线性代数概率论与数理统计

经济管理数学基础

2

刘正根 倪训芳 主编

西南财经大学出版社

线性代数、概率论与数理统计

经济管理数学基础（2）

主编　刘正根　倪训芳

西南财经大学出版社

责任编辑：杨　涛
封面设计：潘令宇

线性代数、概率论与数理统计

刘正根　倪训[illegible]　主编

西南财经大学出版社出版　西南财经大学出版社发行
四川省新华书店经销　绵竹县教育印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32　印张 21　字数 470千字
1990年7月第一版　1990年7月第一次印刷
印数：1—10000册

书号：ISBN7—81017—233—6/F·171

定价：6.40元

前　言

线性代数、概率论与数理统计是经济管理数学的两个分支学科，在经济类专业中是作为一门基础工具课出现的。从事实际业务或经济理论研究的经济工作者，掌握它是非常必要和大有裨益的。

本书是受四川省高等教育自学考试委员会委托编著的《经济管理数学基础（2）》。它是经济类专业成人自学考试的必读教材。同时亦可作为经济院校本科、专科及电大学生的教材或参考书。

全书分两篇，第一篇：线性代数；第二篇：概率论与数理统计。主要介绍各分支学科中最基本的理论、方法及其应用。根据经济专业的特点和要求，对各种方法作了详尽的介绍并辅以实例，且各章配有适量习题作为理解概念和掌握方法的补充。书后附有习题答案。并兼出习题解答作为配套，另册发行。

执笔编写线性代数的有耿华、孙西芃、孙耀明、杨世容，由倪训芳同志总纂。

编写概率论与数理统计的有杜之韩、涂晓青、杨任德、李恒琦，由刘正根同志总纂。

限于编者水平不高，经验不足，书中缺点、错误难免出现，恳请读者批评指正。

编者

1989年12月于光华园

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇 概率论与数理统计

第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本内容，也是研究线性代数的一个重要工具。本章将在复习二阶、三阶行列式的基础上，讨论以下三个问题：

1．n阶行列式的概念；

2．n阶行列式的性质及计算方法；

3．应用n阶行列式解n元线性方程组。

§1.1　排列与对换

定义1.1　由1，2，……，n 这n个不同的数码组成的一个有序数组称为一个n级排列，简称排列。一般记作 $i_1i_2\cdots i_n$。

例如，3421是一个四级排列，25143、54321都是五级排列。显然，12…n是一个n级排列，由于它具有自然顺序，也就是按递增的顺序排列起来的，因此又称它为自然排列。

定理1.1　n级排列共有n！个。

因为第一个位置可从n个数码中任取一个来排，共有n种方法；第二个位置只能在剩下的n－1个数码中任取一个来排，共有n－1种方法；如此继续下去，到最后一个位置，即第n个位置，只剩下一个数码，只有一种方法。故一共有

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$ 种排法。

例如三级排列共有 $3!=6$ 个，它们是123，132，213，231，312，321。

定义1.2　在一个 n 级排列中，如果某两个数（不一定相邻）的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，则称这两个数组成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

例如2413中，21、41、43是逆序，2413的逆序数是3，即 $\tau(2413)=3$；又如12345中没有逆序，12345的逆序数是0，即 $\tau(12345)=0$。

定义1.3　**逆序数为偶数或零的排列称为偶排列；逆**序数为奇数的排列称为奇排列。

例1　求排列32514的逆序数，并确定其奇偶性。

解　根据排列的逆序数定义，从排列的左起第一个数开始，计算它后面比它小的数的个数，顺次计算到排列的最后一个数为止，再把这些个数加起来，就得到这个排列的逆序数。

则　$\tau(32514)=2+1+2+0+0=5$

所以，32514是奇排列。

例2　试求 i、j，使 $1274i56j9$ 成偶排列。

解　$1274i56j9$ 是一个九级排列，应由1，2，3，…，9这九个数码组成，现缺数码3和8。因此只需要考虑 i 和 j 的位置上怎样安排3和8，使排列的逆序数为偶数即可。

（1）　当$i=3$，$j=8$时

$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)=4+1=5$

（2）当$i=8$，$j=3$时

$\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 8\ 5\ 6\ 3\ 9)=4+1+3+1+1=10$

所以，1 2 7 4 8 5 6 3 9是偶排列。

定义1.4　把一个排列中某两个数码的位置互换，而其余的数码不动，就得到另一个排列。这样一个变换称为一个对换。相邻两个数码的对换称为相邻对换。

例如，经过1，4对换，排列 2 1 3 4 5 就变成了2 4 3 1 5；排列1 4 3 2就变成了4 1 3 2。

定理1.2　对换改变排列的奇偶性。即经过一个对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

证明　先证相邻对换的情形：

设排列

$$\cdots i\ j\cdots \tag{1.1}$$

经过i，j对换变成

$$\cdots j\ i\cdots \tag{1.2}$$

这里“…”表示那些不动的数码。比较上面两个排列中的逆序，显然，在排列（1.1)中如i，j与其它的数构成逆序，则在排列（1.2）中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在（1.2）中也不构成逆序；不同的只是i，j的次序。如果原来i，j构成逆序，那么经过对换，排列的逆序数就减少1；如果原来i，j不构成逆序，那么经过对换，排列的逆序数就增加1。无论是增加1还是减少1，排列的逆序数的奇偶性总是变了。故相邻对换改变排列的奇偶性。

再证一般情形：

设排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1.3}$$

经过i，j对换变成

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1.4}$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻对换来实现。从（1.3）出发，把i与k_1对换，再与k_2对换，…，也就是说，把i顺次地向右移动，经过S＋1次相邻对换，排列（1.3）就成为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots \tag{1.5}$$

再从（1.5）出发，把j顺次地向左移动，经过S次相邻对换，排列（1.5）就变成了排列（1.4）。因此，i，j对换可以通过2S＋1次相邻对换来实现。2S＋1是奇数，而相邻对换改变排列的奇偶性。故奇数次相邻对换的最终结果还是改变了原排列的奇偶性。证毕。

例如，经过2，5对换，偶排列2 1 3 5 4变成了奇排列5 1 3 2 4；奇排列1 5 3 4 2变成了偶排列1 2 3 4 5。

定理1.3　任意一个n级排列都可以经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。（证略）

例如，2 5 4 3 1 $\xrightarrow{1，2对换}$ 1 5 4 3 2 $\xrightarrow{2，5对换}$ 1 2 4 3 5 $\xrightarrow{4，3对换}$ 1 2 3 4 5；3 4 1 2 5 $\xrightarrow{1，3对换}$ 1 4 3 2 5 $\xrightarrow{4，2对换}$ 1 2 3 4 5。这里奇排列2 5 4 3 1经过3次对换变成自然排列，偶排列3 4 1 2 5经过2次对换变成自然排列。可见对换的次数与原排列有相同的奇偶性。

定理1.4　在所有n级排列中（n≥2），奇排列与

偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个。

证明　设在所有的n级排列中，有s个奇排列，t个偶排列，其中 $s+t=n!$ 。

对s个不同的奇排列中的数码i，j施行对换，便得到s个不同的偶排列，由于偶排列一共只有t个，因此 $s\leqslant t$。

同样，对t个不同的偶排列中的数码i，j施行对换，便得到t个不同的奇排列，由于奇排列一共只有s个，因此 $t\leqslant s$。

故有 $s=t=\frac{n!}{2}$ 。证毕。

例如三级排列共有 $3!=6$ 个，其中奇排列3个：321、213、132；偶排列3个：123、231、312。

§1.2　n阶行列式的概念

二阶和三阶行列式是分别从二元和三元线性方程组的公式解引出来的。

二元线性方程组① 的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1.6)$$

用加减消元法分别消去方程组（1.6）中的 x_2， x_1， 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (1.7)$$

（1.7）式中两式的分母相同，而且只与方程组中

①本书约定为含两个未知量，两个线性方程的方程组。

x_1，x_2的系数有关，如果把这些系数按它们在方程组中的位置写出，可便于记忆〈1.7〉式。于是引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并称此记号为二阶行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式表示的代数和，可用对角线法则来表述，即二阶行列式等于它主对角线（从左上角到右下角的对角线）上的元素之积减去它次对角线(从右上角到左下角的对角线)上的元素之积。例如

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=(-4)\cdot 7-5\cdot(-2)=-18$$

若将二元线性方程组的系数行列式（由方程组的系数按它们在方程组中的位置所构成的行列式）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

的第一列元素或第二列元素换成方程组中的常数项b_1，b_2，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

或 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$

于是〈1.7〉式可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

三元线性方程组① 的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.8}$$

用加减消元法分别消去方程组〈1.8〉中的x_2与x_3，x_3与x_1，x_1与x_2；当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}\cdot a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$时，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{matrix}b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}\\ -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}\end{matrix}}{\begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{matrix}} \\ \\ x_2=\dfrac{\begin{matrix}a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3\\ -a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}q_3\end{matrix}}{\begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{matrix}} \\ \\ x_3=\dfrac{\begin{matrix}a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}\\ -b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}\end{matrix}}{\begin{matrix}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{matrix}} \end{cases} \tag{1.9}$$

为了便于记忆和计算，引进记号

①本书约定为含三个未知量、三个线性方程的方程组。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，并称此记号为三阶行列式，称代数和$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$为三阶行列式的展开式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$$

三阶行列式表示的代数和，可用对角线法则来表述，即下图中各实线联结的三个元素之积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素之积是代数和中的负项。