弹性力学中的能量原理及其应用

付宝连　著

科学出版社
www.sciencep.com

河北省教育厅学术著作出版基金资助出版

弹性力学中的
能量原理及其应用

付宝连 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了弹性力学的能量原理及其应用。内容包括某些经典的和著名的能量原理和能量法；修正的卡斯提梁诺定理及其应用，功的互等理论及功的互等法，热弹性力学的广义变分原理和混合变量的一族变分原理及其应用；有限变形弹性理论的变形能原理，功的互等理论及其应用和混合变量的一族变分原理。本书所提出的理论和方法特别适用于复杂边界条件问题的求解，如用修正的卡斯提梁诺定理求解了复杂边界条件矩形板的弯曲；应用混合变量的最小势能原理求解了复杂边界条件矩形板的平面应力问题；应用功的互等法求出了具有复杂边界条件立方体的位移解。此外，还系统地求解了复杂边界条件矩形板的平衡、振动和稳定等问题，并提供了相应的数据和图表。

本书可供高等院校土木工程、力学、航空和机械类专业的师生以及相关领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学中的能量原理及其应用/付宝连著. —北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-012666-1

Ⅰ. 弹…　Ⅱ. 付…　Ⅲ. 弹性力学-能量原理　Ⅳ. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 000051 号

责任编辑：童安齐 / 责任校对：刘小梅

责任印制：吕春珉 / 封面设计：张　放

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004 年 6 月第　一　版　　开本：850×1168 1/32

2004 年 6 月第一次印刷　　印张：20 1/4

印数：1—1 000　　字数：534 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

笔者长时期从事工科院校力学专业高年级学生和机械类专业研究生弹性力学能量原理和板壳力学的教学工作以及相关课题的科研工作，本书便是这一时期教学经验的积累和科研成果的总结。

本书共分四部分。第一部分（第一章至第三章）阐述变分法的基础知识，拉格朗日乘子法和边界条件待定的变分问题。第二部分（第四章至第六章）介绍弯曲直梁的功的互等理论，弯曲直梁的变分原理以及大挠度弯曲直梁的能量原理。第三部分（第七章至第九章）叙述弯曲薄板的功的互等理论，弯曲薄板的变分原理以及大挠度弯曲薄板的能量原理。第四部分（第十章和第十一章）论述小变形理论的能量原理和有限变形理论的能量原理。

除按上述诸章顺序依次地介绍每一章的相关内容外，在相关章节内还十分注意诸能量原理，如变形能原理、功的互等定理、诸变分原理以及虚功原理和虚余功原理相互间关系的分析，通过这些分析除可了解诸能量间的关系外，还可加深对每一能量原理的理解。

弹性力学能量原理的内容十分丰富，由于笔者的知识所限，本书在内容的取舍上肯定会有些偏颇。至于把个人所取得的某些成果介绍给大家，自然是希望能够得到认同，并起到抛砖引玉的作用。

本书在付梓之际，特别要感谢著名科学家钱伟长先生长时期的关心、帮助和指导；也要感谢中科院院士高镇同先生和工程院院士钟群鹏先生的关心和帮助，同时也要感谢著名力学家唐立民先生的帮助。本书的出版，得到了河北省教育厅学术著作出版基金的资助，还得到了笔者的诸多同仁和好友的关怀和鼓励，在此一并表示感谢。

本书是关于弹性力学能量原理及其应用的学术著作，其中包括大量的理论推导及数值计算，疏漏之处在所难免，敬请读者和专家不吝指正。

目　　录

绪　　论

变分法的早期思想是约翰·伯努利(Johann Bernoulli)在1696年以公开信的形式提出的,研究的是最速降线问题。关于变分法的一般理论是由欧拉(Euler,E.)于1744年和拉格朗日(Lagrange,J.L.)于1762年共同奠基的。我们现在所用的变分运算法是由拉格朗日给出的,称之为拉格朗日法。

固体力学著名的势能原理是拉格朗日于18世纪中叶建立的。意大利学者卡斯提梁诺(卡斯提梁诺,A.)于1876年提出了最小功原理。德国学者海林葛尔(Hellinger,E.)于1914年发表了有关不完全广义变分原理的论文。后来,美国学者赖思纳(Reissner,E.)发表了与海林葛尔相类似的工作,于是人们称他们的工作为海林葛尔-赖思纳变分原理。我国学者钱令希于1950年发表了“余能原理”的论文。我国学者胡海昌于1954年发表了有关广义变分原理的论文,稍后,日本学者鹫津久一朗(Washizu,K.)于1955年发表了与胡海昌相类似的工作,于是人们称他们的工作为胡-鹫变分原理。再后,于1964年,我国学者钱伟长提出了构造广义泛函的拉格朗日乘子法,如今,这一方法已被广泛地采用。1964年,古尔丁(Gurtin,M.E.)提出了线弹性动力学变分原理。意大利学者佟蒂(Tonti,E.)于1967年提出了四类变量的广义变分原理,在该变分原理中,位移、应变、应力以及贝尔特拉密(Beltrami,E.)应力函数都是变分变量。

时至今日,弹性力学的能量原理和能量方法已发展得相当成熟,但是,可以确信,新的思想、新的理论和方法还会不断地产生和发展。

虚余功原理和最小余能原理充分性的证明是早已解决了的经典问题。卡门(Karman,von,Th.)和霍尔(Haar,A.)曾有过不完

整的证明。完整的证明首先是由希尔伯特(Hirbert,D.)指出的,最终的证明是由苏斯威尔(Southwell,R.V.)于1938年完成的。这一证明严谨,但过于冗长,因此很多著作宁愿不引用它。无疑地,这有碍于对虚余功原理和最小余能原理的完整理解。

我们曾在一篇短文中用剖面法证明了:最小余能原理对应力取极值等价于变形体的位移单值条件和位移边界条件。我们还给出了这一充分性的解析证明,为此,只要在总余能中并入零值项 $\iiint_V u_i \delta\sigma_{ij,j} \mathrm{d}V$,并对 σ_{ij}取变分极值,即可完成这一证明。这一方法还适用于杆、板和壳,具有一般性。如在总余能中并入项 $\iiint_V u_i [(\delta_{k,i} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} \mathrm{d}V$,并对 σ_{ij}和 u_i 取变分驻值,该法还可适用于有限变形理论虚余功原理和驻值余能原理充分性的证明。

最小势能原理和最小余能原理在变形体力学中都有着重要的应用。然而,一般说来,最小余能原理远不如最小势能原理应用得方便和广泛。为此,我们提出了修正的卡斯提梁诺定理,它对经典的卡斯提梁诺定理进行了两个方面的修正。第一个修正是以外载荷与影响函数的乘积代替余能密度对集中力的偏导数,这为计算特殊载荷的作用提供极大的方便。第二个修正是在经典的卡斯提梁诺定理中引入非齐次边界位移项,这为求解复杂边界条件问题提供理论基础。应用该修正的卡斯提梁诺定理可以简便地求解任何载荷作用且具有复杂边界条件矩形板的弯曲。

功的互等定理是于1872年由贝蒂(Betti,E.)提出的,这一定理的贝蒂命题为:作用于一弹性体的第一组力(包括反力和惯性力)在第二组力相应位移上所做的功等于作用于同一弹性体的第二组力(包括反力和惯性力)在第一组力相应位移上所做的功。根据贝蒂这一命题,还可导出位移互等定理、反力互等定理和位移反力互等定理等三个引理。

笔者于1981年1月首先在受横向单位集中载荷作用的四边简支矩形板和受均布载荷作用的悬臂矩形板之间应用功的互等定

理，得到了悬臂矩形板的正确的挠曲面方程。稍后，于 1982 年提出了功的互等定理的修正命题，该修正命题为：对于形状，尺寸和材料完全相同，而且处于真实状态的两个小变形线性弹性体，不管它们的体力，边界力和边界位移是否相同，均有第一弹性体的外力在第二弹性体相应位移上所做的功等于第二弹性体的外力在第一弹性体相应位移上所做的功。根据这一修正命题，还可以得到功的互等定理与位移叠加原理等价和功的互等定理与反力叠加原理等价两个等价性原理。

功的互等定理修正命题明确指出，功的互等定理适用于不同体力，不同静力边界条件和不同位移边界条件的两个不同的线性弹性体；而功的互等定理的贝蒂命题只限定两组力必须作用于具有相同位移边界条件的同一弹性体。贝蒂命题限定的解放，发掘出了功的互等定理的固有内涵，开发出功的互等定理的新功能。其次，由修正命题所导出的两个等价性原理也是对由贝蒂命题所导出的三个引理的推广。这样，功的互等定理的修正命题及由其所导出的两个等价性原理全面地发展了贝蒂命题及由其所导出的三个引理而成为功的互等理论的新组成部分。

自 1985 年以后，进一步地应用功的互等理论于求解弯曲矩形板的平衡、振动和稳定问题，弯曲圆板的平衡问题，混合边界条件矩形板的弯曲问题，壳体的平衡问题，弹性力学的平面问题和空间等问题，遂形成一个系统的方法，称之为功的互等法。功的互等理论与功的互等法一起形成了功的互等体系。

弹性力学中的诸能量原理间存在一定的关系，这些关系曾由威廉姆斯（Williams，D.，1928）和布什尔（Th. Pöschl，1936）讨论过。钱伟长应用应变能原理和功的互等定理相结合的方法（简称 W-P 法）导出了卡斯提梁诺定理。

笔者（1989）应用 W-P 法系统地导出了最小势能原理，最小余能原理，已知边界位移变化的势能原理（或广义虚功原理），已知边界力变化的余能原理（或广义虚余功原理）和体积力变化的变分原理。前述工作都证明，W-P 法是建立变分原理泛函的一个可靠途

径。应用 W-P 法，作者(1986)建立了混合能量原理。实际上，上述原理就是混合变量变分原理的本体。对上述工作稍加修正后，我们又给出了小变形理论混合变量的一族能量原理，即混合变量的最小势能原理，最小余能原理，广义势能原理，广义余能原理，虚功原理和虚余功原理(2003)。

混合变量最小势能原理要求位移是弱容许的，即只要求位移应预先满足应变-位移关系，而不必预先满足位移边界条件。而混合总势能取极值的欧拉方程和自然边界条件分别为平衡方程，静力边界条件和位移边界条件。因此，这一原理能够比较容易地求解复杂边界条件问题。混合变量最小余能原理也有与混合变量最小势能原理相对应的特点。

比奥(Biot，M. A.，1956)建立了热弹性力学的变分原理。此后，巴拉布赫(Балабух，П. Н.)和沙巴瓦洛夫(Шаповалов，Л. А.，1960)将上述变分原理推广到有热源的情况，导出了热弹性力学的平衡方程，静力边界条件和具有热源的热传导方程。在上述工作的基础上，笔者(1964)建立了热弹性力学的广义势能原理和广义余能原理，由这些原理的广义自由能和广义自由余能取变分驻值可得到力学和热传导学的全部域内方程和边界条件。

意大利学者佟蒂，1967 撰文指出，胡-鹫原理被推广于热弹性为热弹性力学的广义变分原理是由笔者(1964)完成的。钱伟长在评述 20 世纪 50 年代和 60 年代我国学者关于广义变分原理的文章时曾多次引用过笔者的工作(1964)。

毫无疑问，有限变形弹性力学能量原理的研究十分重要。

克拉贝龙(Clapeyron，B. P. E.，1858)建立了小变形线性弹性理论的应变能原理。笔者(2002)建立了几何非线性和物理非线性的变形能原理，这一原理指出，一变形体的平衡外力在相应协调位移上所做的功等于变形体的势能及余能之和，再加上二次应变项的变形能。其数学表达式为

$$\iiint_V F_i u_i \mathrm{d}V + \iint_{S_p} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S + \iint_{S_u} p_i \bar{u}_i \mathrm{d}S$$

$$= \iiint_V \left\{ (A(e) + B(\sigma)) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j} \right\} \mathrm{d}V \tag{1}$$

其中 $A(e)$为势能密度，$B(\sigma)$为余能密度。与克拉贝龙的应变能原理比较，变形能原理适用于几何非线性和物理非线性的变形体。

贝蒂(1872)提出了功的互等定理的贝蒂命题，笔者(1982)提出了功的互等定理的修正命题和功的互等法，并将功的互等定理发展成为功的互等理论。之后，笔者(2002)又提出了有限变形线性弹性体的功的互等定理，其表达式为

$$\begin{aligned}
&\iiint_V F_{1i}u_{2i}\mathrm{d}V + \iint_{S_{1p}} \bar{p}_{1i}u_{2i}\mathrm{d}S + \iint_{S_{1u}} p_{1i}u_{2i}\mathrm{d}S \\
&+ \iiint_V \sigma_{1ij}\left(\frac{1}{2}u_{2k,i}u_{2k,j} - u_{1k,i}u_{2k,j}\right)\mathrm{d}V \\
=&\iiint_V F_{2i}u_{1i}\mathrm{d}V + \iint_{S_{2p}} \bar{p}_{2i}u_{1i}\mathrm{d}S + \iint_{S_{2u}} p_{2i}u_{1i}\mathrm{d}S \\
&+ \iiint_V \sigma_{2ij}\left(\frac{1}{2}u_{1k,i}u_{1k,j} - u_{2k,i}u_{1k,j}\right)\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{2}$$

式(2)适用于两个相关有限变形体，称为第一类功的互等定理。如果第一弹性系统为小变形体，第二弹性系统为相关有限变形体，则式(2)成为

$$\begin{aligned}
&\iiint_V F_{1i}u_{2i}\mathrm{d}V + \iint_{S_{1p}} \bar{p}_{1i}u_{2i}\mathrm{d}S + \iint_{S_{1u}} p_{1i}u_{2i}\mathrm{d}S \\
&+ \iiint_V \frac{1}{2}\sigma_{1ij}u_{2k,i}u_{2k,j}\mathrm{d}V \\
=&\iiint_V F_{2i}u_{1i}\mathrm{d}V + \iint_{S_{2p}} \bar{p}_{2i}u_{1i}\mathrm{d}S + \iint_{S_{2u}} p_{2i}u_{1i}\mathrm{d}S \\
&- \iiint_V \sigma_{2ij}u_{2k,i}u_{1k,j}\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{3}$$

式(3)称为第二类功的互等定理。

有限变形两类功的互等定理的建立，为求解有限变形问题，譬如说杆、板和壳的大挠度问题提供一个新的途径，也可能成为建立几何非线性边界元法新的理论基础。

有限变形理论变形能原理和功的互等定理(简称两个新原理)

的给出，健全了现有有限变形理论的能量原理，使之与小变形理论的能量原理一一对应。

此外，由该两个新原理还系统地导出了有限变形理论的最小势能原理，驻值余能原理，已知边界位移变化的势能原理，已知边界力变化的余能原理和体积力变化的变分原理。

进一步地应用这两个新原理，还导出了有限变形理论混合变量的最小势能原理，驻值余能原理，广义势能原理，广义余能原理，虚功原理和虚余功原理。

有限变形混合变量的势能原理也只要求位移是弱容许的，而混合总势能取极值的欧拉方程和自然边界条件为平衡方程，静力边界条件和位移边界条件。有限变形混合变量的驻值余能原理也有与前述有限变形混合变量最小势能原理相对应的特点，不再赘述。

有限变形理论变形能原理和功的互等定理的建立，为推导有限变形混合变量的一族变分原理起到了桥梁作用，这有重要的理论意义。

小变形理论和有限变形理论混合变量的变分原理才刚刚建立，有理由相信，随着时间的推移，还会不断地开发出其内在的潜能，并扩展其应用。

第一章　变分法的一些基本概念

在科学技术上,常常需要解决某一函数的极大值和极小值问题,这是属于微积分学科所要解决的极值问题。同时,我们还会遇到更一般的函数,即泛函的极大值和极小值(或驻值)问题,这类问题是由变分法所要处理的变分问题。为了了解变分法,我们首先介绍历史上最著名的三个变分法命题,然后介绍变分法的若干特性,最后介绍变分法的基本预备定理。

§1.1　历史上著名的三个变分法命题

1.1.1　最速降线问题

最速降线问题是由约翰·伯努利在1696年以公开信的形式提出来的。后来经莱比尼兹、牛顿、亚可比·伯努利等多方的努力才得到完善的解决。

这一问题可能是由打滑梯问题引发出来的。考虑图1.1.1,设有不在同一垂线上的 A 和 B 两点,在此两点间连成某一条曲线,并有一重物沿此曲线下滑,在略去各种阻力的理想情况,试问,如何连结这一条曲线才会使由 A 到 B 下滑的时间最短?现在让我们来定性地分析这一问题。显然,以直线 AB 连结 A 和 B 两点,路程最短,但平均速度较小,故而时间不会最短。而如果连成如 ACB 较陡形式的曲线,下滑的平均速度较

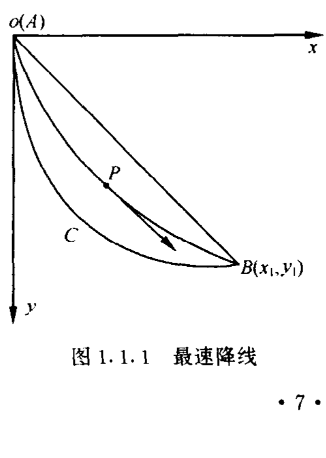

图1.1.1　最速降线