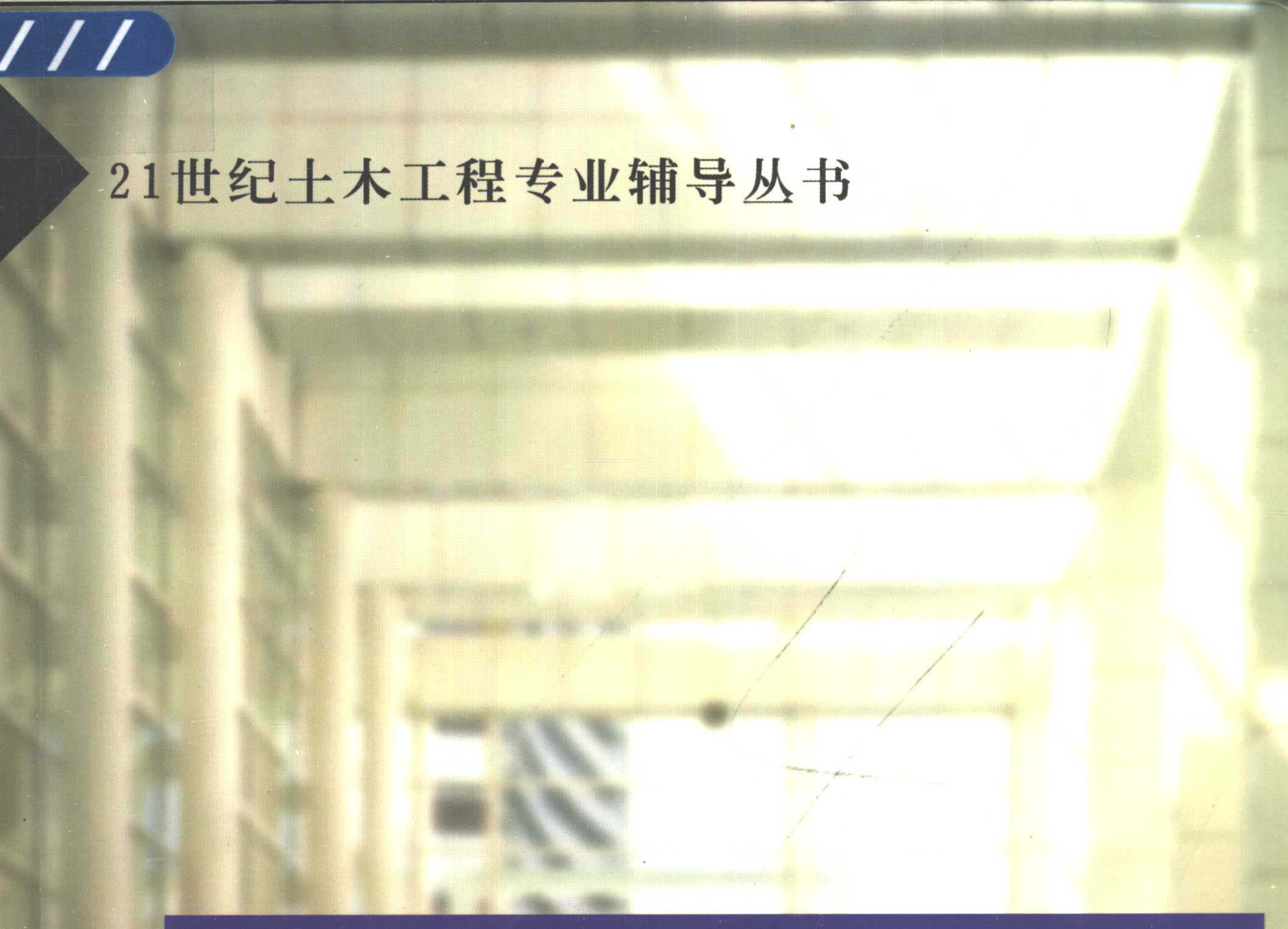
21世纪土木工程专业辅导丛书



《弹性力学》题解

主编　林小松　樊友景

武汉理工大学出版社

WUTP

21世纪土木工程专业辅导丛书

《弹性力学》题解

主编　林小松　樊友景

武汉理工大学出版社
·武汉·

【内容提要】

本书基本上按徐芝纶先生的《弹性力学简明教程》的内容范围编写，全书分绪论、平面问题的基本理论、平面问题的直角坐标解答、平面问题的极坐标解法、平面问题的差分法、平面问题的变分法、用有限元法解平面问题、空间问题的基本理论、空间问题的解答、薄板弯曲问题10章，每章均包括知识要点、例题解析和练习题三个部分；第11章为综合测试题，书后附有部分练习题和综合测试题的答案。在编写第6章“平面问题的变分法”的内容时，考虑到变分法的完整性，在《弹性力学简明教程》的基础上简略地补充了应力变分法的知识要点和练习题。

本书可作为高校工科类专业的教学参考书，也可供有关技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

《弹性力学》题解/林小松，樊友景主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2003.12
ISBN 7-5629-2030-3

Ⅰ. 弹… Ⅱ. ①林…②樊… Ⅲ. 弹性力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O343

出版发行：武汉理工大学出版社（武汉市武昌珞狮路122号　邮政编码：430070）
经 销 者：各地新华书店
印 刷 者：武汉理工大印刷厂
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：15
字　　数：374千字
版　　次：2003年12月第1版
印　　次：2003年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5629-2030-3/TU·231
印　　数：1～3000册
定　　价：21.00元

前　言

作为一名教师，我经常感到弹性力学的习题不够，供挑选的余地不大。如何编出一本理想的题解，使学生通过习题的练习加深对基本概念的理解、加强对基本理论的掌握，并与工程实际相联系，以提高对弹性力学的学习兴趣，这就是我们编写这本《〈弹性力学〉题解》的初衷。

本书基本上按徐芝纶先生的《弹性力学简明教程》划分章节，樊友景编写第1～4章，林小松编写第5～11章。第11章为综合测试题，书后附有部分练习题和综合试题的答案。

在编写本书时，参考了十余种参考书籍，收集了十多套近几年的研究生考试题，同时包括作者自己编写的部分习题和试题。

本书可供开设“弹性力学”课程的高校工科类专业师生作教学用书，也可供研究生教学作参考用书和准备考研究生的学生作自我练习用。

由于水平所限，编写中的错漏之处在所难免，希望读者予以批评指正。

编　者

2003年5月

目　　录

1 绪　　论

1.1 知识要点

1.1.1 弹性力学的研究对象和任务

弹性力学研究弹性体在外力或其他因素作用下所产生的应力、应变和位移，并为各种结构物和其构件的强度、刚度和稳定性计算提供必要的理论基础和精确的计算方法。显然，弹性力学与材料力学的任务是相同的。但是，弹性力学比材料力学的研究对象更广泛，采用的方法更严密，所得的结果更精确。弹性力学与以前学过的其他力学的区别见表1-1。

弹性力学与其他力学课程的比较　　**表1-1**

课　程	研究对象	研究内容
理论力学	质点、质点系(刚体)	机械运动的一般规律
材料力学	单根杆件	弹性体在外因素作用下所产生的内力、应力、应变和位移，提供强度、刚度和稳定性计算的理论
结构力学	杆系结构	
弹性力学	实体结构、板壳	

1.1.2 弹性力学的基本量

弹性力学所涉及的基本量的定义、符号及正负规定见表1-2。

直角坐标表示的基本量　　**表1-2**

基　本　量		符　号	量　纲	正负号规定
应　力	正应力	$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$	[力][长度]$^{-2}$	正面上沿坐标轴正向为正
	剪应力	$\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$	[力][长度]$^{-2}$	负面上沿坐标轴负向为正
应　变	正应变	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$	无量纲	线段伸长为正
	剪应变	$\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$	无量纲	线段间直夹角变小为正
位　移		u,v,w	[长度]	沿坐标轴正向为正
外　力	体　力	X,Y,Z	[力][长度]$^{-3}$	
	面　力	$\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$	[力][长度]$^{-2}$	

注：①外法线方向与坐标轴的正向一致的面叫正面；外法线方向与坐标轴的负向一致的面叫负面。

②剪应力前一个脚标表示该量的作用面垂直于那个坐标轴，后一个脚标表示该量的作用方向沿着那个坐标轴方向。

1.1.3 弹性力学的基本假定

为了简化分析，弹性力学采用表1-3所述的几条基本假定。

弹性力学基本假定及其引用后的结果　　表1-3

基本假定		引用后的结果
物理假设(理想弹性体假设)	连续性假定	应力、应变和位移可用坐标的连续函数表示
	均匀性假定	物体的弹性常数不随坐标位置而改变
	各向同性假定	物体的弹性常数不随方向而改变
	完全弹性假定	保证了应力与应变之间的一一对应的线性关系
几何假设	微小变形假定	基本方程化为线性方程①,可应用硬化原理②、叠加原理③

注:① 考虑物体的变形建立几何方程和物理方程时,略去应变和转角的二次幂或二次乘积以上的项(高阶微量),使得到的基本方程都简化为线性偏微分方程。

② 硬化原理:当变形足够小时,在分析物体变形后的平衡状态时,可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸。

③ 叠加原理:在线弹性和小变形条件下,弹性体在多组外力同时作用下的解答等于各组外力分别作用下的解答相叠加。

1.1.4 弹性力学的研究方法

在外力作用下,弹性体内部各点的应力、应变和位移都是位置坐标的函数。这些函数关系只用平衡条件是不能求解的,所以,任何弹性力学问题均为超静定问题,必须从静力学、几何学和物理学三方面来考虑。这一点与材料力学是相同的。

与材料力学不同的是:

①无须附加假定(材料力学在基本假定的基础上还要引入附加假定,如梁的弯曲应力分析时要引入平截面假定、纵向纤维互不挤压假定、弯曲剪应力沿截面宽度均匀分布假定等);

②弹性力学不是对某段构件或结构建立方程,而是从物体中任一点取微元体进行分析,从而得到平衡微分方程(即应力与体力之间的关系)、几何方程(即应变与位移之间的关系)、物理方程(即应力与应变之间的关系),这些方程都是偏微分方程。

此外,在弹性体的表面,还必须考虑弹性体内的应力在边界上的值与面力之间的平衡关系及支承条件,从而得到边界条件。在给定的边界条件下求解上述方程,得到未知的应力、应变和位移。

1.2 例题解析

【例1-1】 图1-1所示受轴向拉伸的变截面杆,若采用材料力学的方法计算其应力,所得结果是否总能满足杆段平衡和微元体平衡?

【解】

按材料力学的方法计算轴向拉伸的应力时,横截面上无剪应力,正应力均匀分布,$\sigma_y=\frac{P}{A}$ (A 为横截面面积),同时认为杆的纵向纤维互不挤压,若取出整个杆件或其中一段都能满足平衡条件,如图1-1(b)所示。若在杆的边界上取一微元体其各个面上的应力分布如图1-1(c)所示,显然它不能平衡,可见,对该问题材料力学的结论是错误的。

按弹性力学的研究方法得到,图1-1(c)所示微元体的两个互相垂直的截面上都有正应力和剪应力,如图1-1(d)所示。

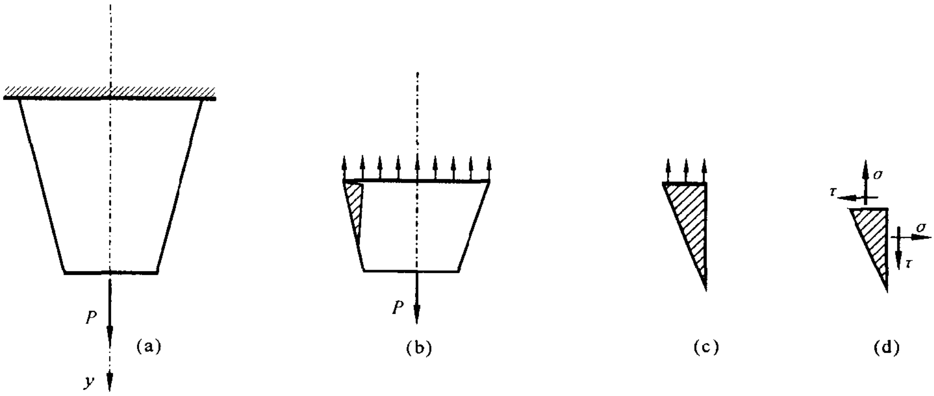


图1-1　例1-1图

1.3　练习题

1-1　判断与改错题

1-1-1　材料力学研究杆件，不能分析板壳；弹性力学研究板壳，不能分析杆件。（　　）

1-1-2　体力作用在物体内部的各个质点上，所以它属于内力。（　　）

1-1-3　在弹性力学和材料力学里关于应力的正负规定是一样的。（　　）

1-2　填空题

1-2-1　弹性力学研究物体在外因作用下，处于____阶段的______、________和________。

1-2-2　物体的均匀性假定，是指物体内________________相同。

1-2-3　物体是各向同性的，是指物体内________________相同。

1-2-4　解答弹性力学问题必须从__________、__________、__________三个方面来考虑。

1-3　选择题

1-3-1　弹性力学对杆件分析（　　）

A. 无法分析　　B. 得出近似的结果

C. 得出精确的结果　　D. 需采用一些关于变形的近似假定

1-3-2　下列对象不属于弹性力学研究对象的是（　　）

A. 杆件　　B. 板壳　　C. 块体　　D. 质点

1-3-3　如图1-2所示弹性构件的应力和位移分析要用什么分析方法（　　）

A. 材料力学　　B. 结构力学　　C. 弹性力学　　D. 塑性力学

1-3-4　如图1-3所示单元体右侧面上的剪应力τ_1应该表示为（　　）

A. τ_{xy}　　B. τ_{yx}　　C. τ_{zx}　　D. τ_{yz}

1-3-5　按弹性力学规定，图1-3所示单元体上的剪应力（　　）

A. 均为正　　B. τ_1、τ_4为正，τ_2、τ_3为负

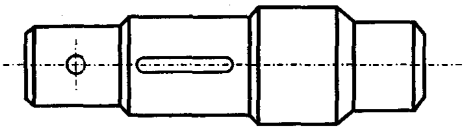


图 1-2　习题 1-3-3 图

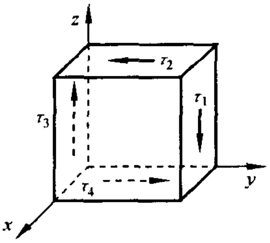


图 1-3　习题 1-3-4 图

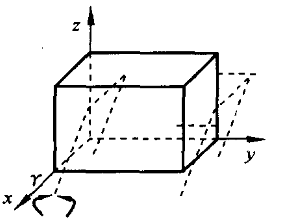


图 1-4　习题 1-3-7 图

C. 均为负　　　　D. τ_1、τ_3 为正，τ_2、τ_4 为负

1-3-6　按材料力学规定，图 1-3 所示单元体上的剪应力　　(　　)

A. 均为正　　　　B. τ_1、τ_4 为正，τ_2、τ_3 为负

C. 均为负　　　　D. τ_1、τ_3 为正，τ_2、τ_4 为负

1-3-7　如图 1-4 所示单元体剪应变 γ 应该表示为　　(　　)

A. γ_{xy}　　B. γ_{yz}　　C. γ_{zx}　　D. γ_{yx}

1-3-8　下列外力不属于体力的是　　(　　)

A. 重力　　B. 磁力　　C. 惯性力　　D. 静水压力

1-3-9　将两块不同材料的金属板焊在一起，便成为一块　　(　　)

A. 连续均匀的板　　　　B. 不连续也不均匀的板

C. 不连续但均匀的板　　D. 连续但不均匀的板

1-3-10　下列哪种材料可视为各向同性材料　　(　　)

A. 木材　　B. 竹材　　C. 混凝土　　D. 夹层板

2　平面问题的基本理论

2.1　知识要点

2.1.1　两类平面问题的基本概念

一般情况下，弹性力学问题都是空间问题。但是，当弹性体具有某种特殊形状，受某种特殊外力作用时，空间问题可以简化为平面问题，即弹性体的几何参数和所受的外力只是二维坐标（例如x，y）的函数（与z无关），只需要确定Oxy平面内的应力、应变和位移分量（且只是x、y的函数），其他分量或不存在，或可用Oxy平面内的分量表示出来，所得基本方程也都是二维的。平面问题分两种情况，平面应力问题和平面应变问题。这两类平面问题的基本特征见表2-1。

两类平面问题的基本特征　　**表2-1**

物理量	平面应力问题			平面应变问题		
	Oxy平面内的分量（基本未知量）		z方向的分量（不存在或不独立）	Oxy平面内的分量（基本未知量）		z方向的分量（不存在或不独立）
位移分量	u,v	仅是x、y的函数，与z无关	w由ε_z积分得到	u,v	仅是x、y的函数，与z无关	$w=0$
应变分量	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$		$\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ $\varepsilon_z=-\mu(\sigma_x+\sigma_y)/E$	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$		$\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=\varepsilon_z=0$
应力分量	$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$		$\tau_{xz}=\tau_{yz}=\sigma_z=0$	$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$		$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$
弹性体形状特征	z方向尺寸远小于板面尺寸的等厚度薄板，如图2-1			z方向尺寸远大于截面尺寸的等截面柱体，如图2-2		
弹性体受外力特征	外力平行于板面作用在板边，且沿板厚不变；板面上无面力，$\overline{Z}$、Z都是零			外力垂直于柱体轴线，且沿长度方向不变；$\overline{Z}$、Z都是零		

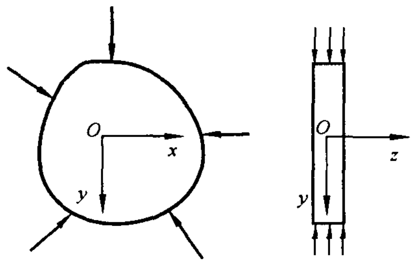
综上所述，无论是平面应力问题，还是平面应变问题，它们所具有的独立未知量是相同的：3个应力分量（$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$）、3个应变分量（$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$）、2个位移分量（$u,v$），并且都是$x$，$y$的函数，与$z$无关。

2.1.2　平面问题的基本方程

解答弹性力学问题必须从静力学、几何学和物理学三个方面考虑，建立其基本方程。

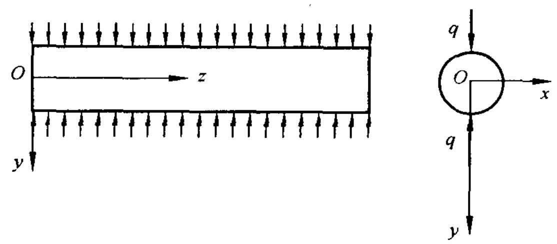
（1）平衡微分方程

从弹性体内任一点取出微元体，建立弹性体内一点的应力分量与体力分量之间的关系，得到平衡微分方程：



(a)　　(b)

图 2-1



(a)　　(b)

图 2-2

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{2-1}$$

(2)几何方程

三个应变分量与两个位移分量之间的关系。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{2-2}$$

注意：

①从几何方程(2-2)可以看到，三个应变分量由两个位移分量表示，这说明三个应变分量之间要满足一定的协调关系，不能任意选取。这个协调关系称为相容方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{2-3}$$

②按应力求解弹性力学问题时，由于两个平衡微分方程中含有三个应力分量，所以相容方程(2-3)是必须满足的基本方程之一。否则，就不能由所给出的应力求出连续的位移。

③在保证位移连续这一点上，几何方程(2-2)和相容方程(2-3)是等价的。因为变形要连续，三个应变分量之间要满足一定的协调关系，几何方程(2-2)是以两个位移分量作参数，间接地表示了这种关系，相容方程(2-3)则是直接地表示了这种关系。

④已知位移分量可以完全确定应变分量，反之，已知应变分量[满足相容方程(2-3)]不能完全确定位移分量。因为物体的位移一般由两部分组成，其中一部分是由物体的刚性位移引起的，另一部分是由物体受力变形引起的。所以变形为零时，物体可有不同的刚性位移，它取决于物体所受的约束条件。为了完全确定位移，必须有三个适当的约束条件。

⑤对两种平面问题，它们的几何方程是相同的，平衡微分方程也是相同的。

(3)物理方程

平面问题的物理方程，就是广义胡克定律运用于平面问题时所建立的三个应力分量和

三个应变分量之间的关系。

平面应力问题的物理方程：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

平面应变问题的物理方程：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

在平面应力问题的物理方程(2-4)中，将E、μ分别换成$E/(1-\mu^2)$、$\mu/(1-\mu)$就得到平面应变问题的物理方程(2-5)，剪切弹性模量G不变。

2.1.3 平面问题的边界条件

在弹性力学问题中，给定面力的边界，用S_σ表示；给定位移的边界，用S_u表示；l和m表示边界面的方向余弦。平面问题的边界条件一般可分为三类：

(1)位移边界条件

在S_u上，物体的位移分量在边界上等于边界上已知的位移。即：

在S_u上：

$$(u)_s=\overline{u},(v)_s=\overline{v} \tag{2-6}$$

(2)应力边界条件

在S_σ上，应力分量与面力分量之间应满足的平衡条件。即：

在S_σ上：

$$l\sigma_x+m\tau_{xy}=\overline{X},l\tau_{xy}+m\sigma_y=\overline{Y} \tag{2-7}$$

实质上，应力边界条件是弹性体内部各点的平衡条件在其边界上的延续。

当S_σ平行于y轴时：

$$\sigma_x=\pm\overline{X},\tau_{xy}=\pm\overline{Y} \tag{2-8a}$$

当S_σ平行于x轴时：

$$\sigma_y=\pm\overline{Y},\tau_{yx}=\pm\overline{X} \tag{2-8b}$$

当边界面的外法线方向与某一坐标轴正向一致时，等式右边取正号，否则取负号。

(3)混合边界条件

一部分边界是S_σ，给定面力；另一部分边界是S_u，给定位移。

对于边界上的一个点，在某一确定方向上，必须且只能给出S_σ和S_u中的一种，既不能同时给定，也不能同时不给定；而同一点在两个互相垂直方向上，可以是一个为S_σ，另一个为S_u。

2.1.4 圣维南原理和静力等效边界条件

(1)圣维南原理

将物体一小部分边界上的面力变换成分布不同,但静力等效的面力(主矢相同,主矩相同),只影响近处的应力分布,对远处应力的影响可以忽略不计。

圣维南原理又称为局部性原理:若一小部分边界上作用着平衡力系(即主矢和主矩都是零),则此平衡力系只在近处产生显著应力,而对远处的影响可以忽略不计。

注意:

①应用圣维南原理时不能离开“在小部分边界”、“静力等效”的条件。

②应用圣维南原理影响的区域大致与构件的横向尺寸相当。

(2)静力等效边界条件

在许多实际问题中,很难精确地知道边界面力的真实分布规律,但是,根据圣维南原理,可以不给出面力的具体分布规律,而用局部应力积分的等效条件代替逐点满足的边界条件,即在局部,对于严格要求的条件有所放松。这样的边界条件称为静力等效边界条件。

如图 2-3 所示的悬臂梁,其自由端的静力等效边界条件为:

$$\begin{cases}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=0}\mathrm{d}y=\pm\overline{X}\\ \int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xy})_{x=0}\mathrm{d}y=\pm\overline{Y}\\ \int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=0}y\mathrm{d}y=\pm\overline{M}\end{cases}$$

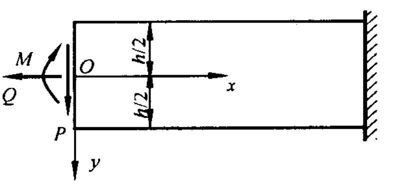


图 2-3

其中前两式在正面取正号,负面取负号。第三式,坐标轴正向的应力对坐标原点产生的力矩与外力矩转向一致时取正号,否则取负号。如下例:

$$\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=0}\mathrm{d}y=Q$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=0}y\mathrm{d}y=M$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xy})_{x=0}\mathrm{d}y=-P$$

2.1.5 平面问题的两种求解途径

平面问题共有 8 个未知函数($\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy},u,v$),8 个基本方程(2 个平衡微分方程,3 个几何方程,3 个物理方程)。求解时常用按位移求解和按应力求解两种途径。

(1)按位移求解平面问题

以位移为基本未知量,将 8 个基本方程归结为以位移表示的平衡微分方程(2-9),应力边界条件也用位移来表达,在给定边界条件下求解,先求出位移再用几何方程求应变,用物理方程求应力。

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+X=0\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{2-9}$$

注意：

①因为式(2-9)已包含了几何方程，不需要再利用相容方程(2-3)，相容方程会自行满足。

②按位移求解时需求解二阶联立偏微分方程，虽在理论上讲适用于各类边界问题，但实际运用时较难得到精确满足位移边界条件的解析解，因此，使其在寻求精确解时受到了限制。然而，这一解法在数值解法(如有限单元法)中得到了广泛的应用。

③式(2-9)是按平面应力问题推出来的，对于平面应变问题需将方程中的E、μ分别换成$E/(1-\mu^2)$、$\mu/(1-\mu)$。

(2)按应力求解平面问题

以应力为基本未知量，除运用平衡微分方程(2-1)外，还需补充用应力表示的相容方程(2-10)[它是将物理方程代入应变要满足的相容方程(2-3)得到的]，在给定的应力边界条件下求解，先求出应力，再用物理方程求应变，由几何方程通过积分求得位移。

一般情况下：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\tag{2-10a}$$

常体力情况下：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0\tag{2-10b}$$

注意：

①按应力求解时，为了保证能由应变积分求得连续的位移，需补充相容方程(2-10)。该方程是单连体连续的充分和必要条件，对于多连体还要再满足位移单值条件。

②应力解法通常适用于应力边界问题或仅在局部给定位移的混合边界问题。由于可引入应力函数求解，故在寻求平面问题解析解时，用此法求解比按位移求解容易。

③式(2-10)是按平面应力问题推出来的，对于平面应变问题需将方程中的μ换成$\mu/(1-\mu)$。

④按应力求解常体力情况下的两类平面问题，归结为在给定的应力边界条件下，求解偏微分方程组(2-11)。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+Y=0\\ \nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0\end{aligned}\right\}\tag{2-11}$$

方程组(2-11)和应力边界条件都不包含弹性常数，因此，按应力求解单连通平面弹性体的应力边界问题时，其应力解答与材料性质(E,μ,G)无关(但应变和位移与材料性质有关)。因此，在边界相同、外力相同的情况下，对某一材料弹性体求出的应力也适用于其他材料的弹性体。对平面应力问题求出的应力$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$也适用于平面应变问题。

2.1.6 一点的应力状态

(1)任意斜截面上的应力

已知两个互相垂直截面上的应力分量和斜截面的方向余弦l, m,便可求出任一斜截面上的应力分量为:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_N &= l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} \\ \tau_N &= lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

(2)主应力

剪应力等于零的平面称为应力主平面,主平面上的正应力称为主应力。

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2-13}$$

注意:

①物体内任一点的主应力不随坐标系的改变而改变,因此,由式(2-13)可知:$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_1+\sigma_2$是一个不变量。

②平面应力状态下,任一点一般存在两个主应力,二者方向互相垂直。

③两个主应力中,一个是最大正应力,另一个是最小正应力。

④最大(小)剪应力所在平面与主平面夹角为45°,其值为:

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max} \\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{2-14}$$

⑤最大正应力作用面上的剪应力为零,而最大剪应力作用面上的正应力一般不为零,而是$\sigma=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$。

2.2 例题解析

【例2-1】 如图2-4所示为一承受均布荷载作用的矩形截面简支梁,不计体力,试检验材料力学解答:

$$\sigma_x=\frac{M(x)y}{J_z}, \tau_{xy}=\frac{Q(x)}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right), \sigma_y=0$$

是否满足平面问题的平衡条件?并导出σ_y的正确表达式。

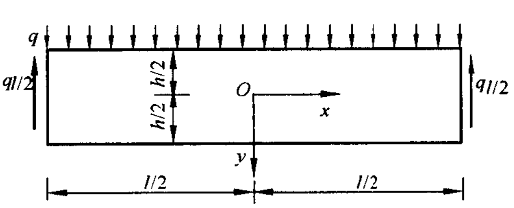


图2-4 例2-1图

【解】

①在不计体力时,平衡微分方程是:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} = 0 \tag{b}$$

由题所给的应力表达式得：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=\frac{\partial M(x)}{\partial x}\frac{y}{J_z}=\frac{Q(x)y}{J_z},\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=-\frac{Q(x)y}{J_z},\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}=-\frac{q}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

将以上结果代入方程式(a)，得：

$$\frac{Q(x)y}{J_z}-\frac{Q(x)y}{J_z}=0$$

故σ_x，τ_{xy}满足平衡微分方程(a)。代入方程式(b)，不满足，故材料力学的解答不满足全部平衡微分方程。

②由(b)式求出σ_y的表达式，即：

$$\sigma_y=-\int_{-h/2}^{y}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}y=-\frac{\partial Q(x)}{\partial x}\frac{1}{2J_z}\int_{-h/2}^{y}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\mathrm{d}y$$

其中：

$$Q(x)=\frac{ql}{2}-qx,J_z=\frac{h^3}{12}$$

所以有：

$$\sigma_y=-\frac{q}{2h^3}(4y^3-3h^2y+h^3)=-\frac{q}{2}\left(4\frac{y^3}{h^3}-3\frac{y}{h}+1\right)$$

σ_y沿截面高度方向按三次抛物线规律分布。

分析：

所求应力分量仅是静力可能的应力分量，若为正确解答，还需满足以应力表示的相容方程式(2-10)和应力边界条件。

【例2-2】 如图2-5所示矩形截面悬臂梁，在自由端受有集中力P作用，体力不计。试根据材料力学公式，写出σ_x，τ_{xy}的表达式，并取挤压应力$\sigma_y=0$，这些应力表达式是否就是正确的解答？

【解】

①由材料力学公式得到：

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{M}{I}y=\dfrac{-Px}{I}y\\ \tau_{xy}=\dfrac{QS}{Ib}=-\dfrac{PS}{I\times 1}=-\dfrac{P}{2I}\left(\dfrac{h^2}{4}-y^2\right)\\ \sigma_y=0\end{cases}$$

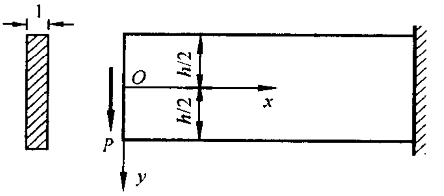


图2-5　例2-2图

②将这些应力分量代入平衡微分方程和相容方程得：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=-\frac{P}{I}y,\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\frac{P}{I}y,\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,X=0,Y=0$$

代入平衡微分方程(2-1)满足。

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=0$$

代入应力相容方程(2-10)满足。

③检查边界条件

在$y=\pm h/2$面：　　$\sigma_x=0,\tau_{yx}=0$

自然满足。