“3＋2”

1995

高考复习精编

本书编写组

数学

新世界出版社

"3+2"

1995高考复习精编

数　学

本 书 编 写 组

新 世 界 出 版 社
·北　京·

新登字（京）136号

图书在版编目（CIP）数据

“3+2”1995高考复习精编：数学

《“3+2”1995高考复习精编》编写组编

—北京：新世界出版社，1994.8

ISBN 7—80005—237—0

Ⅰ.3

Ⅱ.“…

Ⅲ.数学--高中—升学参考资料

Ⅳ.G634.6

“3+2”1995高考复习精编：数学

《“3+2”1995高考复习精编》编写组编

新世界出版社出版

（北京百万庄路24号　邮政编码100037）

新华书店北京发行所发行

北京市银祥福利印刷厂印刷

32开本　315千字

14.5印张　印数：1—15000册

1994年8月第一版第一次印刷

ISBN7—80005—237—0／G·024

定价：8.90元

前　言

科学方法引导下的复习是考试成败的关键。

“3＋2”形式高考是国家教委在总结过去许多科目一轰而上、不分主次，造成学生精力过于分散抓不住重点、偏科等现象惨痛教训基础上进行教育改革的重要举措。一项改革的出台必然伴随着各种意想不到问题的出现。为了使学生能顺利地适应这种新的考试制度，本书大量收集了九四年高考模拟试题，汲取了京津沪部分重点中学这方面的成功经验，翻阅了国家教委一系列文件精神编写了本书。目的在于减轻学生学习负担，科学、有效地利用学习时间，培养学生举一反三、触类旁通的解决实际问题的能力，提高学生学习效率，在“3＋2”道路上顺利进入坦途。

全书共五种：语文、数学、物理、化学、英语。本书在编写中紧紧围绕新大纲中各科目对高中毕业生所应掌握知识的要求，参照《现行普通中学生教学计划调整意见》，大量扩充了历届高考中搜集的具有代表性的题目，用易于学生接受的简捷的解题方法进行剖析、讲解，练习题是由作者们在多年教学中发现和总结出的学生最易忽视，也是最易出现错误的知识点精心设计的题目组成，中间不乏有一定难度、综合性较强的习题，形式上尽量加大了标准化试题所占比例，本书最后安排的几套全真模拟试题更是把全书推向一个高潮。认真阅读本书，可以使同学们置身高考而能挥洒自如。

作为“3＋2”考试制度的进一步尝试，本书难免有不足之处，敬请给予指正。

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.c

第一章　函数的基础知识

知 识 要 点

函数的定义。$f(x)$中"f"的含义复合函数、反函数。

例 题 选 析

一、函 数 定 义

函数是指从非空集合 A 到非空集合 B 上的一种映射 f：$A \to B$。这里"上"是指集合B中的元素在集合A中都有原象，也就是说A中所有元素的象要充满集合B。这里应深刻理解函数就是揭示了两个非空集合元素间的一种特殊的对应关系，即对于集合A中的每一个元素x，在对应法则f的作用下，在集合B中都有唯一确定的元素y与之对应。这种集合A到集合B的特殊对应关系"f"，就叫做定义在A上的变量x的函数，记作$y=f(x)$。其中原象集A叫做函数的定义域，象集B叫做函数的值域。

从定义可知，对于一个函数，定义域和对应规律"f"一旦确定了，这个函数也就唯一的被确定了，同时，这个函数的值域也就被确定了，所以我们通常把函数的定义域和对应规律叫做函数的两大要素。从而得出，若比较两个函数是否相同，那就看这两个函数的定义域和对应规律是否相同，如果两个函数的定义域和对应规律均相同，那么这两个函数就是同一函数；否则，两个函数就不是同一个函数。例如，在 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$和$g(x)=x$中，$f(x)$可化为$f(x)=x$，($x\in R$ 且 $x\neq 0$)。由此可

以看出，$f(x)$和$g(x)$的对应规律是相同的，但由于$f(x)$和$g(x)$的定义域不同，所以$f(x)$、$g(x)$仍表示两个不同的函数。

由于函数的值域在函数及其应用中占有重要地位，所以通常我们又把函数的定义域，对应规律和值域称为函数的三大要素。

在函数$y=f(x)$中，"f"的含义是作用于小括号中变量x的对应规律，其表示形式有三种，即(1) 图象；(2) 表标；(3) 运算及其运算规律。这样就引出了函数的三种表达形式，特别是当"f"表示施加于x上的运算及其运算规律时，这里的x是代表了小括号（　）这个整体，有时这个整体就是一个简单的字母x，有时这个整体是一个较复杂的函数式，也就是说"f"是施加于小括号里整数学表达式的运算及运算规律，如$f(u)=u^2+1$，则$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1$。

我们经常碰到已知$f(u)=g(x)$，其中$u=\phi(x)$，求$f(x)$的问题。

例1 已知$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求$f(x)$。

分析 "f"是施加于$\frac{x+1}{x}$的运算及其规律，求f的关键就是把$\frac{x^2+1}{x^2}+1$写成关于$\frac{x+1}{x}$的表达式。

解一 $\because$ $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+2x+1-2x}{x^2}+\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1-x}{x}$

$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1}{x}+1$

$\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$。

说明 以上方法是根据定义观察出对应规律"f"，称之为观察法。通常，使用换元法是发现"f"的常用方法。

解二 令$u=\dfrac{x+1}{x}$，解得$x=\dfrac{1}{u-1}$，代入原式

$$f(u)=\frac{\dfrac{1}{(u-1)^2}+1}{\dfrac{1}{(u-1)^2}}+u-1$$

整理得 $f(u)=u^2-u+1$

所以 $f(x)=x^2-x+1$。

例2 已知$f(10^x)=2x-3$，求$f(x)$。

解 令 $10^x=u$，则$x=\lg u$，代入原式

$f(u)=2\lg u-3$

所以 $f(x)=2\lg x-3$

例3 已知 $3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求$f(x)$。

解 由已知可知$x\neq0$，把原式中的x换成$\dfrac{1}{x}$得

$$\begin{cases}3f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{3}{x}\\3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x\end{cases}$$ 解得$f(x)=\dfrac{3(3x^2-1)}{8x}$。

例4 求实系数一次函数$f(x)$，使$f[f[f(x)]]=8x+7$。

解 设$f(x)=ax+b(a,\ b\in R$，且$a\neq0)$，代入$f[f[f(x)]]=8x+7$。

$a^3x+a^2b+ab+b=8x+7$

$\therefore\begin{cases}a^3=8\\a^2b+ab+b=7\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

所求函数是：$f(x)=2x+1$。

例5 已知 $f(x)$定义域为R，$f(0)=1$，$f(a-b)=f(a)$

$-b(2a-b+1)$，求$f(x)$。

解 令$a=0$，代入原式

$$f(-b)=f(0)-b(-b+1)=b^2-b+1$$

令$-b=x$、$f(x)=x^2+x+1$

说明 求$f(x)$就是求对应规律"f"，常用的方法有：(1)观察法；(2)换元法；(3)代换消元法（如例3）；(4)待定系数法。

二、布列函数式

布列函数式是巩固函数概念的很好的练习，而且是应用函数解决实际问题的关键性的一步，必须熟练掌握。

例6 甲以每小时6公里的速度用两小时由A城到达B城，在B城休息1小时后再以每小时4公里的速度返回到A城，试写出甲在运动过程中到A城的距离s与运动时间t的函数关系式，并画出图象。

解
$$s(t)=\begin{cases}6t, & t\in[0,\ 2]\\ 12, & t\in[2,\ 3]\\ 12-4(t-3), & t\in[3,6]\end{cases}$$

其图象见图 1-1。

例7 两点M和N同时从边长为1个单位长的正$\triangle ABC$的顶点A出发，分别以每秒1和$\frac{2}{3}$个单位长的速度沿AB和AC运动，然后分别在B和C点拐向BC线段，到它们相遇为止，将M、N两点间的距离s表示成时间t的函数（图 1-2）。

解 注意到：当M在AB上运动时，即$0\leqslant t\leqslant 1$时，计算MN应根据图 1-2中$\triangle AMN$；当M拐入BC，而N仍在AC上时，即$1<t\leqslant\frac{3}{2}$时，应根据$\triangle CMN$计算MN；当M、N均在

BC上运动时，则变成相向运动。所以

$$S=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{7t^2}}{3}, & (0\leqslant t\leqslant 1)\\ \sqrt{\dfrac{7}{9}t^2-3t+3}, & \left(1<t\leqslant\dfrac{3}{2}\right)\\ 3-\dfrac{5}{3}t, & \left(\dfrac{3}{2}<t\leqslant\dfrac{9}{5}\right)\end{cases}$$

说明　写出函数包含两层意思，一是写出函数式，二是写出定义域。

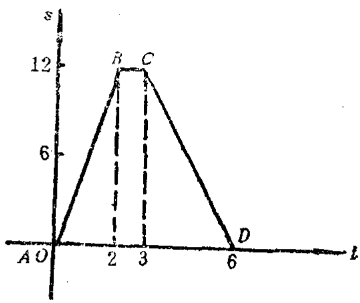

图 1-1

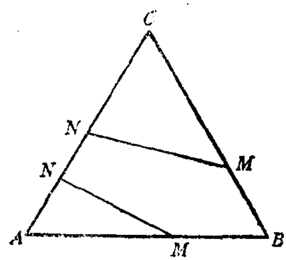

图 1-2

三、复　合　函　数

复合函数是高中函数中常见的，而课本中又没讲的一种很重要的函数，本书着重介绍复合函数的定义、定义域和值域的求法。

1．复合函数的定义

我们在课本中常见到下列一些函数：$y=(\lg x)^2$；$y=\sqrt{x^2+2x+3}$；$y=\dfrac{x}{x+1}$；……，如果我们把这些函数分解一下，不难发现它们都是用几个基本函数串联而成的。

在$y=(\lg x)^2$中，令$u=\lg x$，定义域$M=R^+$，值域为$Q=k$；则$y=u^2$，定义域为$Q=R$，值域为$G=\overline{R^-}$。于是我们可把函

数$y=(\lg x)^2$理解为它是两个基本函数$u=\lg x$和$y=u^2$通过下面的映射而得到，即对于集合M中的任意一个x值，通过对数运算，在集合Q中就有唯一确定的u与之对应；对于集合Q中这样一个确定的u，通过平方运算，在集合G中就有唯一确定的y值与u对应。

这样一来就有：对于集合M中任意的一个x值，通过对数运算、平方运算及变量u的传递，在集合G中就有唯一确定的y值与之对应，于是y就是x的函数。象这样串联而成的函数就叫做复合函数，一般定义是：

如果y是u的函数$y=f(u)$，$u\in Q$时，$y\in G$；u又是x的函数$u=g(x)$，$x\in M$时，$u\in Q$，那么对于M中的每一个x值，在法则g、f的作用下并通过变量u的传递，在G中就有唯一确定的y值与之对应，于是y也就是x的函数。这样串联而成的函数就叫做这两个函数的复合函数，记作$y=f[g(x)]$，其中$u=g(x)$叫做复合函数的内函数，函数$y=f(u)$叫做复合函数的外函数，集合M叫做复合函数的定义域，集合G叫做复合函数的值域（见图 1-3）。

如果函数$u=g(x)$的定义域记作D_g，值域记作R_g；函数$y=f(u)$的定义域记作D_f，值域记作R_f，那么只有当$D_f\cap R_g\neq\phi$时，两个函数才能复合，其复合函数$y=f[g(x)]$的定义域就是$R_g\cap D_f$在D_g中的原象集合，记作M，也就是定义域M；复合函数的值域就是$R_g\cap D_f$在R_f中的象集，如图 1-4 所示。

一般情况下，复合函数的定义域是内函数在复合前的定义域D_g的子集，求出这子集的方法是由满足$u\in D_f$的不等式求出相应的x值的集合，例如，$y=f(u)$的定义域设为$4\leqslant u\leqslant 9$，函数$u=g(x)=x^2$的定义域为R，值域为$\overline{R^-}$，其复合函数$y=f(x)^2$的定义域由$4\leqslant x^2\leqslant 9$求得$2\leqslant x\leqslant 3$或$-3\leqslant x\leqslant -2$，即$x\in[-3,\ -2]\cup[2,\ 3]$。基于这样一种理解，一些求复合函

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

数外函数的题就不再求出由内函数值域确定的定义域，如例1和例2。

例8　求出下列函数的定义域：

(1) $y=\lg\frac{1}{x}$；　　(2) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2}$，

解　对(1)，所求定义域由下列不等式确定。

$\lg\frac{1}{x}>0$，　∴　$\frac{1}{x}>1$，∴　$0<x<1$，即所求。

对(2)，所求定义域由下列不等式确定。

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2\geqslant 0$$

∴　$\log\frac{1}{2}(x-1)\geqslant -2$

∴　$0<x-1\leqslant 4$　∴　$1<x\leqslant 5$.

所求定义域为$x\in(1,\ 5]$。

说明　通过上面例题得出的复合函数定义域的求法就是根据外函数的要求布列关于内函数的不等式解之即可。

2．复合函数值域的求法

例9　求下列函数的值域：

(1) $y=\log_2(-x^2-x+6)$；　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$

解　对(1)，由$-x^2-x+6>0$，求得$-3<x<2$。

令$u=-x^2-x+6=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\leqslant\frac{25}{4}$

∴　$-3<x<2$时有

$$0<u\leqslant\frac{25}{4}$$

∴　$-\infty<\log_2(-x^2-x+6)\leqslant\log_2\frac{25}{4}$

即所求值域是 $y\in\left(-\infty,\ \log_2\frac{25}{4}\right]$.

对(2)，令　$u=x^2-2x$，　$x\in R$，则$y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$

∵　$x\in R$

∴　$u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，即$u\in[-1,\ +\infty)$

又　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$在$[-1,\ +\infty)$上递减，

∴　$0<\left(\frac{1}{3}\right)^u\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

∴　$0<y\leqslant3$

所求值域为$y\in(0,\ 3]$。

说明　由此例可知求复合函数的基本方法是：先求出函数的定义域，然后求出内函数的值域，根据内函数的值域再求出外函数值域即可。

例10　求下列函数的值域：

(1)　$y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$；　　(2)　$y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}$；

(3)　$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$。

上述三题初看起来不易发现是复合函数，仔细观察，经过变形即可发现其复合过程。

解　对(1)，$y=\dfrac{\sqrt{x}-1+2}{1-\sqrt{x}}=-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$，

函数定义域为$[0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$。

∴$\sqrt{x}\in[0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$

∴　$-\sqrt{x}\in(-1,\ 0]\cup(-\infty,\ -1)$

∴　$1-\sqrt{x}\in(0,\ 1]\cup(-\infty,\ 0)$

∴　$\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\in[1,\ +\infty)\cup(-\infty,\ 0)$

∴　$-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{x}}\in[1,\ +\infty)\cup(-\infty,\ -1)$

所求值域是$y\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$。

说明 复合函数值域基本求法可进一步概括为：从定义域出发，由里往外逐层求出每层内函数的值域，直到最外层的函数为止，即所求复合函数的值域。如果某层内函数值域较易求出，也可以由此出发求出复合函数值域。

对(2)，$y=\dfrac{x^2+x-2+2}{x^2+x-2}=1+\dfrac{2}{x^2+x-2}$

令$u=x^2+x-2$，显然$u\neq0$，

且 $u=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\geqslant-\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ u\in\left[-\dfrac{9}{4},0\right)\cup(0,+\infty)$

$\therefore\ \dfrac{1}{u}\in\left(-\infty,-\dfrac{4}{9}\right]\cup(0,+\infty)$

$\therefore\ \dfrac{2}{u}\in\left(-\infty,-\dfrac{8}{9}\right]\cup(0,+\infty)$

$\therefore\ 1+\dfrac{2}{u}\in\left(-\infty,\dfrac{1}{9}\right]\cup(1,+\infty)$

所求值域为 $y\in\left(-\infty,\dfrac{1}{9}\right]\cup(1,+\infty)$。

对(3) $y=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-4)(x-1)}=\dfrac{x+1}{x-4}$

$$=1+\frac{5}{x-4}(x\neq1)$$

函数定义域为$x\in R$且$x\neq4$且$x\neq1$，即

$x\in(-\infty,1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$

$\therefore\ x-4\in(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,+\infty)$

$\therefore\ \dfrac{1}{x-4}\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(0,+\infty)$

$\therefore\ \dfrac{5}{x-4}\in\left(-\dfrac{5}{3},0\right)\cup\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right)\cup(0,+\infty)$

$\therefore \quad 1+\frac{5}{x-4}\in\left(-\frac{2}{3},\ 1\right)\cup\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

所求值域为 $\quad y\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},\ 1\right)$

$\cup(1,+\infty)$

例11　求下列函数的值域：

(1) $y=x-\sqrt{1-x}$；　(2) $y=2x-7+\sqrt{5-x}$；

(3) $y=\sqrt{1-x^2}+2x$。

分析　初看不易发现是复合函数，如果我们进一步观察发现这三个函数都是无理函数，联想到我们学过的二次函数及其他一些有理函数、超越函数的值域求法，于是想到可否将其转化为有理函数或其易于求值域的函数，显然用换元法就可完成这样一个转化，故有如下解法。

解　对(1)，令 $\sqrt{1-x}=t$，则$t\geqslant0$，原函数化为

$y=-t^2-t+1$。

$\therefore \quad y=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$\because \quad t\geqslant0$。又 $y=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$在$[0,\ +\infty)$上递增，

$\therefore$　当$t\geqslant0$时，$y\in(-\infty,\ 1]$

由图 1-3 更易得知$y\in(-\infty,\ 1]$

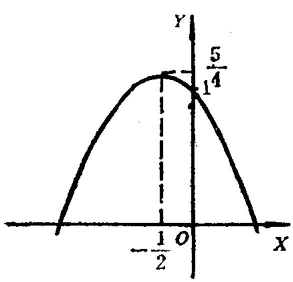

图 1-3

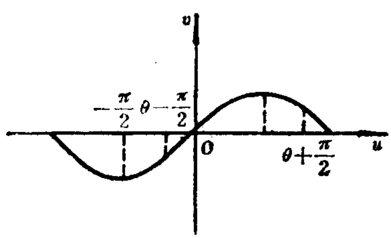

图 1-4

对（2），令 $\sqrt{5-x}=t$，则$t\geqslant 0$，原函数化为：

$$y=-2t^2+t+3$$
$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$$

$\because$ $t\geqslant 0$ $y\in\left(-\infty,\ \frac{25}{8}\right]$

所求值域为 $y\in\left(-\infty,\ \frac{25}{8}\right]$。

对(3)，函数定义域$x\in[-1,\ 1]$。

令 $x=\sin t$，即$t=\arcsin x$

$\because$ $x\in[-1,\ 1]$，$\therefore$ $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

原函数化为

$y=\cos t+2\sin t=\sqrt{5}\sin(t+\theta)$，（其中$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\theta$为锐角）

再令 $u=t+\theta$，$\therefore$ $y=\sqrt{5}\sin u$

又令 $v=\sin u$，$\therefore$ $y=\sqrt{5}v$

所以原来函数是由四个基本函数 $y=\sqrt{5}v$，$v=\sin u$，$u=t+\theta$，$t=\arcsin x$依次复合而成。

$\because$ $x\in[-1,\ 1]$

$\therefore$ $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ $t+\theta\in\left[\theta-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\theta\right]$

由图1-4可知，$v\in\left[\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),1\right]$，即$v\in[-\cos\theta,\ 1]$，

也就是$v\in\left[-\frac{2}{\sqrt{5}},1\right]$，所以，$y=\sqrt{5}v\in[-2,\ \sqrt{5}]$。

所求函数的值域为 $y\in[-2, \sqrt{5}]$。

说明 通过换元法将一个函数转化为标准的复合函数，是求函数值域的一个重要方法。而更重要的是“转化”的观点，这里换元仅仅是转化的一个方法，例10将分式化为部分分式也是转化的一个方法。

四、反 函 数

1. 反函数概念

如果确定函数$y=f(x)$的映射$f: A\to B$是由定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射$f^{-1}: B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$就叫做函数$y=f(x)$的反函数，其定义域是B，值域是A，习惯记为$y=f^{-1}(x)$，$(x\in B)$。

这里应特别指出$x=f^{-1}(y)$。$(y\in B)$和$y=f^{-1}(x)$ $(x\in B)$都是$y=f(x)$的反函数，而且是完全相同的一个函数的两种不同的表达形式，为什么呢？我们知道判断两个函数是否是同一个函数有三条，一看定义域是否相同；二看对应规律是否相同；三看值域是否相同。如果三条都相同我们就说两个函数是完全相同的，其实质上就是看前两条。

设$y=f(x)$的定义域为A，值域为B，则反函数$x=f^{-1}(y)$和$y=f^{-1}(x)$的对应规律“f^{-1}”都是确定函数$y=f(x)$的一一映射，$f: A\to B$的逆映射$f^{-1}: B\to A$的对应规律“f^{-1}”；两个函数的定义域都是原来函数$y=f(x)$的值域B，值域都是原来函数的定义域，所以我们说$x=f^{-1}(y)(y\in B)$和$y=f^{-1}(x)(x\in B)$是同一个函数。至于一个函数的自变量和因变量分别用什么字母表示并不能改变函数关系的实质。

一般习惯上总是把$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(x)$中的自变量改写成x，而把因变量改写成y，从而产生了$f(x)$的反函数

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c