高等工科数学系列课程教材

复变函数论与运算微积

孙振绮 总主编

孙振绮
丁效华 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 等 工 科 数 学 系 列 课 程 教 材

复变函数论与运算微积

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　丁效华
副主编　金承日　邹巾英

机 械 工 业 出 版 社

本书介绍了复变函数论与运算微积的基本理论和方法，取材适当，通俗易懂，便于教学．本书内容包括：第1章复变函数论、第2章拉普拉斯变换和附录傅里叶变换三部分，每一章节都配有大量典型计算题，书末还附有典型计算题的答案供读者参考．

本书可作为高等院校工科各专业复变函数与运算微积课程的教材，也可作为工程技术人员以及其他科技人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

复变函数论与运算微积/孙振绮，丁效华主编．—北京：机械工业出版社，2004.4

高等工科数学系列课程教材

ISBN 7-111-14184-9

Ⅰ.复… Ⅱ.①孙…②丁… 复变函数－高等学校－教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第021029号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：郑 丹
责任编辑：郑 玫 版式设计：冉晓华 责任校对：李秋荣
封面设计：鞠 杨 责任印制：李 妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004年5月第1版第1次印刷
1000mm×1400mm B5·6.625印张·252千字
定价：18.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前　言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法．为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事“高等工科数学教学过程的优化设计”课题的研究，该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖．这套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结，包括：《工科数学分析教程》（上、下）、《空间解析几何与线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数论与运算微积》、《数学物理方程》、《最优化方法》、《计算技术与程序设计》等．

这套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养．具体地，①加强对传统内容的理论叙述；②适当运用近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性；⑤强化对学生的科学工程计算能力的培养；⑥加强对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别．

本套教材由孙振绮任总主编．

《复变函数论与运算微积》在内容叙述上尽可能体现工科数学的特点，坚持理论联系实际的原则，书中有许多实用性很强的例子，同时对每一章的内容在工程技术的应用范围都作了概述．

本书可供工科大学自动控制、计算机、机电一体化、工程物理等对数学具有较高要求的专业的本科二年级学生使用，需用48学时．

编写本书得到哈尔滨工业大学（威海）教务处的大力支持，在此深表谢意．

本书由哈尔滨工业大学（威海）数学系孙振绮、丁效华任主编，金承日、邹巾英任副主编．参加本书编写的还有范德军、杨毅、孙建邵、伊晓东、李福梅、李宝家．文松龙教授仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵意见和建议．

在此，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意！

由于编者水平有限，缺点、疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

目　录

第 1 章　复变函数论

复变函数论是逻辑上谐和的数学学科，它允许在复数范围内进行数学运算．它不仅对纯数学（代数、微分方程、解析数论等）和各种应用数学学科（空气和流体动力学、天体力学、弹性理论等）具有巨大的意义，而且还被广泛用来解决许多工程问题．

复变函数论广泛地应用在电子技术和无线电技术中，特别是在有关交流电的分析与电磁场理论方面，应用更加广泛．

1.1　复数　区域和边界

1.1.1　基本定义

具有一定顺序的一对实数 a 与 b 记为 $z=(a,b)$，称它是一个复数，用 $z=a+b\mathrm{i}$（复数代数式）表示．

假如 $b=0$，那么 $z=a$ 是一个实数；假如 $a=0$，那末 $z=b\mathrm{i}$ 是一个虚数．称 a 为复数的实部，$b\mathrm{i}$ 为复数的虚部，b 称为复数的虚部系数．记作 $a=\mathrm{Re}z$，$b=\mathrm{Im}z$．这些符号来自法文 reel（实的）和 imaginaire（虚的）．

两个复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ 相等，当且仅当 $a_1=a_2$ 和 $b_1=b_2$ 同时成立．

对复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 和 $z_2+b_2\mathrm{i}$ 的运算定义为：

加法按公式

$$z_1+z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i} \tag{1-1}$$

乘法按公式

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\mathrm{i} \tag{1-2}$$

由式（1-2）可得 $\mathrm{i}^2=-1$（i 是一个记号，它的平方等于 -1）．

称 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 为 $z=a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数．容易证明

$$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$$

除了已定义的复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ 的加法和乘法之外，还可定义它们的逆运算．

减法按公式

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i} \tag{1-3}$$

除法按公式

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1\mathrm{i}}{a_2+b_2\mathrm{i}}=\frac{(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})}{a_2^2+b_2^2}$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2+b_2^2} \tag{1-4}$$

不难发现，所有这些运算不仅可在复数上进行，也可在普通代数表达式上进行，但要考虑到 $\mathrm{i}^2=-1$ 和 $\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$.

1.1.2 复数的几何表示与各种标记

在给定的笛卡儿直角坐标系的坐标平面上可以给出复数的几何表示．横轴上的点代表实部，而纵轴上的点代表虚部系数．这时的坐标平面称为复平面，而坐标轴相应地称为实轴和虚轴．

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 在复平面上或者用点（x，y）表示，或者用向量 $z=\{x, y\}$ 表示．这时，向量的长度 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数的模，而从实轴出发按逆时针旋转算出向量的转角 φ（图 1-1），称为复数的辐角（$\varphi=\mathrm{Arg}z$）．把满足 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 的 $\varphi=\arg z$ 称为辐角的主值．显然有 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

不难确定，$|z|=R$（$R=\mathrm{const}$）表示一个以坐标原点为圆心，R 为半径的圆周（图 1-2a）；$|z|<R$（$R=\mathrm{const}$）表示一个以坐标原点为圆心，R 为半径的开圆（不包括圆周）（图 1-2b）；$|z-z_0|<R$ 表示一个以 z_0 为圆心，R 为半径的开圆（图 1-2c）；$\arg z=\mathrm{const}$ 表示一条从坐标原点引出的极角 $\varphi=\arg z$ 的射线（图 1-2d）．

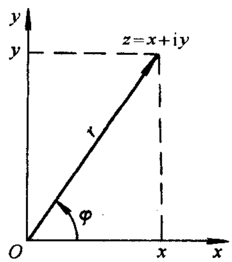

图 1-1

如果 x 和 y 是变量，那么 $z=x+\mathrm{i}y$ 也是变量，这时可说 z 是复变量．对于复变量仍然有模 $|z|$ 和辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的概念，然而这些量也都是变量．

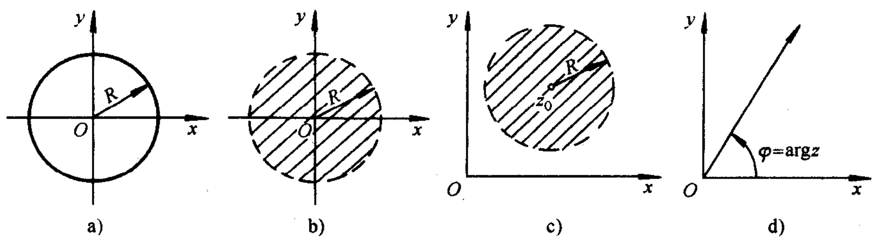

图 1-2

按照图 1-1 采用的标记，下面的关系成立

$$x=\rho\cos\varphi \quad 和 \quad y=\rho\sin\varphi \tag{1-5}$$

由此得出

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1-6}$$

这样的标记称为复数的三角式．

欧拉证明了恒等式：$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$．利用这个恒等式，公式（1-6）可记作

$$z=\rho e^{i\varphi}$$

这是复数的指数式．

两个复数 $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ 和 $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ 相等的充分必要条件是 $\rho_1=\rho_2$，$\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$，其中 $k\in\mathbf{Z}$（根据三角函数的周期性质得出的）．

不难证明，$|\bar{z}|=|z|$，但 $\arg\bar{z}=-\arg z$．

如同复数代数式加、减法一样，三角式的复数也能进行加法和减法的运算．它们的几何运算与向量的加、减法运算是相对应的．

复数 $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ 和 $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ 的乘法与通常一样．然而已知的三角式可化简乘法法则：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\\&=\rho_1\cdot\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\\&=\rho_1\cdot\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\end{aligned}$$

即两个复数乘积的模等于它们的模的乘积：$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，而乘积的辐角等于它们的辐角之和：$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$．

复数 z_1 乘上复数 z_2 在几何上归结为把向量 z_1 伸长 $|z_2|$ 倍并按逆时针旋转一个角度 $\varphi_2=\arg z_2$（在图 1-3 中，三角形 $O1z_1$ 相似于三角形 Oz_2z）．

复数乘法的直接推论是：

复数的乘方法则

$$z^n=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\rho^ne^{in\varphi}$$

和棣美弗公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

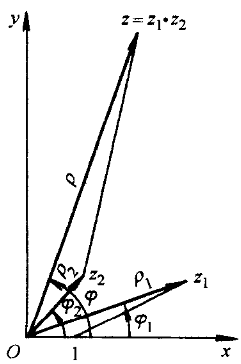

图 1-3

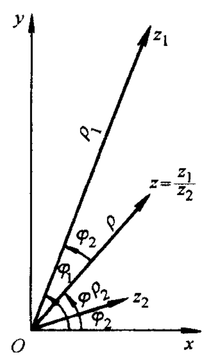

图 1-4

复数 $z_1=\rho_1$（$\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1$）和 $z_2=\rho_2$（$\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2$）的除法可作为乘法的逆运算

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

即两个复数的商的模等于它们的模的商：$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$，而商的辐角等于被除数与除数的辐角之差：$\mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$.

复数 z_1 除以复数 z_2 在几何上归结为把向量 z_1 压缩 $|z_2|$ 倍并按顺时针旋转一个角度 $\varphi_2=\arg z_2$，$\varphi_2>0$（图 1-4）.

复数 z 开 n 次方可作为乘方的逆运算进行，考虑到三角函数的周期性，有

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}}$$

其中，$\varphi=\varphi_0+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因此

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}&=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right)\\&=\sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}}\\&=\sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_0}{n}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1\end{aligned}$$

如果 $k=n$，那么 $\frac{\varphi}{n}=\frac{\varphi_0}{n}+2\pi$，从而得到一个与 $k=0$ 时相同的方根值．这样，也证明了复数 z 的 n 次方根恰有 n 个不同的值．这些方根的模与辐角分别为 $\sqrt[n]{|z|}$ 和 $\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}$，即这 n 个值就是以原点为中心，$\sqrt[n]{\rho}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点．

在电子技术中，复数 $a+b\mathrm{i}$ 的三角式和指数式为

$$a+b\mathrm{i}=A(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

其中，$A=\sqrt{a^2+b^2}$，$\alpha=\arctan\frac{b}{a}\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. 它们被广泛地用来计算交流电路问题．

如果把 a 和 b 看作变量 t 的函数，那么几何上表达式 $a(t)+\mathrm{i}\,b(t)$ 将代表变化的向量，当模是常量时，则表示具有定长的旋转着的向量．现在考虑复向量函数

$$\begin{aligned}a(t)+\mathrm{i}\,b(t)&=U_m[\cos(\omega t+\psi_u)+\mathrm{i}\sin(\omega t+\psi_u)]\\&=U_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_u}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

它是随正弦规律变化的．

当 $t=0$ 时，这个向量函数的初始位置模为 U_m，辐角为 ψ_u（图 1-5）.

实部 $U_m\cos(\omega t+\psi_u)$ 和虚部系数 $U_m\sin(\omega t+\psi_u)$ 分别是长为 U_m 的按定角速度 ω 旋转的向量在横轴和纵轴上的投影．因为要研究正弦函数，所以只限制研究 $u=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$，使它与整个的向量函数相对应，记作

$$u=U_m\sin(\omega t+\psi_u)\doteq U_m e^{i\psi_u}\cdot e^{i\omega t}\text{㊀}$$

这里没有必要考虑 $U_m\cos(\omega t+\psi_u)$，这是因为

$$\cos(\omega t+\psi_u)=\sin\left[(\omega t+\psi_u)+\frac{\pi}{2}\right]$$

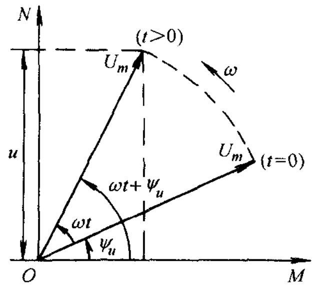

图 1-5

因子 $U_m e^{i\psi_u}$ 不依赖于时间 t，令 $\dot{U}_m=U_m e^{i\psi_u}$ 称作复振幅（具有初相角 ψ_u 的正弦电压 u 是已知的）．因此，

$$u\doteq\dot{U}_m e^{i\omega t}$$

其次，在交流电路计算中只规定 $\dot{U}_m$ 是复常量，而不是时间的正弦函数．所以，电路计算最终归结为一般的正弦函数的计算．

上述方法称为符号法．这种方法的实质是把按正弦规律变化的复向量函数计算转化为与其相应的复常量的代数运算，且最终转化为一般正弦函数的计算．

1.1.3 球极投影

上面考虑的是复平面上的复数．还存在着另一种复数的几何表示法，借助于它可引出无穷远点的概念，下面来介绍它．

取一个任意半径的球面使它与复平面在坐标原点相切（图 1-6），切点称为球面的南极，而过南极的直径的另一端点称为北极．复平面的坐标原点对应于球面的南极并记为 $z=0$. 从球面北极 P 引向复平面上任意一点 z 的射线与球面必交于一点 Z. 这样可建立复数平面与不含北极在内的球面之间的一一对应．

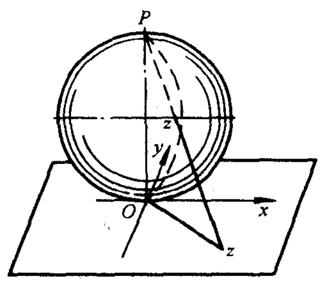

图 1-6

用球面表示复平面称为复平面的球极投影，而球面称为复数球面．

为了实现复平面与全球面之间的一一对应关系，把假定的无穷远点（$z=\infty$）引入复平面，让它与球面的北极相对应．这个点不能参加任何算术的或代数的运算，然而对复数序列可以，并且常常收敛于它．

㊀ ≑表示“对应于”，下同．

引入了无穷远点的复平面称为全复平面，而没有这个点的复平面称为开复平面．

1.1.4 区域和边界

考虑几个几何概念．

定义 1-1 复平面上的点集 D 称为区域，如果 D 满足如下条件：

(1) D 的以任一给定点为中心的足够小的圆周内的点全部属于这个集合(开集的性质)；

(2) 集合 D 中任意两点都能用折线把它们连接起来，使得折线上所有点都属于这个集合．(连通的性质)

定义 1-2 满足定义1-1 中的条件（1）的所有点称为区域 D 的内点．

区域 D 的外点是指复平面上这样的点，即以它为中心的一个足够小的圆周内的点全部不属于区域 D.

定义 1-3 含有某点 z_0 的任意区域称为这点的邻域．通常取圆域作为点的邻域，如果圆的半径为 r （$|z-z_0|<r$），那么称这个邻域为点 z_0 的 r-邻域．

无穷远点的邻域应理解为以坐标原点为中心的任意圆域的外部，即域$|z|>R$.

定义 1-4 点 M 称为区域D 的边界点，如果它不属于区域 D，但以它为中心的任意足够小的邻域总有区域 D 的点．区域 D 的边界点的全体称为区域D 的边界．譬如，圆域$|z|<1$ 的边界是圆周$|z|=1$.

定义 1-5 由区域 D 及其边界所组成的集合称为闭区域，记作 $\bar{D}$.

如满足不等式$|z|\leqslant 2$ 的点的集合是一个闭区域．

后面要用到如下的数学分析的概念：

在 $[\alpha, \beta]$ 上连续的实变量 t 的函数$z(t)$确定一条连续的曲线，函数$z(t)$的值称为曲线上的点的坐标，方程$z=z(t)$是曲线方程或称为参变量方程．

在每条曲线上都可确定两种方向中的一种，即或为参变量增加的方向，或为参变量减少的方向．在第一种情况下，$z(\alpha)$是曲线的起点，而 $z(\beta)$是它的终点．在第二种情况下相反．如果曲线的起点和终点重合，则称它是闭的．

只与一个参变量值相对应的点，称为简单点，与两个或更多个参变量的值相对应的点称为重点．仅由简单点组成的曲线（不含重点）称为简单曲线（或约当曲线）．

定义 1-6 区域 D 称为单连通的，如果属于 D 的任何一条简单闭曲线，在 D 内可以经过连续的变形而缩成一点．

从这个定义得出，如果区域是多连通的，那么它的边界不可能由一条简单闭曲线组成．

图 1-7 是单连通区域的例子，而图 1-8 则表示多连通区域．

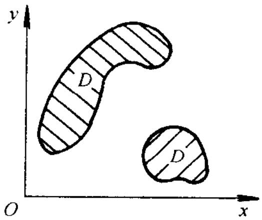

图 1-7

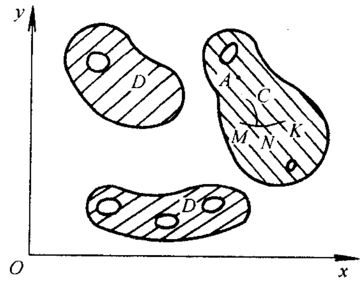

图 1-8

在今后将考虑区域边界是由一条或几条分段光滑的曲线所组成的情形，特别地还可能退化为一点．

例 1-1 把 $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 用三角式和指数式表示出来．

解 原式为代数式，因其模 $\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，辐角主值 $\varphi=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以指数式为 $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$；三角式为 $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$．

例 1-2 把 $\frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$ 用代数式、三角式和指数式表示出来．

解 简化原式，$\frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，此即代数式，因其模 $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，辐角主值 $\varphi=\arctan\left(\frac{-1}{1}\right)=\frac{3\pi}{4}$，所以，指数式为 $z=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$；三角式为 $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$．

例 1-3 把 $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$（$\alpha$ 是实常数）用代数式、三角式和指数式表示出来．

解 原式为代数式，其模 $\rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=2\sin\frac{\alpha}{2}$．因为 $\varphi=\arctan\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)=\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)$，$\tan\varphi=\cot\frac{\alpha}{2}$，所以辐角 $\varphi=\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}$，在主值范围内 $\varphi=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$．因此，其指数式为 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)}$ 或 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(\pi-\alpha)}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$；三角式为

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\arctan\cot\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

或

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\qquad(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$$

例 1-4 把 e^{1+i}用代数式、三角式和指数式表示出来．

解 原式$=e\times e^{i}$，此即为指数式．显然，其模 $\rho=e$，辐角主值 $\varphi=1$，所以其三角式为 $z=e\ (\cos1+i\sin1)$．再求其代数式，由 $z=x+iy$ 得

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}=e\\ \arctan(y/x)=1\end{cases}\quad \text{求出}\quad \begin{cases}x=\dfrac{e}{\sqrt{1+\tan^2 1}}=e\cos1\\ y=\dfrac{e\tan1}{\sqrt{1+\tan^2 1}}=e\sin1\end{cases}$$

因此 $z=e\cos1+ie\sin1$．

例 1-5 把$\dfrac{(\cos5\alpha+i\sin5\alpha)^2}{(\cos3\alpha-i\sin3\alpha)^3}$（$\alpha$ 是实常数）用代数式、三角式和指数式表示出来．

解法 1 原式$=\dfrac{\cos10\alpha+i\sin10\alpha}{\cos(-9\alpha)+i\sin(-9\alpha)}=\cos[10\alpha-(-9\alpha)]+i\sin[10\alpha-(-9\alpha)]=\cos19\alpha+i\sin19\alpha$，此即为三角式．显然，其模 $\rho=1$，辐角 $\varphi=19\alpha$，所以，其指数式为 $z=e^{i19\alpha}$，代数式为 $z=\cos19\alpha+i\sin19\alpha$．

解法 2 原式$=\dfrac{e^{i10\alpha}}{e^{-i9\alpha}}=e^{i19\alpha}$，此即为指数式．显然，其模 $\rho=1$，辐角 $\varphi=19\alpha$，所以，其三角式和代数式为 $z=\cos19\alpha+i\sin19\alpha$．

例 1-6 计算 $(-1+\sqrt{3}\,i)^{10}$

解 由例 1-1 及乘方定义，可得

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}\,i)^{10}&=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}\\&=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)\\&=1024\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=-512+512\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

例 1-7 计算 $[2\ (\cos25^\circ+i\sin25^\circ)]\ [5\ (\cos110^\circ+i\sin110^\circ)]$．

解 由复数的积的公式，可得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=10[\cos(25^\circ+110^\circ)+i\sin(25^\circ+110^\circ)]\\&=10(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)\\&=10\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i\end{aligned}$$

例 1-8 $0\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant1$ 在复数平面上具有怎样的意义？

解 因为 $z=x+yi$，$\mathrm{Re}z=x$，所以 $0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant1$ 即为 $0\leqslant x\leqslant1$．这在复平面上表示由直线 $x=0$ 与 $x=1$ 所构成的带状区域，并包括两条直线在内．

例 1-9 $2\leqslant|x|\leqslant3$ 在复平面上 z 具有怎样的意义？

解 因为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $2\leqslant|z|\leqslant3$ 即为 $2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant3$，亦即 $4\leqslant x^2+y^2\leqslant9$. 这在复平面上表示由圆周 $x^2+y^2=4$ 和圆周 $x^2+y^2=9$ 所围成的环形区域，并包括圆周在内（图 1-9）.

例 1-10 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 在复平面上具有怎样的意义？

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}&=\frac{x+\mathrm{i}\ (y-1)}{x+\mathrm{i}\ (y+1)}\\&=\frac{[x+\mathrm{i}\ (y-1)][x-\mathrm{i}\ (y+1)]}{[x+\mathrm{i}\ (y+1)][x-\mathrm{i}\ (y+1)]}\\&=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+\ (y+1)^2}+\mathrm{i}\frac{-2x}{x^2+\ (y+1)^2}\\&=X+\mathrm{i}Y=Z\end{aligned}$$

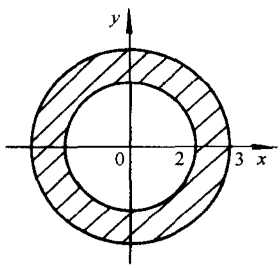

图 1-9

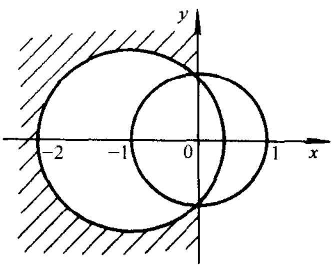

图 1-10

所以，原式即 $0<\arg Z<\dfrac{\pi}{4}$. 如以 X 轴为实轴，Y 轴为虚轴，上式在复平面 Z 上表示由射线 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 所围成的区域（不包括射线本身），这就意味着要求 $X>0$ 和 $Y>0$，即要求 $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+\ (y+1)^2}>0$ 和 $\dfrac{-2x}{x^2+\ (y+1)^2}>0$. 亦即

$$\begin{cases}x<0\\x^2+y^2-1>0\end{cases}\qquad ①$$

上式表示复平面 z 上的左半平面 $x<0$，但除去单位圆及其内部.

又由 $0<\arg Z<\dfrac{\pi}{4}$ 得 $0<\arctan\left(\dfrac{Y}{X}\right)<\dfrac{\pi}{4}$，即 $0<\arctan\left(\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}\right)<\dfrac{\pi}{4}$，亦即 $0<\dfrac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$，考虑到式①，则

$$\begin{cases}-2x>0\\-2x<x^2+y^2-1\end{cases}\quad 即\begin{cases}x<0\\x^2+y^2+2x-1>0\end{cases}\qquad ②$$

在 $x<0$ 的条件下，凡满足 $x^2+y^2+2x-1>0$ 的点必定也满足 $x^2+y^2-1>0$. 所以，无需单独提出，而式②表示复平面 z 上的左半平面 $x<0$，但除去圆周 $(x+1)^2+y^2=2$ 及其内部（图 1-10）.

注意 应排除 $\begin{cases} x<0 \\ x^2+y^2-1<0 \end{cases}$ 及 $(x+1)^2+y^2<2$（这相当于 $X<0$，$Y<0$，即 $\pi<\Phi<\dfrac{5\pi}{4}$，$\pi<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{5\pi}{4}$）确定的解 .

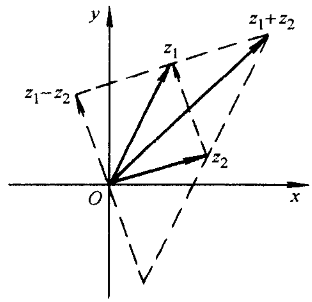

图 1-11

例 1-11 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ 在复数平面上具有怎样的意义？

解 因为

$$\begin{aligned}
&|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2\\
=&(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\
=&2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2\\
=&2|z_1|^2+2|z_2|^2
\end{aligned}$$

所以这是一个恒等式，对于复平面中任意的 z_1 和 z_2 都成立 . 它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边的平方和的两倍 .

如把 z_1 和 z_2 表示成复平面上的向量，那么 z_1 和 z_2 的加减运算与相应的向量的加减运算（平行四边形法则）是相同的，这可由图 1-11 清楚地看出 .

典型计算题 1

求下列根式的值

1\. $\sqrt[4]{-1}$　　2. $\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}}$　　3. $\sqrt[3]{1}$

4\. $\sqrt[2]{\mathrm{i}}$　　5. $\sqrt[4]{1}$　　6. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}}$

7\. $\sqrt[3]{-1}$　　8. $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$　　9. $\sqrt[4]{-16}$

10\. $\sqrt[4]{\dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{32}}$　　11. $\sqrt[3]{8}$　　12. $\sqrt[3]{8\mathrm{i}}$

13\. $\sqrt[4]{16}$　　14. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{32}}$　　15. $\sqrt[3]{-8}$

16\. $\sqrt[3]{-8\mathrm{i}}$　　17. $\sqrt[4]{-1/16}$　　18. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$

19\. $\sqrt[3]{1/8}$　　20. $\sqrt[3]{\mathrm{i}/8}$　　21. $\sqrt[4]{1/16}$

22. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$　　23. $\sqrt[2]{-1/8}$　　24. $\sqrt[3]{-1/8}$

25. $\sqrt[4]{-128+128\sqrt{3}\,i}$　　26. $\sqrt[3]{27}$　　27. $\sqrt[4]{1/256}$

28. $\sqrt[4]{-128-128\sqrt{3}\,i}$　　29. $\sqrt[3]{i/27}$　　30. $\sqrt[4]{256}$

31. $\sqrt[3]{-27i}$

典型计算题 2

画出由不等式所确定的平面区域

1. $|z-1|\leqslant 1$, $|z+1|>2$　　2. $|z+i|\geqslant 1$, $|z|<2$

3. $|z-i|\leqslant 2$, $\mathrm{Re}z>1$　　4. $|z+1|\geqslant 1$, $|z+i|<1$

5. $|z+1|<1$, $|z-i|\leqslant 1$　　6. $|z+i|\leqslant 2$, $|z-i|>2$

7. $|z-1-i|\leqslant 1$, $\mathrm{Im}z>1$, $\mathrm{Re}z\geqslant 1$

8. $|z-1+i|\geqslant 1$, $\mathrm{Re}z<1$, $\mathrm{Im}z\leqslant -1$

9. $|z-2-i|\leqslant 2$, $\mathrm{Re}z\geqslant 3$, $\mathrm{Im}z<1$

10. $|z-1-i|\geqslant 1$, $0\leqslant \mathrm{Re}z<2$, $0<\mathrm{Im}z\leqslant 2$

11. $|z+i|<2$, $0<\mathrm{Re}z\leqslant 1$　　12. $|z-i|\leqslant 1$, $0<\arg z<\pi/4$

13. $|z-i|<2$, $0<\mathrm{Im}z<2$　　14. $|z+i|>1$, $-\pi/4\leqslant \arg z<0$

15. $|z-1-i|<1$, $|\arg z|\leqslant \pi/4$　　16. $|z|<2$, $-\pi/4\leqslant \arg(z-1)\leqslant \pi/4$

17. $|z|\leqslant 1, \arg(z+i)>\pi/4$　　18. $1<|z-1|\leqslant 2, \mathrm{Im}z\geqslant 0, \mathrm{Re}z<1$

19. $1\leqslant |z-i|<2, \mathrm{Re}z\leqslant 0, \mathrm{Im}z>1$

20. $|z|<2, \mathrm{Re}z\geqslant 1, \arg z<\pi/4$

21. $|z|>1, -1<\mathrm{Im}z\leqslant 1, 0<\mathrm{Re}z\leqslant 2$

22. $|z-1|>1, -1\leqslant \mathrm{Im}z<0, 0\leqslant \mathrm{Re}z<3$

23. $|z+i|<1, -3\pi/4\leqslant \arg z\leqslant -\pi/4$

24. $|z-i|\leqslant 1, -\pi/2<\arg(z-i)<\pi/4$

25. $z\bar{z}<2, \mathrm{Re}z\leqslant 1, \mathrm{Im}z>-1$

26. $z\bar{z}\leqslant 2, \mathrm{Re}z<1, \mathrm{Im}z>-1$

27. $1<z\bar{z}<2, \mathrm{Re}z>0, 0\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant 1$

28. $|z-1|<1, \arg z\leqslant \pi/4, \arg(z-1)>\pi/4$

29. $|z-i|<1, \arg z\geqslant \pi/4, \arg(z+1-i)\leqslant \pi/4$

30. $|z-2-i|\geqslant 1, 1\leqslant \mathrm{Re}z<3, 0<\mathrm{Im}z\leqslant 3$

31. $|\mathrm{Re}z|\leqslant 1, |\mathrm{Im}z|<2$