高等数学的计算方法与技巧

主编　安惠岐

陕西人民教育出版社

高等数学的计算方法与技巧

主编　安惠岐

中国科学技术大学
图书馆藏

陕西人民教育出版社

高等数学的计算方法与技巧
安惠岐　主编
陕西人民教育出版社出版发行
（西安长安路南段181号）
各地新华书店经销　　西安永惠彩色印刷厂印刷
850×1168毫米　32开本　8印张　200千字
2001年2月第1版　　2001年2月第1次印刷
印数:1—1,000
ISBN 7-5419-8109-5/O·6
定价:13.00元
读者如发现印、装质量问题,请与印厂联系调换
厂址:蓝田县油坊街　邮编:710523　电话:(029)2881103

前　言

中国有一句古诗，叫做“积累一代之智勇，开拓万世之心胸”，就是只有勤奋掌握一切科学知识，才能创造，才能使人类自身发生质的变革和飞跃.

今天，凭一个人的力量，应用一般的方法，想把这知识爆炸的时代的所有信息都掌握，是根本不可能的.但是，掌握一定的先进科学技术和技巧能最大限度的获取信息，最大限度的发挥自身的才智，最大限度的开拓千古之心胸却是现实的.

经过数十年高等数学的教学、科研，经过无数次的实践和检验，我总结了高等数学的一些小窍门，掌握了这些方法，可以减轻教师的负担，学生的压力，提高教学质量，加快教学的进度，达到排难、解惑、传道、授业的目的.

这些方法主要有：函数的符号图、一揽子乘法、导数记忆公式、导数行矩式、向量积分法及其应用、方程组的另一种解法等.

本书以讲座的形式，按高等数学进度的先后次序编排.每节后附有练习，书末附有参考答案.

本书适于从事高等数学教学、科研的教师使用，也适合于高等学校的学生使用，特别适合于学习高等数学或微积分的自学者.读者一旦掌握了书中技巧，学习高数就变得易如反掌.

由于多年来学生的鼓励与期盼，本着改变现行高数教学的理想与愿望，变苦学为乐学，笨学为巧学，慢学为快学的志向，我着手写这本书，由于水平与时间的原因错误在所难免，望知音者纠正，此文作为抛砖引玉！

内容介绍

本书正文部分包括:求定义域及判断单调性和极值、凹向和拐点的函数的符号图、求极限的一揽子乘法、求导数的公式记忆法、行矩式、求积分用的向量积分法、旋转积分法、双导积分法、有理式的积分、二项式微积分的积分法、向量积分法的应用、推广向量积分法、付里叶级数、新型积分表、解线性方程组的求0向量法.

本书还包括多元函数求偏导数的链式图、求多重积分的穿入穿出定限法、求级数和的小结、积分大公式与拉氏变换.求一阶微分方程的公式法、求二阶常系数线性微分方程的规范化解法等……

副文部分包括:每讲后练习题及习题解.把抽象变具体,把积分规范化,把解方程简单化,希望它是你的得力助手.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

§1　关于函数的符号图问题

掌握了某些函数的符号图,对于求另一些函数的定义域,及确定另一些函数的单调性和极值,凹向和拐点都是非常方便和直观的,符号图是一个非常有用的工具.

一、问题的提出

1.求对数和偶次开方函数的定义域时,往往要弄清真数符号及开方号下函数的符号.

例1　求下列函数的定义域.

① $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

② $y=\ln\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)(x-6)}$.

求第一个函数的定义域时,必须使根号下的函数:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\geqslant 0$.

求第二个函数的定义域时,必须让对数符号下的分式:

$\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)(x-6)}>0$,并使分母不等于零.

满足上述不等式,才能具体求得其定义域.而上述不等式的解,要解一系列不等式组,计算是很麻烦的.但是,若知道这些函数的正负值区间,则由图形很快就能判断其开方,或取对数所成函数的定义域了.

2.求函数的单调性和极值,凹向和拐点时,往往要知道一、二阶导数的正负值区间,就可确定其特征.

例2　已知函数 $y=f(x)$ 的一阶、二阶导数分别为:

$$y' = f'(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^2;$$

$$y'' = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}\right].$$

试确定其单调性与极值,凹向和拐点.

解决上述两个问题,关键是要求得一些函数的符号图,如何快速、准确地求得一些函数的符号图以便更好地求出定义域、单调性、凹向是本文的目的.

二、符号图及其规定

我们知道,符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$$ 的图形为:

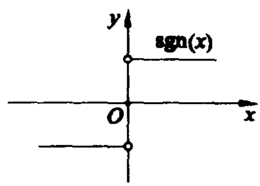


图 1

为了使用方便,做如下的修改和补充:

1. 过原点(O 点)不用垂线,而用斜线连结;

2. 在 $x=+\infty$ 时,令 $\operatorname{sgn}(x)=\overset{0}{1}$

$x=-\infty$ 时, $\operatorname{sgn}(x)=-\overset{0}{1}$

即规定函数 $g(x)$(变量)的符号图如下:

$$
\begin{cases}
-\overset{0}{1}, & g(x)=-\infty \\
-1, & -\infty<g(x)<0 \\
0, & g(x)=0 \\
1, & 0<g(x)<+\infty \\
\overset{0}{1}, & g(x)=+\infty
\end{cases}
$$

记作：T——$\mathrm{sgn}(g(x))$

其中："T"—— 表示图形；"sgn"—— 表示符号；

$g(x)$—— 表示函数(或变量)；$T-\mathrm{sgn}(g(x))$—— 表示 $g(x)$ 的符号图.

函数符号图，与符号函数的图形相比，只是增加了两个点($\pm\infty$)，分别多了一个"$\overset{0}{1}$"和"$-\overset{0}{1}$".同时，连续函数符号图也连续.

例 1　试用符号图表示函数 $y=2$ 及 $y=x$.

解：　$y=2$ 表示在任何点上，y 始终是常数 2，即 y 大于零，又不达到 $+\infty$，按照定义，T—$\mathrm{sgn}(2)$ 为图 2 所示.

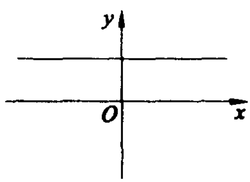


图 2

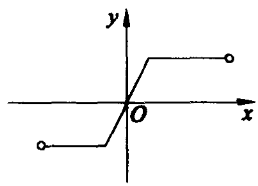


图 3

$y=x$ 表示在 $x=0$ 时，$y=0$；

$x>0$ 时，$y>0$；$x=+\infty$ 时，$y=+\infty$；

$x<0$ 时，$y<0$；$x=-\infty$ 时，$y=-\infty$.

按照定义，$T-\mathrm{sgn}(x)$ 如图 3 所示.

例 2　试画出函数 $y=(x-1)^2-4$ 的符号图.

解：
$$
\begin{aligned}
y&=(x-1)^2-4\\
&=(x-1+2)(x-1-2)\\
&=(x+1)(x-3)
\end{aligned}
$$

因 $x=-1$，及 $x=3$ 为其根，按照定义，其符号图如图 4 所示

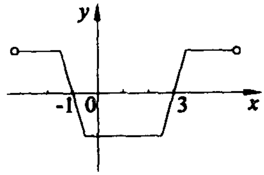


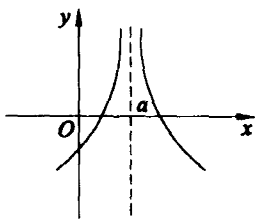
图 4

从函数符号图可知，符号图只反映“符号”，而不考虑具体值，如图 4 只是开口向上的抛物线的简化草图.

三、多项式的交错图

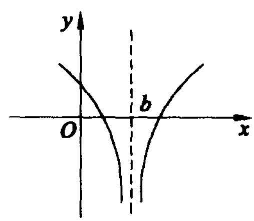
下面对特殊的函数符号图进行讨论，首先讨论多项式的符号图.

为了研究多项式的符号图，先将函数图上的点进行分类，观察下列图形.



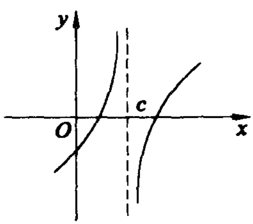
x 在 a 点，$f(x)\to+\infty$

图 5



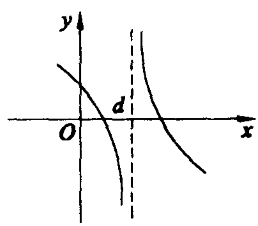
在 b 点，$f(x)\to-\infty$

图 6



在 c 点，$f(x)$ 分别 $\to\pm\infty$

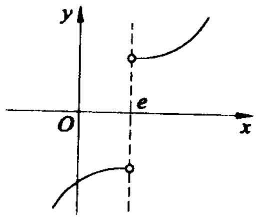
图 7



在 d 点，$f(x)$ 分别 $\to\pm\infty$

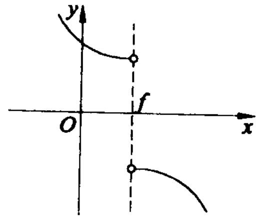
图 8

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com



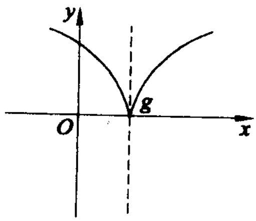
在 e 点，$f(x)$ 分别 → 正负值

图 9



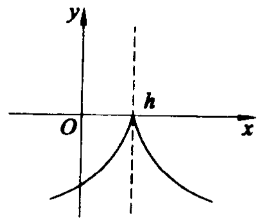
在 f 点，$f(x)$ 分别 → 正负值

图 10



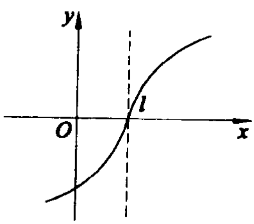
在 g 点，$f(x) \to 0^+$

图 11



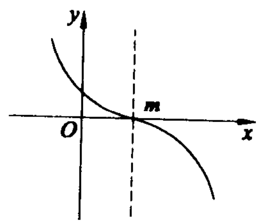
在 h 点，$f(x) \to 0^-$

图 12



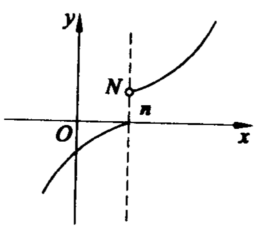
在 l 点，$f(x) \to 0$

图 13



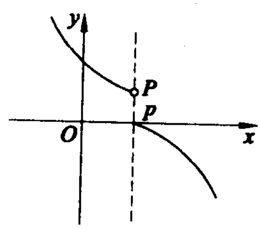
在 m 点，$f(x) \to 0$

图 14



在 n 点，$x \to n^-$，$f(x) \to 0$；
$x \to n^+$，$f(x) \to N$

图 15



在 p 点，$x \to p^+$，$f(x) \to 0$；
$x \to p^-$，$f(x) \to P$

图 16

从上述这些图中，可以看出，引起函数符号改变的点只能有三种点：无界（无定义）点、分段点和零点．其它点不会引起符号的改变．这些点称为关键点（兴趣点）．

定义 1．凡是 $f(x)$ 的值为 ∞，0 及使函数分段的自变量值称为 $f(x)$ 的关键点（兴趣点）．或者，换句话说，函数 $y=f(x)$ 的无界点，零点，分段点称为 $y=f(x)$ 的关键点（兴趣点）．

上述图中，a,b,c,d,e,f,g,h,l,m,n,p 均为关键点，关键点中使函数改变符号的点又称为交错点，为上图中 c,d,e,f,l,m,n,p 均为交错点，而 a,b,g,h 并没有改变函数的符号，因而不是交错点．

对于多项式来说，其符号图更特殊．

定理 1．若多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为根，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则其符号图是以其根 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为交错点的图形．

证明：首先证 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为交错点．

当 $x=a_i$ 时，$(i=1,2,\cdots,n)$

$$x-a_i=0$$

$$\Rightarrow f(a_i)=(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_i)\cdots(a_i-a_n)=0$$

因而按照定义可知，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为关键点；

其次再证所有 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为交错点．

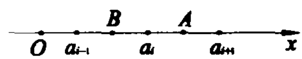


图 17

在 $x=a_i$ 点附近时，取 A,B 两点，假定 $B<a_i<A$（图 17），当 x 由 A 点变到 B 点时，即点由 a_i 的右边过渡到 a_i 的左边时，考虑 $f(x)$ 的符号变化情况．

当 x 点在 A 点即 $a_i<x<a_{i+1}$ 时，$(x-a_1),(x-a_2),\cdots,(x-a_i)$ 均正，即乘积

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_i)>0$$

$f(x)$ 的符号完全由 $(x-a_{i+1})(x-a_{i+2})\cdots(x-a_n)$ 的符号决定，而每个因式 $(x-a_{i+1}),(x-a_{i+2}),\cdots,(x-a_n)$ 均为负，即 $f(x)$ 的符号由负因式的个数 $(n-i)$ 的奇偶数决定.

当 x 点在 B 点时，即 $a_{i-1}<x<a_i$，和 A 点比较，$f(x)$ 的正因式少了一个 $(x-a_i)$，而多了一个负因式 $(x-a_i)$，即 $f(x)$ 的符号中多了一个负号. 即 $f(x)$ 过 a_i 点时变了一次符号，所以 $f(x)$ 过 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 点时改变了一次符号，证明 a_i 为交错点.

综上所述，多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

符号图是以其根 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为交错点的图形.

关于多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

符号图的交错性，还可用列表的方法加以说明.

表一

因式 \ 区间符号	$(-\infty,a_1)$	a_1	(a_1,a_2)	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	(a_{n-1},a_n)	a_n	$(a_n,+\infty)$
$(x-a_1)$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x-a_2)$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$\cdots$									
$(x-a_{n-1})$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x-a_n)$	-	-	-	-	-		-	0	+
$f(x)$	$(-1)^n$	0	$(-1)^{n-1}$	0		0	-	0	+

从上表可看出，$f(x)$ 的最右边总是正的，因为每个因式都是正数，然后从右向左过一个根，改变一次符号，在每个根处，$f(x)$ 恒为零，因为总有一因式 $(x-a_i)$ 为零.

进一步可证明标准多项式：

1.每个因式均为一次式:$(x-a_i)$;

2.根的次序是从小到大,由左向右排列;

3.最高项系数为正.

$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$的符号图为:$x>a_n$时,$f(x)>0$,自右向左,每过一个根,正负号交换一次.

例3 做函数

$y=f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的符号图.

解: 此函数为标准多项式,其根分别为1,2,3,4,按上述方法可画出符号图(图18)

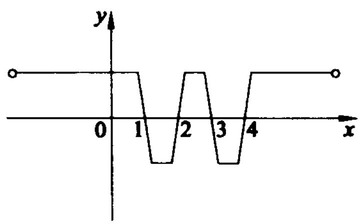


图18

四、等价的符号图

一个非零的式子与其倒数的符号相同,例如,$x\neq 0$时,x与$\frac{1}{x}$符号相同,$f(x)\neq 0$时,$f(x)$与$\frac{1}{f(x)}$符号相同.因而,可引进等价的符号图的概念.

定义2:若函数$f_1(x)$,$f_2(x)$在其共同的定义域上,若符号相同,即$T-\mathrm{sgn}[f_1(x)]$与$T-\mathrm{sgn}[f_2(x)]$相同,则称函数$f_1(x)$与$f_2(x)$符号图等价,记作:

$$T-\mathrm{sgn}[f_1(x)]\sim T-\mathrm{sgn}[f_2(x)]$$

或者简记作:

$f_1(x) \sim f_2(x)$

例如，$T-\operatorname{sgn}(x-1) \sim T-\operatorname{sgn}(x-1)^3$

或者说：

$(x-1) \sim (x-1)^3$

为了使倒数有确切的对应关系，特规定：

定义 3：0^+ 的倒数为 $+\infty$；0^- 的倒数为 $-\infty$.

由符号图的定义，容易证明以下的结论：

定理 2：1. 当 $k>0$ 时，$kf(x) \sim f(x)$

2. 当 $k<0$ 时，$kf(x) \sim -f(x)$

其中：$-f(x)$ 表示与 $f(x)$ 符号相反的符号图 — 相反符号图.

3. $x^2 \sim x^{2n} \sim 1, x^{2n+1} \sim x (n \in Z)$

4. $f(x) \sim \dfrac{1}{f(x)}$

例 4 求 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ 的符号图.

解： 由整式的符号图与其倒数的符号图相同可知：

$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \sim (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

此式又是标准多项式，符号图是一个交错图，又由定义 3 加以补充，修改，可知：其符号图如图 19 所示：

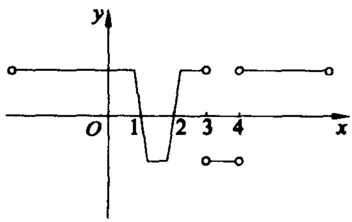


图 19

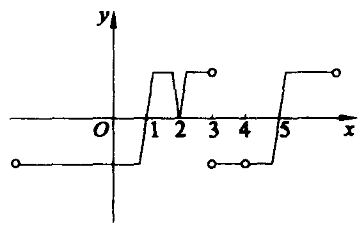


图 20

在 $x=3$ 处，当 $x \to 3^-$ 时，$f(x) \to +\infty$，当 $x \to 3^+$ 时，$f(x) \to -\infty$；

在 $x=4$ 处，当 $x \to 4^-$ 时，$f(x) \to -\infty$，当 $x \to 4^+$ 时，$f(x) \to +\infty$.

例 5 求函数 $\dfrac{(x-1)^3(x-2)^2(x-5)^7}{(x-3)^7(x-4)^6}$ 的符号图.

解：　由$(x-1)^3 \sim (x-1)$；$(x-2)^2 \sim 1$；$(x-5)^7 \sim (x-5)$；$(x-3)^7 \sim (x-3)$；$(x-4)^6 \sim 1$得：

$$\frac{(x-1)^3(x-2)^2(x-5)^7}{(x-3)^7(x-4)^6} \sim \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)} \sim (x-1)(x-3)(x-5)$$，而$(x-1)(x-3)(x-5)$是一个标准的多项式.符号图是一个交错图，由定义3可知，其符号图如图20所示.

从图20可知，$x=1$，$x=3$，$x=5$为其交错点，$x=2$为零点，$x=4$为$-\infty$，$x \to 3^-$时，其值为$+\infty$，$x \to 3^+$时，其值为$-\infty$.

五、基本初等函数的符号图汇总

为了使用方便，将基本初等函数的符号图汇总如下，可供参考.

①$y=\pm 1$，(图21)；　②$y=x$，(图22)；

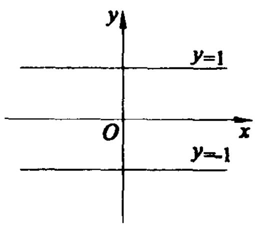


图21

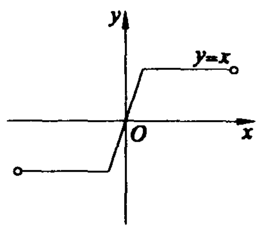


图22

③$y=\pm 2^x$，(图23)；　④$y=x^2$，(图24)；

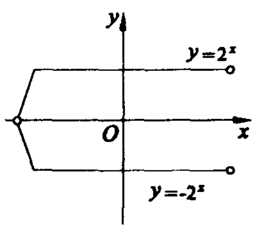


图23

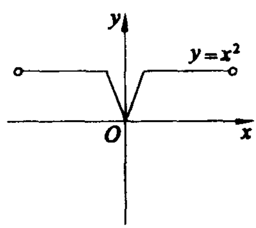


图24

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com