形三边长？

13．试求三位数与它字母之和的比值的最大值。

14．$f(n)=n^2+n+1.(n\in N)$，试证$f(n)$不可能是5的倍数。

15．1，2，3，…，n^2，构成一个正方形数表

$$\begin{array}{cccc}
1, & 2, & 3\cdots & n\\
n+1, & n+2, & n+3\cdots & 2n\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
n^2-n+1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & n^2
\end{array}$$

从表中任意划去一个数，然后删掉这个数所在的行和列，对剩下的$(n-1)^2$个数的正方形表作同样处理，由此类推，共作n次，求被划去n个数和。

16．求所有这样的两位数，当它乘以1，2，3，4，5，6，7，8，9时所得积的数字之和均不变。

17．a、b、c、d、k是整数。如果分数$\frac{al+b}{cl+d}$能被k约分，则$ad-bc$能被k整除，试证明。

18．对于任意整数x，整系数多项式$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$能被5整除，证明a、b、c、d都能被5整除。

19．求n为怎样的整数时，$20^n+16^n-3^n-1$能被323整除。

20．$6n$位数能被7整除，将最后的数字移到前面，试证得到的数也能被7整除。

21．将1，2，3……$4n^2$的数排成正方阵，使得方阵中每一列的所有数之和相等。

22．给定一个4×4的方格纸，我们能够在这张方格纸的方格里画上七个星号，使得我们划去任何两行和任意两列后，剩下的方格里至少还有一个星号．请画出两个这样的图形，进一步证明如果星号少于七个，那么总可以划去两行和两列后，使剩下和格子里是空的。

23．给定四个数a、b、c、d，按下列法则：即前一数乘以后一数，第四个数乘以第一个数，得到一组新数ab、bc、cd、da，由这新数按上述法则再得第二组新数，依此类推，如果某一组新数又出现了原来四个数，试证$a=b=c=d=1$。

24．在边长为20×25的长方形内，任意投放120个边长为1的正方形．证明在长方形内还可以放置一个直径为1的圆，它和这120个正方形的任何一个都不重叠。

25．由平面上定点P到某个等边三角形ABC的两顶点距离为$AP=2$，$BP=3$，试确定CP具有的最大长度。

26. 由三个边长为 1 的正方形组成如图 1，证明：1961 ×1963的矩形不能用图1来铺满，而1963×1965的矩形正好能被图1铺满。

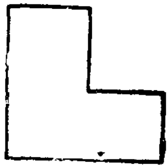


图 1

27. 平面上给定25个点，已知任意3点里总有两个点的距离小于 1，证明：在这给定的25个点中间，总可以找出13个点，它们都位于某一个半径为 1 的圆内。

28. 平面上给定七条直线，已知其中任何两条皆不平行，证明从中一定可找出两条直线交角小于26°。

29. 平面上有 6 个点，其中任 3 点都不在一条直线上，我们总能从中找出 3 个点构成的三角形至少有一角不大于30°，试证明。

30. 由 1， 2， 3，…，1963里最多能有多少个这样的数，使得其中任何两个数的和不能被这两个数的差整除。

31. 如果$x+y$是素数，$x^{2n+1}+y^{2n+1}=z^{2n+1}$ $(n\in N)$ 没有整数解。试证明。

32. 现有$2n$个人参加会议，每个到会者的熟人应不少于n个人，证明我们总可以从所有到会者中找出 4 个人，让4个人坐在圆桌周围，使每个人的邻座都有熟人。

33. 证明任何偶数$2n$都可唯一表示成$2n=(x+y)^2+3x+y$，这里x、y是非负整数。

34. 半径为 1，中心角为60°的扇形内任取二点，试证它们的距离不能大于 1。

35. $a+b+c=p$，$ab+bc+ca=q$，$abc=r$，用p、q、r表示$(a+b)(b+c)(c+a)$。

36. 分解下列因式

(1) $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$；

(2) $(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$。

37. $x+y=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$x-y=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

求：(1) xy；(2) $x^4-x^2y^2+y^4$。

38. 解不等式$ax^2-2(a+1)x+4>0$.

39. $ax^2+bx+2>0$ 有解 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，试求$a$、$b$值。

40. $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2-(a-1)x+a^2=0$，

$$x^2+2ax-2a=0$$

三方程中至少有一个方程有实数解，求a的范围。

41. 方程$ax^2-(a-3)x+a-2=0$至少有一个整数解，试确定a的值，并求其整数解。

42. 两个方程$x^2+ax+b=0$，$x^2+bx+a=0$只有一个公共解，求非公共解和。

43. $\frac{x+4}{x+1}<\sqrt{3}<\frac{x+3}{x}$，求正整数$x$。

44. $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，证明$x$、$y$、$z$中至少有一个等于1。

45. $x-by=y-ax=bx+ay=1$，求$a^2+b^2+ab+a+b$值。

46. $|x|<1$，$|y|<1$，$|z|<1$，证明(1) $xy+1>x+y$；(2) $xyz+2>x+y+z$。

47. 证明不等式 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 4$（$a$、$b$、$c$ 为正数）。

48. $f(x)=2x^2+1$，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$（a、$b\in k$），试证$pf(a)+qf(b)\geqslant f(pa+qb)$。

49. 求出与抛物线$y=3x^2-6x+7$关于(2，1)对称的抛物线方程。

50. $y=2x^2-px+4p+1$中不论p取何值，曲线通过定点，求此定点。

51. 求$y=x^4+8x^3+25x^2+36x+11$的最小值。

52. $y=x^2+ax+b$，当$x\in[0,1]$时，$y\in[0,1]$，求a，b。

53. 证明 $\lg(a^m+a^n)\geqslant\dfrac{m+n}{2}+\lg 2$。

54. $(\lg ax)(\lg ax^2)=4$所有解大于1，求a的范围。

55. 数列$\{a_n\}$中$a_1=3$，且$na_{n+1}=(n+2)a_n+n$，(1)求通项a_n；(2) $n>1$时有$\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{2(n+1)}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}<\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2n+1}$，请证明。

56. $abc=1$，求$\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}$值。

57. 将8个“+”号和6个“-”号从左到右排列，符号出现变动5次的排法有多少种。

58. $x>0$，$y>0$，$x+y>2$，试证：$\dfrac{1+y}{x}<2$且$\dfrac{1+x}{y}<2$。

59. $x>0$，$y>0$，$z>0$，试证：

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-xyz\geqslant 2\left\{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3-xyz\right\}$$

并指出等号成立条件。

60. 求满足$\log_2(x-2)+\log_2 y=\log_2(3x-2y-1)+1$所有整数解。

61. $x^2-2(a+2)x+b=0$至少在$(-1,1)$内有一个实数根时，求(a,b)存在范围。

62. 解方程组$\begin{cases}-2x_1+x_2=a, \\ x_1-2x_2+x_3=0, \\ x_2-2x_3+x_4=0, \\ \cdots\ \cdots \\ x_{n-2}-2x_{n-1}+x_n=0, \\ x_{n-1}-2x_n=b.\end{cases}$

63. $b=\sqrt{a+2}$，$c=\sqrt{b+2}$，$d=\sqrt{c+2}$，试证$|d-2|\leqslant\frac{1}{8}|a-2|$，并求等号成立条件。

64. $|x|+2|y|-2=0$，求$u=x^2-xy+y^2$最大值和最小值。

65. 解方程$3^x+4^x=5^x$.

66. 数列$\{a_n\}$有$a_1=1$，$4a_{n+1}-a_n\cdot a_{n+1}+2a_n=9$，求$a_n$。

67. 求使方程组$\begin{cases}x^2+2ay=5 \\ y-x=6a\end{cases}$有正整数解的$a$的值。

68. a、b是相异实数，（1）解方程$|ax+b|=|bx+a|$；（2）对任何x的实数值，使不等式$|ax+2|\geqslant|2x+b|$恒成立的a、b所满足条件。

69. 实数a、b、c有$|a|\geqslant 1$，$|b|\leqslant 2$，$|c|\leqslant 3$求方程$ax^2+bx+c=0$有实数解的范围。

70. 试证$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)+(c_1^2+c_2^2)(d_1^2+d_2^2)\geqslant 2$

$(a_1b_1 + a_2b_2)(c_1d_1 + c_2d_2)$.

71. 从 1，2，3，…，n 中取出 k 个互不相同的数（$1 \leqslant k \leqslant n$），并求出它们的积，根据 k 的所有取法，把这些积的总和记为 a_k，求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的值。

72. $x > 0$，$f(x)$ 有下列三个性质：① $f(2) = 1$；② $f(xy) = f(x) + f(y)$；③ $x > y$ 时有 $f(x) > f(y)$，求：(1) $f(1)$；(2) $f(x) + f(x-3) \leqslant 2$ 成立的 x 范围。

73. 求 $(1^2+1)1! + (2^2+1)2! + (3^2+1)3! + \cdots + (n^2+1)n!$ 值。

74. 在一直线公路旁，依次设信号灯 A、B、C，且 $AB = 2\text{km}$，$BC = 1.2\text{km}$，这些信号灯开绿色信号1min，接着开黄色和红色信号共1min，如此循环，(开绿色信号时汽车能通过)。某一汽车，车速为36～90km/h沿 AC 方向行驶，当车通过 A 点时，B、C 都同时开了绿灯，此车希望经过 B、C 点不停车，其行驶速度应控制在什么范围内。

75. 求方程组 $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$ 的实数解。

76. 解方程 $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$。

77. 试证 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots\cdots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$。

78. 给 a_1、a_2、a_3、$\cdots a_{100}$。满足

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geqslant 0 \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geqslant 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geqslant 0 \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

求证：$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{100}$。

79. 求方程组$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$的所有实数解。

80. 求方程$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$的整数解。

81. 解方程$x^3 - [x] = 3$，这里$[x]$表示不超过x的最大整数

82. 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1 + x_1^2} = x_2 \\ \dfrac{2x_2^2}{1 + x_2^2} = x_3 \\ \dfrac{2x_3^2}{1 + x_3^2} = x_1 \end{cases}$ 的实数解。

83. 求方程$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$正整数解。

84. 给定凸四边形$ABCD$，AB、CD的中点分别为K、M，线段AM和DK交点为O，线BM与CK交点为P，求证四边形$MOKP$等于$\triangle BPC$和$\triangle AOD$面积之和。

85. 数列$\{a_n\}$中$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$，且$a_1 = \dfrac{1}{2K}$，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 1$，求证：总能有$k$个数，使得这$k$个数里最小的数大于其中最大数的一半。

86. 实数x、y、z、a满足$x + y + z = a$，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$试证：$x^n + y^n + z^n \geqslant a^n$（$n$是正整数）。

87. x、y为实数，$3^x = 5^y = a$，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2$，求$a$。

88. $a + b + c = 0$，且$a > b > c$，$y = ax^2 + 2bx +$

c在x轴截得线段长为l，试证：$\sqrt{3}<l<2\sqrt{3}$。

89. $|a|<1$，$|b|<1$，求证：$|a+b|+|a-b|<2$。

90. u、x、y、z为正数，且$u^3+x^3=y^3+z^3=1$，试证：$uy^2+xz^2\leqslant1$。

91. $f(n)=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{n^n}$，求使$f(n)$最大的$n$值.

92. 已知$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=3$，求$a$、$b$值。

93. 在边长为a的正$\triangle ABC$的边BC上取点A_1，过A_1作边AB的垂线A_1C_1，过C_1作边AC的垂线C_1B_1，再从B_1作边BC的垂线B_1A_2，如此继续下去，在BC上得到A_2、A_3、A_4…求$\lim\limits_{n\to\infty}BA_n$。

94. 求$37x+16y=1$的整数解。

95. 在$y=\sqrt{x}$和x轴间画正三角形QP_1Q_1、$Q_1P_2Q_2$…使P_i在$y=\sqrt{x}$上，Q_i在x轴上，求Q_n点横坐标。

96. $x^2+Ax+B=0$，$x^2+Cx+D=0$这两方程根的模小于1，证明方程$x^2+\frac{1}{2}(A+C)x+\frac{1}{2}(B+D)=0$的根的模也小于1。

97. 某军队长l km，在行军中末排战士因事赶到头排，到达头排后立即赶回，当他回到末排时，全队已走了l km，若军队与士兵行速都不变，求士兵所走路长。

98. A、B、C三人各有豆若干粒，先由A给B、C所有豆数，再由B给A、C所有豆数，再由C给A、B所有豆数，若三次每人恰有64粒，问原来三人各有多少豆？

99. 求$S=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$。

100. A、B、C为$\triangle ABC$三个角x、y、z为任意实数，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$。

101. 求方程$\lg(x^2+1)+\lg(y^2+4)=\lg 8+\lg x+\lg y$实数解。

102. 一元四次方程最高系数为1，常数项为36，已知这方程两个根分别等于一个等边三角形底和高，而另二个根分别等于另一等边三角形的底和高，且两个等边三角形面积比为1∶3，求这一元四次方程。

103. $A=1+3+5+\cdots+(2n-1)$，

$B=1+2+3+\cdots+n$，试证$n>1$时B不能整除A。

104. 已知$\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$（$c>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$），$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^a$，求证$(\lg a)^2=\lg(c+b)\cdot\lg(c-b)$。

105. 解方程组$\begin{cases}6xyz+xy+2yz+3zx=-35,\\9xyz+2xy+4yz+3zx=-43,\\7xyz+3xy+yz+3zx=-3-1.\end{cases}$

106. 若$\begin{cases}x+y+z=2,\\x^2+y^2+z^2=1,\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3},\end{cases}$

求$x^3+y^3+z^3$值。

107. 若$2n+1$是质数，试证1^2，2^2，$3^2\cdots n^2$被$2n+1$除得不同的余数。

108. 解方程组 $\begin{cases} x^2=a^2+(y-z)^2, \\ y^2=b^2+(z-x)^2, \\ z^2=c^2+(x-y)^2. \end{cases}$

109. 解方程$x^4+3x^3+6x^2+6x+4=0$。

110. 解方程 $\sqrt{2x^2-5x+2}+\sqrt{x^2-7x+6}$

$=\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-9x+7}$。

111. 解方程$(2x+7)^4+(2x+3)^4=82$。

112. 解方程 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{3}{x-5}$ $=0$。

113. 解方程$\lg^m x^n=\lg^n x^m$（m、n为不相等自然数）。

114. 设 $\dfrac{x_1}{x_1+1}=\dfrac{x_2}{x_2+2}=\cdots\cdots=\dfrac{x_n}{x_n+n}$

$=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$，求$x_k$（$k=1$，$2\cdots n$）。

115. $\begin{cases} x^2+y^2-\cos^2 z=5+4\sqrt{2}, \\ xy=3+2\sqrt{2}, \end{cases}$ 求x、y、z实数解。

116. 三角形三边成等比数列，求公比取值范围，如果是直角三角形，求公比。

117. $-3<\dfrac{x^2+x\operatorname{tg}\alpha-2}{x^2-x+1}\leqslant 2$对$x$的任意实数恒成立，求$\alpha$取值范围。

118. $a+b+c=abc$（a、b、c为正数），n为自然数，求证 $a^n+b^n+c^n\geqslant 3\sqrt{3^n}$。

119. $a_i>0$（$i=1，2，3，4$）且$a_1+a_2+a_3+a_4=1$