

线性代数 概率论 与数理统计

经济管理
数学基础

2

刘正根 倪训芳 主编
西南财经大学出版社

线性代数、概率论与数理统计 经济管理数学基础 (2)

主编 刘正根 倪训芳

西南财经大学出版社

责任编辑：杨 涛

封面设计：潘令宇

线性代数、概率论与数理统计

刘正根



西南财经大学出版社出版
四川省新华书店经销

西南财经大学出版社发行
绵竹县教育印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32 印张 21 字数 470千字

1990年7月第一版

1990年7月第一次印刷

印数：1—10000册

书号：ISBN7—81017—233—6/F·171

定价：6.40元

前 言

线性代数、概率论与数理统计是经济管理数学的两个分支学科，在经济类专业中是作为一门基础工具课出现的。从事实际业务或经济理论研究的经济工作者，掌握它是非常必要和大有裨益的。

本书是受四川省高等教育自学考试委员会委托编著的《经济管理数学基础(2)》。它是经济类专业成人自学考试的必读教材。同时亦可作为经济院校本科、专科及电大学生的教材或参考书。

全书分两篇，第一篇：线性代数；第二篇：概率论与数理统计。主要介绍各分支学科中最基本的理论、方法及其应用。根据经济专业的特点和要求，对各种方法作了详尽的介绍并辅以实例，且各章配有适量习题作为理解概念和掌握方法的补充。书后附有习题答案。并兼出习题解答作为配套，另册发行。

执笔编写线性代数的有耿华、孙西芄、孙瞳明、杨世容，由倪训芳同志总纂。

编写概率论与数理统计的有杜之韩、涂晓青、杨任德、李恒琦，由刘正根同志总纂。

限于编者水平不高，经验不足，书中缺点、错误难免出现。恳请读者批评指正。

编者

1989年12月于光华园

目 录

第一篇 线性代数

第一章	行列式	(1)
§1.1.	排列与对换.....	(1)
§1.2.	n 阶行列式的概念.....	(5)
§1.3.	行列式的性质.....	(17)
§1.4.	行列式按行(或列)展开.....	(28)
§1.5.	克莱姆法则.....	(36)
	习题一.....	(45)
第二章	矩阵	(53)
§2.1.	矩阵的概念.....	(53)
§2.2.	矩阵的运算.....	(58)
§2.3.	几种特殊的矩阵.....	(72)
§2.4.	逆矩阵.....	(75)
§2.5.	分块矩阵.....	(83)
§2.6.	矩阵的初等变换.....	(91)
	习题二.....	(111)
第三章	向量及向量间的关系	(119)
§3.1.	向量的概念及其运算.....	(121)
§3.2.	向量组的线性相关性.....	(128)

§3.3.	向量组的极大无关组及秩	(144)
§3.4.	矩阵的秩	(148)
§3.5.	n 维向量空间	(158)
	习题三	(162)
第四章	线性方程组	(171)
§4.1.	线性方程组的解的判定	(171)
§4.2.	齐次线性方程组解的结构	(182)
§4.3.	非齐次线性方程组解的结构	(193)
	习题四	(201)
第五章	矩阵的特征根与二次型	(207)
§5.1.	矩阵的特征根与特征向量	(207)
§5.2.	矩阵与对角形矩阵相似的条件	(217)
§5.3.	二次型	(241)
	习题五	(267)

第二篇 概率论与数理统计

第一章	随机事件及其概率	(273)
§1.1.	随机事件及其概率	(273)
§1.2.	样本空间及事件的运算	(276)
§1.3.	古典概型	(286)
§1.4.	概率加法定理	(290)
§1.5.	条件概率及概率乘法定理	(294)
§1.6.	全概公式	(299)

§1.7.	贝叶斯公式	(302)
§1.8.	事件的独立性	(305)
§1.9.	贝努里概型	(310)
	习题一	(313)
第二章	随机变量及其分布	(319)
§2.1.	随机变量的概念	(319)
§2.2.	离散型随机变量的分布	(322)
§2.3.	常见的离散型分布	(325)
§2.4.	分布函数	(333)
§2.5.	连续型随机变量的分布	(337)
§2.6.	常见的连续型分布	(341)
§2.7.	随机变量函数的分布	(352)
	习题二	(356)
第三章	随机变量的数字特征	(360)
§3.1.	随机变量的数学期望	(360)
§3.2.	随机变量函数的数学期望	(367)
§3.3.	随机变量的方差	(372)
	习题三	(379)
第四章	二维随机变量及其分布	(382)
§4.1.	二维随机变量及其分布	(382)
§4.2.	二维离散型随机变量	(387)
§4.3.	二维连续型随机变量	(393)
§4.4.	条件分布	(400)

§4.5.	随机变量的独立性.....	(405)
§4.6.	二维随机变量的数字特征.....	(409)
	习题四.....	(415)
第五章	中心极限定理.....	(420)
§5.1.	车贝谢夫不等式.....	(420)
§5.2.	大数定律.....	(423)
§5.3.	中心极限定理.....	(428)
	习题五.....	(435)
第六章	样本及其分布.....	(437)
§6.1.	总体及样本.....	(437)
§6.2.	样本分布函数.....	(440)
§6.3.	样本分布的数字特征.....	(443)
§6.4.	几个常用统计量的分布及密度函数.....	(448)
	习题六.....	(455)
第七章	参数估计.....	(457)
§7.1.	估计量的评选标准.....	(457)
§7.2.	点估计.....	(462)
§7.3.	区间估计.....	(472)
§7.4.	(0—1)分布参数的区间估计.....	(487)
§7.5.	单侧置信限.....	(490)
	习题七.....	(491)
第八章	假设检验.....	(496)
§8.1.	假设检验的基本思想.....	(496)
§8.2.	一个正态总体的假设检验.....	(500)

§8.3.	两个正态总体的假设检验	(508)
§8.4.	非参数的假设检验	(517)
	习题八	(526)
第九章	方差分析	(530)
§9.1.	方差分析概念	(530)
§9.2.	单因素方差分析	(531)
§9.3.	双因素方差分析	(551)
	习题九	(563)
第十章	回归分析	(566)
§10.1.	相关与回归概念	(566)
§10.2.	一元线性回归方程	(568)
§10.3.	一元线性回归的方差分析	(574)
§10.4.	可线性化的回归方程	(587)
§10.5.	多元线性回归分析	(594)
	习题十	(604)
附表:		
附表一、	泊松概率分布表	(608)
附表二、	标准正态分布函数表	(610)
附表三、	t 分布双侧临界值表	(612)
附表四、	χ^2 分布的上侧临界值 χ^2_{α} 表	(614)
附表五、	F 分布上侧临界值表	(618)
附表六、	检验相关系数的临界值表	(620)
附表七、	符号检验表	(624)
习题答案		(628)

第一章 行列式

行列式是线性代数中的一个基本内容，也是研究线性代数的一个重要工具。本章将在复习二阶、三阶行列式的基础上，讨论以下三个问题：

1. n 阶行列式的概念；
2. n 阶行列式的性质及计算方法；
3. 应用 n 阶行列式解 n 元线性方程组。

§1.1 排列与对换

定义1.1 由 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个不同的数码组成的一个有序数组称为一个 n 级排列，简称排列。一般记作 $i_1 i_2 \dots i_n$ 。

例如， $3\ 4\ 2\ 1$ 是一个四级排列， $2\ 5\ 1\ 4\ 3$ 、 $5\ 4\ 3\ 2\ 1$ 都是五级排列。显然， $1\ 2\ \dots\ n$ 是一个 n 级排列，由于它具有自然顺序，也就是按递增的顺序排列起来的，因此又称它为自然排列。

定理1.1 n 级排列共有 $n!$ 个。

因为第一个位置可从 n 个数码中任取一个来排，共有 n 种方法；第二个位置只能在剩下的 $n-1$ 个数码中任取一个来排，共有 $n-1$ 种方法；如此继续下去，到最后一个位置，即第 n 个位置，只剩下一个数码，只有一种方法。故一共有

$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$ 种排法。

例如三级排列共有 $3! = 6$ 个, 它们是 $123, 132, 213, 231, 312, 321$ 。

定义1.2 在一个 n 级排列中, 如果某两个数 (不一定相邻) 的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 则称这两个数组成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 。

例如 2413 中, $21, 41, 43$ 是逆序, 2413 的逆序数是 3 , 即 $\tau(2413) = 3$; 又如 12345 中没有逆序, 12345 的逆序数是 0 , 即 $\tau(12345) = 0$ 。

定义1.3 逆序数为偶数或零的排列称为偶排列; 逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例1 求排列 32514 的逆序数, 并确定其奇偶性。

解 根据排列的逆序数定义, 从排列的左起第一个数开始, 计算它后面比它小的数的个数, 顺次计算到排列的最后一个数为止, 再把这些个数加起来, 就得到这个排列的逆序数。

$$\text{则 } \tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$$

所以, 32514 是奇排列。

例2 试求 i, j , 使 $1274i56j9$ 成偶排列。

解 $1274i56j9$ 是一个九级排列, 应由 $1, 2, 3, \dots, 9$ 这九个数码组成, 现缺数码 3 和 8 。因此只需要考虑 i 和 j 的位置上怎样安排 3 和 8 , 使排列的逆序数为偶数即可。

(1) 当 $i=3, j=8$ 时

$$\tau(127435689) = 4 + 1 = 5$$

(2) 当 $i=8, j=3$ 时

$$\tau(127485639) = 4 + 1 + 3 + 1 + 1 = 10$$

所以, 127485639 是偶排列。

定义 1.4 把一个排列中某两个数码的位置互换, 而其余的数码不动, 就得到另一个排列。这样一个变换称为一个对换。相邻两个数码的对换称为相邻对换。

例如, 经过 1, 4 对换, 排列 21345 就变成了 24315; 排列 1432 就变成了 4132。

定理 1.2 对换改变排列的奇偶性。即经过一个对换, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列。

证明 先证相邻对换的情形:

设排列

$$\dots i j \dots \quad (1.1)$$

经过 i, j 对换变成

$$\dots j i \dots \quad (1.2)$$

这里“...”表示那些不动的数码。比较上面两个排列中的逆序, 显然, 在排列 (1.1) 中如 i, j 与其它数构成逆序, 则在排列 (1.2) 中仍然构成逆序; 如不构成逆序, 则在 (1.2) 中也不构成逆序; 不同的只是 i, j 的次序。如果原来 i, j 构成逆序, 那么经过对换, 排列的逆序数就减少 1; 如果原来 i, j 不构成逆序, 那么经过对换, 排列的逆序数就增加 1。无论是增加 1 还是减少 1, 排列的逆序数的奇偶性总是变了。故相邻对换改变排列的奇偶性。

再证一般情形:

设排列

$$\dots ik_1 k_2 \dots k_s j \dots \quad (1.3)$$

经过 i, j 对换变成

$$\dots jk_1 k_2 \dots k_s i \dots \quad (1.4)$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻对换来实现。从(1.3)出发，把 i 与 k_1 对换，再与 k_2 对换， \dots ，也就是说，把 i 顺次地向右移动，经过 $S+1$ 次相邻对换，排列(1.3)就成为

$$\dots k_1 k_2 \dots k_s j i \dots \quad (1.5)$$

再从(1.5)出发，把 j 顺次地向左移动，经过 S 次相邻对换，排列(1.5)就变成了排列(1.4)。因此， i, j 对换可以通过 $2S+1$ 次相邻对换来实现。 $2S+1$ 是奇数，而相邻对换改变排列的奇偶性。故奇数次相邻对换的最终结果还是改变了原排列的奇偶性。证毕。

例如，经过 2, 5 对换，偶排列 2 1 3 5 4 变成了奇排列 5 1 3 2 4；奇排列 1 5 3 4 2 变成了偶排列 1 2 3 4 5。

定理 1.3 任意一个 n 级排列都可以经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。(证略)

例如， $2\ 5\ 4\ 3\ 1 \xrightarrow{1, 2\text{对换}} 1\ 5\ 4\ 3\ 2 \xrightarrow{2, 5\text{对换}} 1\ 2\ 4\ 3\ 5 \xrightarrow{4, 3\text{对换}} 1\ 2\ 3\ 4\ 5, 3\ 4\ 1\ 2\ 5 \xrightarrow{1, 3\text{对换}} 1\ 4\ 3\ 2\ 5 \xrightarrow{4, 2\text{对换}} 1\ 2\ 3\ 4\ 5$ 。这里奇排列 2 5 4 3 1 经过 3 次对换变成自然排列，偶排列 3 4 1 2 5 经过 2 次对换变成自然排列。可见对换的次数与原排列有相同的奇偶性。

定理 1.4 在所有 n 级排列中 ($n \geq 2$)，奇排列与

偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个。

证明 设在所有的 n 级排列中，有 s 个奇排列， t 个偶排列，其中 $s+t=n!$ 。

对 s 个不同的奇排列中的数码 i, j 施行对换，便得到 s 个不同的偶排列，由于偶排列一共只有 t 个，因此 $s \leq t$ 。

同样，对 t 个不同的偶排列中的数码 i, j 施行对换，便得到 t 个不同的奇排列，由于奇排列一共只有 s 个，因此 $t \leq s$ 。

故有 $s=t = \frac{n!}{2}$ 。证毕。

例如三级排列共有 $3! = 6$ 个，其中奇排列 3 个：3 2 1、2 1 3、1 3 2；偶排列 3 个：1 2 3、2 3 1、3 1 2。

§1.2 n 阶行列式的概念

二阶和三阶行列式是分别从二元和三元线性方程组的公式解引出来的。

二元线性方程组①的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

用加减消元法分别消去方程组 (1.6) 中的 x_2, x_1 ，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (1.7)$$

(1.7) 式中两式的分母相同，而且只与方程组中

①本书约定为含两个未知量，两个线性方程的方程组。

x_1, x_2 的系数有关，如果把这些系数按它们在方程组中的位置写出，可便于记忆(1.7)式。于是引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ，并称此记号为二阶行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二阶行列式表示的代数和，可用对角线法则来表述，即二阶行列式等于它主对角线（从左上角到右下角的对角线）上的元素之积减去它次对角线（从右上角到左下角的对角线）上的元素之积。例如

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 7 - 5 \cdot (-2) = -18$$

若将二元线性方程组的系数行列式（由方程组的系数按它们在方程组中的位置所构成的行列式）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的第一列元素或第二列元素换成方程组中的常数项 b_1, b_2 ，得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$\text{或 } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是(1.7)式可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

三元线性方程组①的一般形式是:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.8)$$

用加减消元法分别消去方程组(1.8)中的 x_2 与 x_3 , x_3 与 x_1 , x_1 与 x_2 ; 当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11} \cdot a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \\ x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}} \end{cases} \quad (1.9)$$

为了便于记忆和计算, 引进记号

①本书约定为含三个未知量、三个线性方程的方程组。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{31}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ ，并称此记号为三阶行列式，称代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{31}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ 为三阶行列式的展开式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{31}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式表示的代数和，可用对角线法则来表述，即下图中各实线联结的三个元素之积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素之积是代数和中的负项。

