

结构矩阵 分析原理与程序设计

主 编 王道斌

副主编 武兰河 李延强



西南交通大学出版社

结构矩阵分析原理 与程序设计

王道斌 主 编

武兰河 李延强 副主编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内 容 提 要

本书内容包括五章和一个附录。第一章首先阐述了矩阵位移法分析平面一般结构的基本原理和步骤；第二、三、四、五章分别阐述了平面刚架、平面桁架、连续梁和平面组合结构静力分析的程序设计方法，其中着重介绍了模块划分技巧以及 PAD 软件设计新方法。通过各章的程序设计，阐述了结构总刚的几种储存技巧以及相应的线性方程组的求解方法，提出了“前后处理结合法”处理支承条件的概念，并给出了求连续梁结构的位移和内力影响线的程序设计。对于弹性支承、变截面杆件、内部铰结点等情况的处理，也作了适当的介绍。附录对 PAD 软件设计方法的基本概念给予了简单介绍。各章均有算例，并附有一定数量的习题。

本书可作为本科土木、水利等专业学生使用的教材，也可作为教师、研究生和有关工程技术人员的参考书。

图书在版编目 (C I P) 数据

结构矩阵分析原理与程序设计. 王道斌主编. —成都:
西南交通大学出版社, 2004.2
ISBN 7-81057-826-X

I. 结... II. 王... III. 矩阵法分析-程序设计
IV. TU311.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 000012 号

结构矩阵分析原理与程序设计

王道斌 主编

*

责任编辑 刘娉婷

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 87600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本: 787 mm × 1092 mm 1/16 印张: 13

字数: 305 千字

2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-826-X/TU · 329

定价: 16.80 元

序

结构矩阵分析的原理、方法以及在计算机上的实现是结构力学的重要内容之一。学好这门课，是对本科土木、水利等专业学生的基本要求。

本书作为我校本科生内部讲义已使用十多年，修订过三次。本书是在第三次修订的基础上，集编者和教研室各位老师十多年来讲授该课的经验 and 教学改革的成果再次进行修改、补充而成的。与目前各校使用的这方面的教材相比，该书具有两方面的特点：

(1) 在教材结构上作了较大改进。本书在讲完矩阵分析的原理后，先讲平面一般刚架的程序设计，再讲桁架、连续梁、组合结构的程序设计，即采取由一般到较难的顺序进行。这是因为，在讲一般原理时，是以平面一般结构进行的，因此，先讲平面刚架的程序设计，使得前后对应直接、密切，便于学生理解；又因为平面桁架和连续梁是矩阵分析的特例，讲清、讲透平面刚架的程序设计，能达到提纲挈领的效果；在同学们掌握了程序设计的基本方法后，再将程序设计的方法扩展到组合结构就是顺理成章的事了。

(2) 引进 Problem Analysis Diagram (简称 PAD) 软件设计方法，即用 PAD 图代替传统的流程框图 (Flow Chart, 简称 FC 图)。与 FC 图相比，PAD 图更能简捷、明了地表现程序的逻辑过程，与理论计算公式和源程序对应关系密切，更易于初学者学习和掌握。

本书内容包括五章和一个附录，其中包括结构矩阵分析的一般原理，刚架、桁架、连续梁和组合结构的程序设计，附录为 PAD 基本概念简介。在内容安排上，力求做到前后连贯；在程序设计时，模块的划分力求与理论公式和计算步骤相对应，同时兼顾了程序的简捷、高效和模块的通用性。在编程的技巧和提高程序质量方面，采用由浅入深、逐步提高的方法，如先介绍总刚的方阵储存及其解法，再介绍等带宽储存及其解法等。各章对于程序的灵活运用以及程序的扩展给予了适当的介绍，以便同学们进一步提高。同时，各章还配有一定数量的例题和习题，使学生通过练习，以巩固所学。

本书要求读者具备结构力学、算法语言 (Visual Basic, 简称 VB)、矩阵代数等方面的基础知识。

本书第一章至第四章和附录部分由王道斌教授执笔；第五章由武兰河教授执笔；各章的 PAD 图和源程序由李延强老师将原来的 Fortran 语言描述改为 VB 语言描述，并进行了程序调试；任剑莹老师输入了全部书稿，绘制了所有插图；结构力学教研室其他老师分别进行了认真校对。

段树金教授对全书进行了审阅，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于作者水平所限，书中难免有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编者

2003年11月

目 录

第一章 结构矩阵分析原理	1
第一节 概 述	1
第二节 单元刚度矩阵	2
第三节 单元刚度矩阵的坐标变换	6
第四节 结构原始刚度矩阵的形成——直接刚度法	12
第五节 支座约束条件的处理	20
第六节 非结点荷载的处理	22
第七节 算 例	26
第八节 矩阵位移法应用中的几个问题	34
习 题	37
第二章 平面刚架静力分析的程序设计	40
第一节 概 述	40
第二节 平面刚架计算的主要标识符和程序结构	41
第三节 平面刚架的主程序及数据的输入	44
第四节 总刚 $[R]$ 的组集——子程序 stiff、locat、wstiff	48
第五节 综合结点荷载向量 $\{P\}$ 的形成——子程序 efix、trans、eload、load	55
第六节 “后处理法”引入可动支座约束条件——子程序 bound	63
第七节 高斯消元法解结构刚度方程——子程序 gauss	66
第八节 求单元最后杆端力 $\{F\}$ ——子程序 nqm	69
第九节 平面刚架的源程序及算例	71
第十节 程序的灵活应用与扩展	88
习 题	89
第三章 平面桁架静力分析的程序设计	92
第一节 概 述	92
第二节 平面桁架计算的主要标识符和程序结构	92
第三节 平面桁架的主程序及数据的准备与输入	95
第四节 总刚(等带宽储存)的组集——子程序 stiff、locat、wstiff	97
第五节 形成荷载列阵及支承条件的引入——子程序 load、bound	103
第六节 等带宽高斯消元法——子程序 bgauss	110
第七节 求各杆轴力和应力——子程序 nforce	110
第八节 平面桁架静力分析的源程序及算例	112
第九节 程序的灵活运用与扩展	125

习 题	127
第四章 连续梁静力分析和影响线的程序设计	130
第一节 概 述	130
第二节 连续梁的主要标识符和程序结构	130
第三节 主程序 main 及子程序 data1 和 wstiff	132
第四节 结点荷载向量的形成——子程序 input1、load、efix	135
第五节 引入左、右端支承条件, 求解刚度方程——子程序 bound、bgauss	137
第六节 求各单元最后杆端力——子程序 qme	138
第七节 求某单元指定截面的内力影响线——子程序 kcqm	140
第八节 连续梁计算的源程序及算例	142
第九节 程序的扩展	162
习 题	164
第五章 平面组合结构静力分析的程序设计	165
第一节 概 述	165
第二节 单元类型变换矩阵[CT]	166
第三节 利用[CT]矩阵处理特殊单元固端力	169
第四节 新增加的输入信息	170
第五节 单元类型的识别和结点编号须知	170
第六节 单元类型变换矩阵的形成——子程序 matc	172
第七节 结构刚度矩阵的组集——子程序 wstiff	173
第八节 综合结点荷载列阵的形成——子程序 load	174
第九节 各单元杆端力的计算——子程序 nqm	176
第十节 平面组合结构的源程序及算例	177
习 题	194
附录 PAD 基本概念简介	196
参考文献	202

第一章

结构矩阵分析原理

第一节 概 述

在结构分析中，把各项计算公式表达成矩阵形式，进行矩阵运算，这种方法称为矩阵方法。矩阵方法用于分析杆件结构时，就称为结构矩阵分析；用于分析连续体时，就称为有限元法。实际上，结构矩阵分析是有限元法在杆件结构中的应用，故可称为杆件有限元法。由于矩阵运算具有统一、紧凑的形式，便于编制计算机程序，适合在计算机上进行自动化处理，因此结构矩阵分析的方法得到越来越广泛的应用。它不仅解决了许许多多复杂的、人工不可能或很难完成的结构计算问题，而且它本身的理论、方法和手段也日臻完善。矩阵分析方法和计算机的广泛应用，必将加速对传统结构力学理论和应用的革新和发展。

结构矩阵分析的基本原理与传统的结构力学原理是相同的，只是把计算过程用矩阵运算来表示。用矩阵运算表示的力法称为矩阵力法（也称柔度法），而用矩阵运算表示的位移法则称为矩阵位移法（也称刚度法）。对于一个给定的超静定结构，在用矩阵力法求解时，由于基本结构的选取不是惟一的，故不便于编制通用的计算机程序，而用矩阵位移法求解时，基本结构和基本未知数（结点未知位移）都是惟一的，处理的方法也比较统一、简捷，很容易编制通用的计算机程序，因此，人们多采用矩阵位移法。矩阵位移法又分为一般刚度法和直接刚度法，两者的基本原理相同，但形成整体刚度方程的方法不同，直接刚度法比一般刚度法简单得多，故应用广泛。本书只介绍直接刚度法。

直接刚度法解题的思路是：首先把结构离散化，即把结构中的一根杆件或杆件的一段作为一个单元，建立各个单元的杆端力与杆端位移之间的关系，得到各单元的单元刚度矩阵，此步称为单元分析；其次进行整体分析，即根据平衡条件和几何条件（支撑条件和变形连续条件）建立结点荷载与结点位移之间的关系，得到结构的刚度方程；最后在给定的条件下求解该方程得到结构的结点位移，进而求得各单元内力。

需要指出的是，结构矩阵分析的方法主要是为了编制程序在计算机上运算，它的计算步骤、处理方法和手段要求规范化、统一化。因此，学习结构矩阵分析，一定要从电算的角度去看问题，才能加深对问题的理解。

第二节 单元刚度矩阵

单元分析的任务，就是要建立各单元杆端力与杆端位移之间的转换关系，即单元刚度方程。单元刚度矩阵则是单元杆端力与杆端位移之间的转换矩阵。为了便于分析，我们首先在各单元的局部坐标系下讨论。

图 1.1 所示为任一平面杆件结构，设其中某一杆件在整个结构中的杆件编号为②，它连接着两个结点 i 和 j 。以 i 端（也称始端）为原点，从 i 端到 j 端（也称末端）的杆件方向为 \bar{x} 轴正向，从 \bar{x} 轴正向逆时针转 90° 为 \bar{y} 轴正向，则 $\bar{x}\bar{y}$ 称为②杆的局部坐标系。

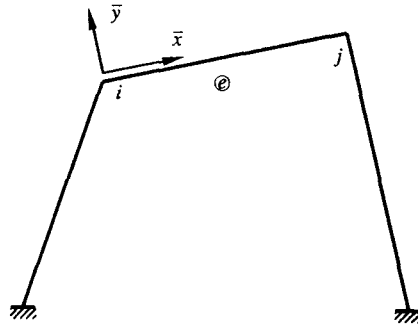


图 1.1

下面讨论几种常用单元在局部坐标系下的单元刚度矩阵。本章所讨论的单元限于：(1) 杆件为等截面直杆；(2) 单元的 EA 、 EI 值为常量。

一、平面一般单元

通常分析平面刚架时，为了简化计算，忽略了杆件轴向变形的影响。然而在结构矩阵分析中，若考虑结构轴向变形的影响，不仅能够提高计算精度，而且更便于程序编制，增加程序的通用性。因此，平面一般单元将考虑杆件轴向变形的影响。

对于平面一般单元②，每端均有三个杆端力分量，即 i 端的轴力 \bar{F}_{Ni}^e 、剪力 \bar{F}_{Qi}^e 和弯矩 \bar{M}_i^e ； j 端的轴力 \bar{F}_{Nj}^e 、剪力 \bar{F}_{Qj}^e 和弯矩 \bar{M}_j^e 。与此相对应，每端均有三个杆端位移分量，即 i 端的轴向位移 \bar{u}_i^e 、切向位移 \bar{v}_i^e 和角位移 $\bar{\varphi}_i^e$ ； j 端的轴向位移 \bar{u}_j^e 、切向位移 \bar{v}_j^e 和角位移 $\bar{\varphi}_j^e$ 。各物理量上面的“ $-$ ”表示它们是在局部坐标下的值，上标 e 表示②号单元，以下同理。

杆端力和杆端位移的正负号规定：杆端轴力 \bar{F}_N^e 和剪力 \bar{F}_Q^e 分别与 \bar{x} 轴和 \bar{y} 轴正向一致时为正，杆端弯矩 \bar{M}^e 以绕着杆端顺时针方向为正；杆端位移的正负号与杆端力相同。图 1.2 所示为杆端力和杆端位移的正方向。

对于单元②，设其杆长为 L ，抗拉刚度为 EA ，抗弯刚度为 EI 。如果该单元的 6 个杆端位移分量为已知，同时杆上无荷载作用，要确定相应的 6 个杆端力分量，就相当于两端固定梁，令其支座分别发生单位位移，求其在梁端产生的支座反力（如图 1.3 所示）。

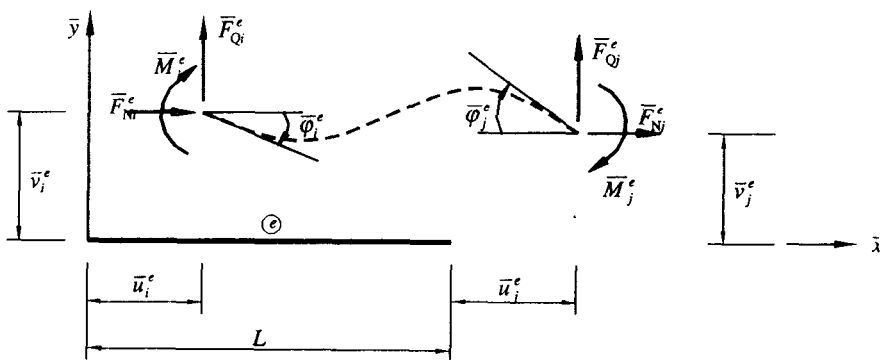


图 1.2

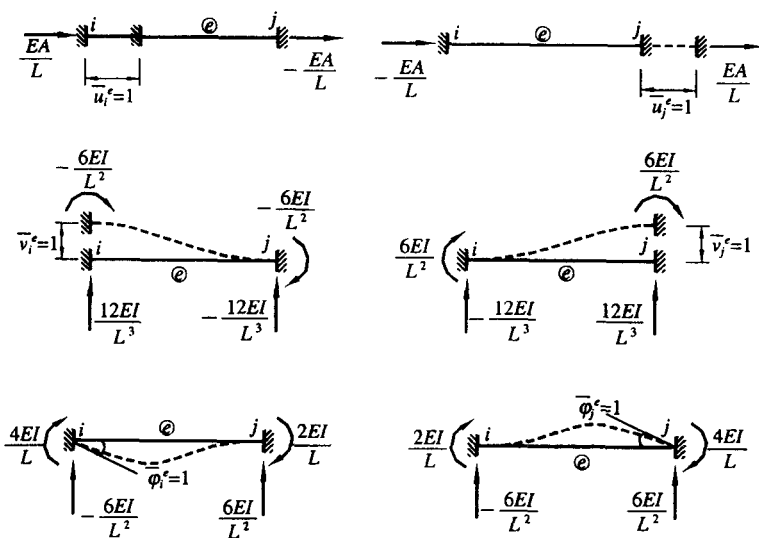


图 1.3

由叠加原理可得杆端力与杆端位移之间的关系为

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{F}_{Ni}^e &= \frac{EA}{L} u_i - \frac{EA}{L} u_j \\
 \bar{F}_{Qi}^e &= \frac{12EI}{L^3} v_i - \frac{6EI}{L^2} \phi_i - \frac{12EI}{L^3} v_j - \frac{6EI}{L^2} \phi_j \\
 \bar{M}_i^e &= -\frac{6EI}{L^2} v_i + \frac{4EI}{L} \phi_i + \frac{6EI}{L^2} v_j + \frac{2EI}{L} \phi_j \\
 \bar{F}_{Nj}^e &= -\frac{EA}{L} u_i + \frac{EA}{L} u_j \\
 \bar{F}_{Qj}^e &= -\frac{12EI}{L^3} v_i + \frac{6EI}{L^2} \phi_i + \frac{12EI}{L^3} v_j + \frac{6EI}{L^2} \phi_j \\
 \bar{M}_j^e &= -\frac{6EI}{L^2} v_i + \frac{2EI}{L} \phi_i + \frac{6EI}{L^2} v_j + \frac{4EI}{L} \phi_j
 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Qi}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Qj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{\phi}_i^e \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{v}_j^e \\ \bar{\phi}_j^e \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

简记为

$$\{\bar{F}\}^e = [\bar{k}]^e \{\bar{\delta}\}^e \quad (1.2)$$

(1.1) 式或 (1.2) 式称为②单元的单元刚度方程。其中

$$\{\bar{F}\}^e = [\bar{F}_{Ni}^e, \bar{F}_{Qi}^e, \bar{M}_i^e, \bar{F}_{Nj}^e, \bar{F}_{Qj}^e, \bar{M}_j^e]^T \quad (1.3)$$

$$\{\bar{\delta}\}^e = [\bar{u}_i^e, \bar{v}_i^e, \bar{\phi}_i^e, \bar{u}_j^e, \bar{v}_j^e, \bar{\phi}_j^e]^T \quad (1.4)$$

分别称为②单元的杆端力列向量和杆端位移列向量，而

$$[\bar{k}]^e = \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e & \bar{v}_i^e & \bar{\phi}_i^e & \bar{u}_j^e & \bar{v}_j^e & \bar{\phi}_j^e \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Qi}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Qj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

称为单元刚度矩阵（简称单刚）。

由于杆端力分量和杆端位移分量的个数均为6，因此 $[\bar{k}]^e$ 是一个 6×6 的方阵。需要说明的是，杆端力列向量和杆端位移列向量必须按照(1.3)式和(1.4)式那样的排列，才能

得到 (1.5) 式所示的 $[\bar{k}]^e$ 的形式。若排列顺序有变, 则 $[\bar{k}]^e$ 中的元素位置也将随之改变。为了更明确地表示 $[\bar{k}]^e$ 中各行各列的元素与杆端力分量和杆端位移分量的对应关系, 在 (1.5) 式的上方和右方分别注上了所对应的分量。

$[\bar{k}]^e$ 中处在第 i 行和第 j 列的元素 k_{ij}^e 的物理意义为: 当第 j 个杆端位移分量为 1 而其余杆端位移分量为 0 时, 引起的第 i 个杆端力的值。

由 (1.5) 式可以看出, 单刚 $[\bar{k}]^e$ 具有以下性质:

(1) 对称性。由 $[\bar{k}]^e$ 中元素的物理意义及反力互等定理可知, $[\bar{k}]^e$ 中位于主对角线两边对称位置的两个元素是相等的, 即 $k_{ij} = k_{ji}$;

(2) 奇异性。由 (1.5) 式可见, 若将 $[\bar{k}]^e$ 中第 1 行 (或列) 的各元素与第 4 行 (或列) 的各对应元素相加, 所得的一行 (或列) 的元素全部为零, 这表明矩阵 $[\bar{k}]^e$ 的行列式的值为零, 所以 $[\bar{k}]^e$ 是不可求逆的 (即奇异的)。因此, 若给定了杆端位移 $\{\bar{\delta}\}^e$ 的值, 可由 (1.2) 式求得杆端力 $\{\bar{F}\}^e$ 的值; 但若给定了杆端力 $\{\bar{F}\}^e$ 的值, 却不能由 (1.2) 式反求出杆端位移的值。其原因在于, 我们所讨论的是一个自由单元, 两端没有任何支承约束, 此时杆件除了由杆端力的作用将发生弹性变形 (轴向变形和弯曲变形) 外, 还可能发生任意的刚体位移, 因此其位移解不是惟一的。

二、平面桁架单元 (轴力单元)

对于平面桁架单元, 也称轴力单元, 两端只有轴向力, 杆端剪力和弯矩均为零, 如图 1.4 所示。

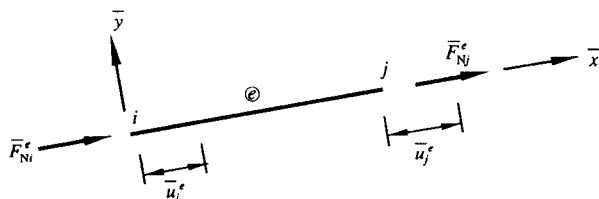


图 1.4

由胡克定律可得平面桁架单元的刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{u}_j^e \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

相应的单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

平面桁架单元的刚度矩阵 $[\bar{k}]^e$ 与 (1.5) 式具有相同的性质。

为了以后进行坐标变换的需要，可以把 (1.6) 式扩展成以下形式：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Qi}^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Qj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^e \\ \bar{v}_i^e \\ \bar{u}_j^e \\ \bar{v}_j^e \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

(1.8) 式所对应的单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

三、连续梁单元

对于连续梁单元，如果忽略其轴向变形，则各单元在杆端只有转角位移，没有线位移，如图 1.5 所示。由 (1.1) 式并注意到 \bar{u} 、 \bar{v} 均为零，即可得到连续梁单元的单元刚度方程

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_i^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_i^e \\ \bar{\varphi}_j^e \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

相应的单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}]^e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

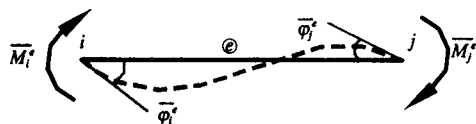


图 1.5

第三节 单元刚度矩阵的坐标变换

上一节所建立的单元刚度矩阵，是以杆件的局部坐标系作为参照系的。但是，对于一般结构而言，各杆的轴向并不完全一致（连续梁除外），因此其局部坐标系就不可能取的完全

相同。而在进行结构的整体分析时，要研究结构的几何条件和平衡条件，必须参照一个共同的坐标系，称其为结构坐标系或整体坐标系，用 xOy 表示。因此，在进行整体分析之前，应先把局部坐标下的单元刚度矩阵 $\{\bar{k}\}^e$ 、杆端力向量 $\{\bar{F}\}^e$ 和杆端位移向量 $\{\bar{\delta}\}^e$ 等转换到结构坐标系中来。

一、平面一般单元的坐标变换

图 1.6 所示为一平面一般单元 $\textcircled{\text{e}}$ ，其始末端结点号分别为 i 和 j ， $\bar{x}\bar{y}$ 为该单元的局部坐标系， xOy 为结构坐标系。设 \bar{x} 轴与 x 轴之间的夹角为 α ，从 x 轴逆时针转到 \bar{x} 轴为正。

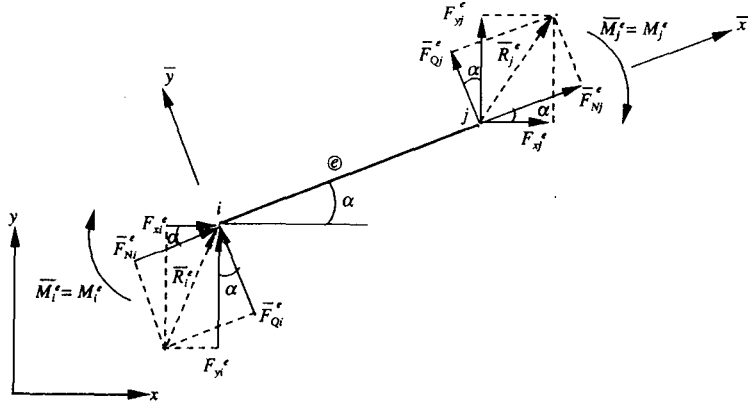


图 1.6

在局部坐标系中的杆端力向量 $\{\bar{F}\}^e$ 和杆端位移向量 $\{\bar{\delta}\}^e$ 分别如 (1.3) 式和 (1.4) 式所示。设单元 $\textcircled{\text{e}}$ 在结构坐标系下的杆端力向量和杆端位移向量分别表示为

$$\{\bar{F}\}^e = [F_{xi}^e \quad F_{yi}^e \quad M_i^e \quad F_{xj}^e \quad F_{yj}^e \quad M_j^e]^T \quad (1.12)$$

$$\{\bar{\delta}\}^e = [u_i^e \quad v_i^e \quad \varphi_i^e \quad u_j^e \quad v_j^e \quad \varphi_j^e]^T \quad (1.13)$$

其中杆端力 F_x^e 、 F_y^e 和杆端线位移 u^e 、 v^e 以与结构坐标系一致者为正；杆端弯矩 M^e 和角位移 φ^e 以顺时针方向为正。

1. 杆端力的变换

把单元 $\textcircled{\text{e}}$ 的 i 端轴力 \bar{F}_{Ni}^e 和剪力 \bar{F}_{Qi}^e 的合力 \bar{R}_i^e 在结构坐标系 xOy 中分解，即可得到 F_{xi}^e 和 F_{yi}^e ，由投影关系（参见图 1.6）可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Ni}^e &= F_{xi}^e \cos \alpha + F_{yi}^e \sin \alpha \\ \bar{F}_{Qi}^e &= -F_{xi}^e \sin \alpha + F_{yi}^e \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

同理可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Nj}^e &= F_{xj}^e \cos \alpha + F_{yj}^e \sin \alpha \\ \bar{F}_{Qj}^e &= -F_{xj}^e \sin \alpha + F_{yj}^e \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

另外，由于在两种坐标系中，两种坐标系下的杆端弯矩都是作用在同一平面内，是垂直于坐标平面的向量，因此不受平面坐标变换的影响，故有

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_i^e &= M_i^e \\ \bar{M}_j^e &= M_j^e \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

把 (a)、(b)、(c) 三式合并成矩阵形式 (记 $C_x = \cos \alpha$, $C_y = \sin \alpha$, 下同), 则有

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Qi}^e \\ \bar{M}_i^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Qj}^e \\ \bar{M}_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & & & \\ -C_y & C_x & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & C_x & C_y & 0 \\ [0] & & & -C_y & C_x & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

简记为

$$\{\bar{F}\}^e = [T]\{F\}^e \quad (1.15)$$

其中

$$[T] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & & & \\ -C_y & C_x & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & C_x & C_y & 0 \\ [0] & & & -C_y & C_x & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

(1.16) 式即为平面一般单元的坐标转换矩阵。从该式可以看出，它的每一行（或列）的各元素的平方和均为 1，而所有两个不同行（或列）的对应元素的乘积之和均为零。因此， $[T]$ 是一个正交矩阵，故有

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (1.17)$$

需要注意的是，杆端力 $\{\bar{F}\}^e$ 和 $\{F\}^e$ 中的元素必须按 (1.14) 式所示的次序排列时，坐标变换矩阵 $[T]$ 才能有 (1.16) 式所示的形式。

2. 杆端位移的坐标变换

由于杆端位移分量和杆端力分量是一一对应的，且符号规定相同，因此两种坐标系下的杆端位移之间也有与 (1.15) 式相同的变换关系，即有

$$\{\bar{\delta}\}^e = [T]\{\delta\}^e \quad (1.18)$$

3. 单元刚度矩阵之间的坐标变换

在第二节推出了局部坐标系下的单元刚度方程 (见 (1.2) 式)

$$\{\bar{F}\}^e = [\bar{k}]\{\bar{\delta}\}^e$$

把 (1.15) 式、(1.18) 式所示的杆端力和杆端位移的变换关系代入 (1.2) 式，得

$$[T]\{F\}^{\circ} = [\bar{k}]^{\circ}[T]\{\delta\}^{\circ} \quad (d)$$

将(d)式两边同时左乘以 $[T]^{-1}$ ，并注意到(1.17)式，得

$$\{F\}^{\circ} = [T]^T[\bar{k}]^{\circ}[T]\{\delta\}^{\circ} \quad (e)$$

简记为

$$\{F\}^{\circ} = [k]^{\circ}\{\delta\}^{\circ} \quad (1.19)$$

其中

$$[k]^{\circ} = [T]^T[\bar{k}]^{\circ}[T]^{\circ} \quad (1.20)$$

(1.19)式即为平面一般单元在结构坐标系下的单元刚度方程，而 $[k]^{\circ}$ 即是结构坐标系下的单元刚度矩阵，(1.20)式为两种坐标系下单元刚度矩阵的坐标变换公式。

为了在进行结构整体分析时便于书写和应用，可以把(1.19)式所示的单元刚度方程按始末端结点号 i, j 进行分块，写成以下形式

$$\begin{bmatrix} \{F_i\}^{\circ} \\ \{F_j\}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ii}]^{\circ} & [k_{ij}]^{\circ} \\ [k_{ji}]^{\circ} & [k_{jj}]^{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_i\}^{\circ} \\ \{\delta_j\}^{\circ} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

其中

$$\{F_i\}^{\circ} = \begin{bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \end{bmatrix}, \quad \{F_j\}^{\circ} = \begin{bmatrix} F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{bmatrix}, \quad \{\delta_i\}^{\circ} = \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \end{bmatrix}, \quad \{\delta_j\}^{\circ} = \begin{bmatrix} u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

分别为始端 i 和末端 j 的杆端力列向量和杆端位移列向量。而单刚 $[k]^{\circ}$ 的分块形式为

$$[k]^{\circ} = \begin{bmatrix} [k_{ii}]^{\circ} & [k_{ij}]^{\circ} \\ [k_{ji}]^{\circ} & [k_{jj}]^{\circ} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

其中 $[k_{ii}]^{\circ}$ 、 $[k_{ij}]^{\circ}$ 、 $[k_{ji}]^{\circ}$ 、 $[k_{jj}]^{\circ}$ 为单元刚度矩阵 $[k]^{\circ}$ 的4个子块，每一子块均是 3×3 阶的方阵。

根据矩阵运算的性质，(1.21)式又可写为

$$\begin{aligned} \{F_i\}^{\circ} &= [k_{ii}]^{\circ}\{\delta_i\}^{\circ} + [k_{ij}]^{\circ}\{\delta_j\}^{\circ} \\ \{F_j\}^{\circ} &= [k_{ji}]^{\circ}\{\delta_i\}^{\circ} + [k_{jj}]^{\circ}\{\delta_j\}^{\circ} \end{aligned} \quad (1.24)$$

把(1.5)式和(1.16)式代入(1.20)式，通过矩阵运算，可得 $[k]$ 中各元素的值，以子块形式给出如下

$$[k_{ii}]^{\circ} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{L} C_x^2 + \frac{12EI}{L^3} C_y^2 \right) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) C_y C_x & \frac{6EI}{L^2} C_y \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) C_y C_x & \left(\frac{EA}{L} C_y^2 + \frac{12EI}{L^3} C_x^2 \right) & -\frac{6EI}{L^2} C_x \\ \frac{6EI}{L^2} C_y & -\frac{6EI}{L^2} C_x & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.25a)$$

$$[k_{ij}]^{\circ} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{EA}{L}C_x^2 + \frac{12EI}{L^3}C_y^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x & \frac{6EI}{L^2}C_y \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x & -\left(\frac{EA}{L}C_y^2 + \frac{12EI}{L^3}C_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}C_x \\ -\frac{6EI}{L^2}C_y & \frac{6EI}{L^2}C_x & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.25b)$$

$$[k_{ji}]^{\circ} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{EA}{L}C_x^2 + \frac{12EI}{L^3}C_y^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x & -\frac{6EI}{L^2}C_y \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x & -\left(\frac{EA}{L}C_y^2 + \frac{12EI}{L^3}C_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}C_x \\ \frac{6EI}{L^2}C_y & -\frac{6EI}{L^2}C_x & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.25c)$$

$$[k_{jj}]^{\circ} = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{L}C_x^2 + \frac{12EI}{L^3}C_y^2\right) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x & -\frac{6EI}{L^2}C_y \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x & \left(\frac{EA}{L}C_y^2 + \frac{12EI}{L^3}C_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}C_x \\ -\frac{6EI}{L^2}C_y & \frac{6EI}{L^2}C_x & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.25d)$$

令

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{EA}{L}C_x^2 + \frac{12EI}{L^3}C_y^2 \\ b_2 &= \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)C_yC_x \\ b_3 &= \frac{6EI}{L^2}C_y \\ b_4 &= \frac{EA}{L}C_y^2 + \frac{12EI}{L^3}C_x^2 \\ b_5 &= \frac{6EI}{L^2}C_x \\ b_6 &= \frac{2EI}{L} \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

则平面一般单元的单元刚度矩阵可表示为

$$[k]^{\circ} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & -b_1 & -b_2 & b_3 \\ b_2 & b_4 & -b_5 & -b_2 & -b_4 & -b_5 \\ b_3 & -b_5 & 2b_6 & -b_3 & b_5 & b_6 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & b_1 & b_2 & -b_3 \\ -b_2 & -b_4 & b_5 & -b_2 & b_4 & b_5 \\ b_3 & -b_5 & b_6 & -b_3 & b_5 & 2b_6 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

由 (1.25) 式和 (1.27) 式可以看出, 结构坐标系中的单元刚度矩阵 $[k]^\circledast$ 仍然是一个 6×6 阶的对称矩阵 (仍符合反力互等定理), 并且是奇异矩阵 (仍未考虑约束条件)。

二、平面桁架单元的坐标变换

对于平面桁架杆件, 杆端只有轴力 \bar{F}_N , 剪力和弯矩均为零。将两端的轴力 \bar{F}_{Ni} 和 \bar{F}_{Nj} 在结构坐标系下分解, 如图 1.7 所示, 即得到单元 \circledast 在结构坐标系下的杆端力列向量

$$\{F\}^\circledast = [F_{xi}^e, F_{yi}^e; F_{xj}^e, F_{yj}^e]^T \quad (1.28)$$

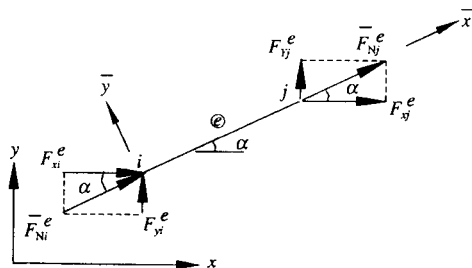


图 1.7

同理可得结构坐标系下的杆端位移列向量

$$\{\delta\}^\circledast = [u_i^e, v_i^e; u_j^e, v_j^e]^T \quad (1.29)$$

根据图 1.7 根据的投影关系, 可得两种坐标系下杆端力的转换关系, 其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^e \\ \bar{F}_{Qi}^e \\ \bar{F}_{Nj}^e \\ \bar{F}_{Qj}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

由 (1.30) 式可见, 桁架单元的杆端力转换公式可以由平面一般单元的转换公式 (1.14) 式划掉与杆端弯矩和角位移相对应的行和列而得到。若记

$$[T] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

则 $[T]$ 即为平面桁架单元的坐标变换矩阵, 它是一个正交矩阵。

将 (1.30) 式简记为

$$\{\bar{F}\}^\circledast = [T]\{F\}^\circledast \quad (1.32)$$

与平面一般单元的推导相似, 可得平面桁架单元的杆端位移列向量和单元刚度矩阵的坐标变换公式, 它们与平面一般单元的相应公式具有相同的形式, 分别为