高等学校教材試用本

普通水力学

北京地质学院 长春地质学院合编

中国工业出版社

本书介紹了靜水力学、动水力学基础、液体运动时的两种类型和水头损失、压力管路水力計算、液体在明渠中的均匀流动，堰頂溢流等几个部分。

本书供高等地质学校水文地质工程地质专业学生作为教材，也可供有关水文地质工程地质人員参考。

本书由陈明征、梁立伟編。

普 通 水 力 学
北京地质学院 长春地质学院合編
*
地质部地质书刊編輯部編輯（北京西四羊市大街地质部院內）
中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）
（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）
中国工业出版社第四印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售
*
开本787×1092 1/16·印张8 1/2·字数204,000
1961年9月北京第一版·1962年5月北京第三次印刷
印数3,018—5,857·定价(10-5)1.05元
*
統一书号：K15165·931(地质-40)

目　录

第一章 緒　論

§ 1-1 水力学的一些基本定义

“水力学”这一名詞，在很久以前就出現了。在最初，水力学只是研究管內水的流动問題，然而，現代水力学問題的范圍是广泛得多了。

水力学是研究液体平衡与运动規律及实际应用这些規律的方法的科学。

除了水力学以外，还有一門科学，也是研究液体的平衡与运动的規律的，那就是流体力学。

然而，流体力学的方法与水力学的方法是有区别的。流体力学的方法是純粹用数学分析的方法来解答問題，其所得的解答是具有一般性和精确性的，但是应用来解决实际問題則有許多困难，因此，直到現在，还是大大地限制了应用流体力学方法来解决实际問題的范圍。

水力学的方法是依据着流体力学，針对工程实际問題，力求从数量上估計水力現象的主要因素，在技术上得到近似的，但有足够准确的結果，另外还广泛利用实驗，以得出适用于工程实际的一般性的解答。

因此我們可給水力学下这样的定义：

水力学是一門工程实用的科学；它是应用力学的一部分，是根据物理与力学的一些定律，应用数学分析与实驗資料綜合相結合的方法，来研究液体的平衡和运动的規律，并应用于解决工程实际問題的科学。

我們所研究的对象，既然是液体的平衡与运动，那么液体在水力学上的定义究竟是什么呢？

在水力学中，理解液体为一种物体，它的基本特征是：在重力場中具有自由边界（自由表面）；它有固体所不具有的“易动性”，即本身沒有一定形狀，而是随容器的形狀而改变。也就是質点間的凝聚力極小，而仅能抵抗对它压縮的力量的一种物体。

气体也具有与液体相似的“易动性”，因此也常統称它为“流体”。不过两者是有区别的。它們的区别在于，气体在重力場中不具有自由表面，它是可以压縮的。

物理学告訴我們，任何物質是由分子組成的，对于液体当然也是如此。但是，在水力学中詳細地去研究液体分子机械运动是不可能的。那么应該把液体当作什么样的介質去研究呢？在水力学中認为液体是沒有任何空隙存在的**連續介質**。因为液体分子的距离是很小的，以致我們在液体中取出很小的体积其特性都是一样的。从这个观点出發，我們在研究液体的平衡与运动的时候，就有可能从整个研究的液体中，取出一部分，即取所謂“隔离体”，对隔离体研究所得出的結論，推广在整个研究的液体中去。研究液体的运动，有兩种完全相反的出發点，这样就有着兩种不同的研究方法，这兩种方法是：

（一）拉格郎什(лагранж)法。

（二）欧拉(уйлер)法。

（一）拉格郎什方法：在研究液体运动时，拉格郎什是要求研究者追随着液体中的質点，观察質点在不同的各个空間点上的运动特征（如压力速度），对于整个液体的运动是

作为許多單个質点的总和。因此用拉格郎什方法来研究液体运动时，我們应当研究足够数量的液体單个質点的运动。

液体質点的运动往往是極为复杂的，跟随着質点运动来研究其运动規律就变为很复杂的，并且要引入很复杂的数学过程，所以拉格郎什方法是較为复杂的，只便于解决边界条件最簡單的問題，故在一般情况下不用这个方法，只有在研究波浪运动时才应用。

（二）欧拉方法：在研究液体运动时，欧拉提出研究者注視着固定空間点，观察各質点經过該空間点时的运动特征（压力和速度），对于整个液体的运动是作为各个空間点上所得資料的总和。在这里，我們是不注意液体質点本身运动，我們不管質点是从何处而来到何处去，来之前是什么狀态，經过之后又是什么狀态，只是管它在这空間点上的狀态。有人对欧拉方法的研究实質作了如下生动的描述："假如自己是許多位于不同空間点的观察者中間的一个，那你就是坐在一个固定地点，从一个微小的小玻璃窗子去观察液体質点的运动，記录其运动要素"。

从拉格郎什方法和欧拉方法的研究实質来看，我們可以得出这兩种方法所給出結果也是不同的。拉格郎什方法所給出的是液体質点在某一时間段中运动的軌跡。而欧拉方法所給出的是液体运动在某一时間的运动要素場（即动水压力場，运动速度場和运动加速度場）。

§ 1-2 水力学的发展簡史

水力学的發展是和人們为了使水为人类服务所进行的斗爭历史分不开的。

远在太古时代，人們为了防洪，进行农田灌溉，航运以及利用水能代替人力劳动等，已經开始建筑了水工建筑物和創造最簡單的水力机械。我国是世界古国之一，利用水力学知識也是最早的国家。远在紀元前兩千多年，我国就出现了有名的大禹治理黃河之事，傳說 1700 余年間，黃河附近沒有严重水患。紀元前 250 年，有秦朝的李冰領导劳动人民在四川修建了都江堰工程。灌溉川西平原 500 余万亩农田，人民唱頌起"水旱从人，不知飢饉，沃野千里，世号陆海，謂之天府"的讚歌。

在紀元前 10～20 世紀时期，在俄国中亞細亞美索不达米亞和埃及就有了大規模的灌溉渠道和通航运河及水壩。在紀元前最后十世紀的时期中，古代世界的一些城市里就有了相当复杂的导管和下水道系統。

上述事实說明，在古代劳动人民在与自然斗爭中已經掌握了一些水力学知識，那时候沒有把这些知識作出科学的总結，只是这些經驗的积累和相傳，可是却对水力学的發展起着不小的作用。

水力学开始成为一門科学，可以說是从紀元前 250 年由阿基米德总結而提出的"論浮体"論文而开始的。这篇論文精确地論述了著名的"阿基米德原理"，从而奠定了物体平衡和沉浮的理論基础。

此后，中世紀由于封建和宗教統治，科学停滯不前，水力学也几乎沒有發展。

15～16世紀，辽奥納尔多·达·芬奇确定了"固体在液体介質中运动所受的阻力"問題，以及提出了在水力学方面有价值的概念。

到了十七世紀以后，由于实际生活的需要和生产發展的要求，科学就开始有了新的进展，水力学的理論基础也逐步确立。

16—17世紀，迦利略和巴斯加等在靜水力学方面做了很多工作，对水力学发展有一些貢献。

17—18世紀，牛頓提出了液体的內摩擦定律，并确定了力学相似的基本原則。

18世紀，俄罗斯科学院两位院士——列奧那尔德·欧拉和达尼尔·伯諾里，奠定了流体学的基础。欧拉第一个提出理想液体平衡和运动的普遍微分方程式，得出了这些方程式的积分；还提出了液体連續性的微分方程式，伯諾里研究了水动力学的基本規律，提出了著名的伯諾里方程式。

18世紀后，工程技术迅速发展，也引起了水力学的发展，除了应用流体力学方法研究外，还广泛的利用实驗的方法解决工程实际的水力学問題。19世紀90年代，英国雷諾用实驗方法研究液体的运动，明确了液体运动有两种类型——层流和紊流。

十月革命后，在苏联，由于党和政府的关怀，特别是社会主义和共产主义建設的飞速进行，使水力学得到进一步广泛的发展。出現了工程水力学的新方向。苏联劳动人民和科学家們在水力学方面作出了卓越的貢献，将它提高到更高的水平。

这时期在水力学方面有貢献代表的苏联学者有：儒柯夫斯基、巴甫洛夫斯基和列依宾松等人。

我国十余年来，在中国共产党和毛泽东同志領导下，我国开始了一个嶄新的历史时代。束縛生产力发展的社会制度已被彻底推毁，劳动人民作了国家主人，为我国水利事业的发展开辟了无限广闊的前途。

在第一个五年計划建設时期，进行了許多河流綜合开发全面治理工作，兴建許多水工建筑物，解决了治河防洪、水力发电、水土保持、灌溉排水等技术問題。特別是1958年以来在党的鼓足干劲、力爭上游、多快好省地建設社会主义总路綫的光輝照耀下，以及“蓄水为主、小型为主、群众自办为主”和大中小型工程相結合的正确方針指导下和人民公社的优越組織，开展了群众性的水利工程建設、水利化运动及科学研究工作，使我国水利事业取得了几年来連續大跃进。

在科学研究方面对华北、西北地区河流泥沙和水庫淤积問題，水閘流量系数、水閘和輸水管道下游消能問題，松散质河床局部冲刷深度、施工导流、拋石截流等問題进行了研究，并取得了很大成績，出色地解决了三門峽围堰的截流問題。十余年来我国水工測量仪器設計制造有了很大发展，应用了許多世界上最新科学技术成就（同位素、半导体等）。

在党中央和毛泽东同志的关怀下，自1958年大跃进以来新建許多水利院校，形成了水利科学研究网，并建造了設备完善規模宏大的实驗基地，为我国水力学发展創造了有利条件。

在总路綫、大跃进，人民公社三面紅旗光輝照耀下，在伟大的社会主义和共产主义工程实践中，对于一系列水力学問題的提出和解决将使我国水力学向更高水平迅速发展。

§ 1—3　学习水力学的意义

既然水和水力現象与人类生活不可分割，因此，任何专业的工作者在自己的工作中，在不同程度上是必須和水力現象发生联系的。毫无疑問，在全国水利化、河网化和其它水利工程建筑里是广泛应用水力学知識的。对于水文地质、工程地质工作者来說，更需要了解水力学的基本知識，因为一方面它是学习地下水动力学的基础。地下水动力学是水文地

质学中一个重要組成部分，在学习地下水动力学之前必须知道水力学知識。另一方面也使我們能够进行一些有关的工程計算。例如：确定作用在边界上的水的总压力（作用于水坝、閘門上等等的水的总压力）；确定管路中或渠道中流动的水量；在水文地质普查中，能利用水力学知識确定小溪、泉水流量；为了供水、抽水、排水等目的，而根据水力学的計算，以便选择机械設备和确定所需管路或渠道尺寸等等。

§ 1—4 液体的主要物理性質（力学性質）

研究液体的平衡与运动的規律，要首先了解液体的主要物理性质，下面我們就闡述一下实际液体的主要物理性质。

（1）具有质量

液体与其它物体一样，是具有质量的。为了便于比較各种液体的质量，我們将液体具有质量这个特性用密度来表示（以希腊字 ρ 代表）。在均质液体內其密度等于盛滿液体的体积除該体积的液体的质量所得的商。

用数学式表示：
$$\rho=\frac{m(\text{质量})}{V(\text{体积})}$$

在物理单位制中密度的因次为：克/厘米^3，在水力計算中通常都采用工程单位制，工程单位制中密度的因次为$\frac{\text{公斤}\cdot\text{秒}^2}{\text{米}^4}$。

一般講，液体的密度是随压力P和溫度T而改变的，但是因其变化极小，故实际計算上可把液体密度看作是一个常数，即：

$$\rho=f(P\cdot T)\approx\text{常数}$$

（2）具有重量

液体具有重量的特性，我們用重率来表示。即单位体积的液体重量（以希腊字γ代表）。

用数学式表示：
$$\gamma=\frac{G(\text{重量})}{V(\text{体积})}$$

在工程单位制中其因次为：公斤/米^3

水 γ 計算值：在 4 °C时 $\gamma=1$ 克/厘米^3 $=1$公斤/公升$=1$吨/米^3

重率 γ 和密度 ρ 的关系是：

$$\gamma=\frac{G}{V}=\frac{m\cdot g}{V}=\rho\cdot g$$

如果考虑溫度和压力的变化对液体重率影响时，显然在实际計算中，同样$\gamma=f(P\cdot T)\approx$常数。

（3）压縮性

液体的压縮性在数量上是用体积压縮系数 α_p 表示的，即当压力增加一个大气压力时液体体积相对减少的数值。其数学表达式为：

$$\alpha_p=-\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$$

液体的压縮性是非常微小的，当压力在 1 到500个大气压力以及溫度0°C 到 20°C 的范围內，水的体积压縮系数約为：

$$\alpha_p=\frac{1}{20,000}\approx 0$$

就是説，α_p实际上可以把它算为零。因此，**液体在实用意义上可以認为是不可压縮的。**

(4) 溫度膨脹性

溫度的变更能使液体的体积發生变化，这就是溫度的膨脹性。这种性能用溫度膨脹系数α_T表示，即溫度上升1°C液体体积的相对增大的数值。其数学表达式为：

$$\alpha_T=\frac{1}{V}\quad\frac{dV}{dP}$$

应該指出，一般来講，α_T是与压力有关的，但这个关系很微小。同时对大多数液体来說，是α_T随压力增高而稍为減小，但对于水来說α_T却随压力的增高而稍为增大。另外水还具有这样一个特性，即在+4°C时具有最大的密度。

液体溫度的膨脹性是很小的，如当在大气压力作用下，溫度在0°C到10°C的范圍內，水的α_T等于14×10^{-6}，而当溫度在10°C到20°C的范圍內，等于150×10^{-6}，这可以說，实际α_T可以算作零。**因此在水力学計算中，液体溫度的膨脹性亦可忽略。**

(5) 粘滯性

粘滯性是运动的实际液体所具有的，表現在發生相对移动的相鄰液層間所引起的摩擦力。关于液体这种性質以后再較詳細的去討論。

很显然，靜止的液体粘滯性是表現不出来的。

(6) 表面張力

液体具有的表面張力的特性是液体能承受微小的拉应力。这种拉应力是产生在液体与周圍气体隔离的自由面上，或产生于与固体接触的表面上。它的形成是由于作用在表面边界上的分子間的相互吸引力的合力不等于零。

由于表面張力作用的結果，液体受到表面法綫方向的附加压力的作用。这个附加压力也可以为“正”可以为“負”，它的大小和方向决定于液体表面的弯曲方向和程度。

这个附加压力的大小可由拉普拉斯公式确定：

$$P=\sigma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

式中：σ——單位長度上的表面張力。

r_1, r_2——液体表面的曲度半徑（圖1-1）。

如果液体成一圓球形則：$P=\frac{2\sigma}{r}$

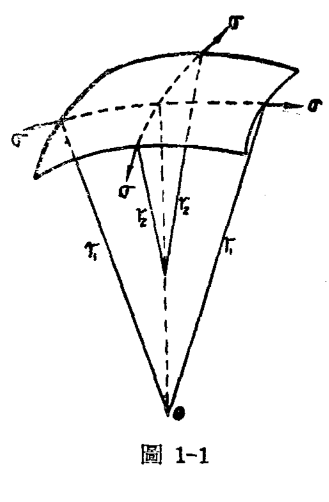

圖 1-1

很明显这时P与液体曲面的曲率成比例。

当$r=0.5$厘米，$p=2.8$公斤/米$^2=0.00028$大气压力

当$r=0.5$毫米，$p=28$公斤/米$^2=0.0028$大气压力

在水力学上、体积小于1厘米^{3}或1毫米^{3}的情况是很少有的。因此，对水力学来講，表面張力是沒有实际意义的，我們在水力学計算中也就不考虑它了。但在地下水动力学研究中这点是很重要的。

綜合前面所述的液体的物理性質，对于水力学研究来說对靜止液体只有二个特性是有意义的，这就是：

具有質量；

具有重量。

对运动液体而言，則只有三个特性是有意义的：

具有質量；

具有重量；

粘滯性。

在水力学中把具有前面所述的液体称为实际液体。有时我們为了便于理論分析引进了**“理想液体”**这个概念，**所謂理想液体就是絕对不可压縮的，不具粘滯性的一种假想的液体。**

§ 1-5 作用于液体的力

研究液体的平衡与运动的規律，实質上是研究作用于靜止液体或运动液体上的力的平衡規律，因此有必要首先談一下作用于液体上的力可能有哪些。

作用于所研究的液体的力可分为兩种：

第一种是**内力**。是液体質点間的一种相互作用力，它們在液体内是相互平衡的（即它們的合力等于零）。粘滯力（内摩擦力）*和表面張力屬于这种力。

第二种是**外力**。外力可以划分为兩类，一类是**表面力**。这类力就是与液体的一部分相連接的另一种液体的重量或气体的压力，作用在这部分液体表面上的力。例如液体表面所受的大气压力，靜止的油水分界面上，水的表面受油的压力。另一类是**体积力****，这类力就是作用于液体每个質点上的力，屬于这类力有重力和慣性力（或称为达蘭貝尔力）。慣性力的产生，是由于液体作加速度直綫运动或曲綫运动的結果。

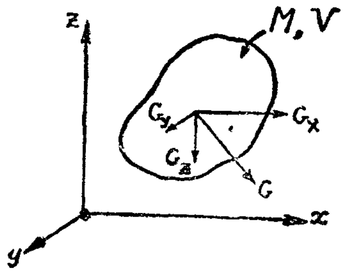

圖 1-2

为了判断体积力的大小，采用單位質量液体上的力，單位質量的体积力叫做**单位体积力**。

單位体积力可用坐标投影来表示。設在坐标 X,Y,Z 系統中，作用在体积 V，質量 M 的液体上的体积力为 G。令 G_x,G_y 及 G_z 为体积力在各坐标軸上的投影。要將体积力 G 在各坐标軸上的投影轉換为对單位質量来說，除以質量便可得出單位体积力在坐标軸上的投影了。这个投影一般是用大写字母 XY 和 Z 来表示：

$$x=\frac{G_x}{M} \qquad y=\frac{G_y}{M} \qquad z=\frac{G_z}{M}$$

式中：$M=\rho\cdot V$

單位体积力及其投影的因次为：厘米/秒^2 与加速度的因次相同（因此有时把它的值看作为体积加速度的投影）。

---

* 当在运动液体中取隔离体时，作用在隔离面上的內摩擦力对于隔离体来講是外力，但对整个液体来說，它是內力，本身互相平衡，可不加考虑（在力的平衡中是可不考虑。但是液体运动时，粘滯力所作用的功是不等于零而是所作的功轉变为热能在空間消失了）。

因此所謂內力或外力对所研究液体来說的，是相对的。这一点在理論力学中有詳細的說明。

** 体积力并不是和液体的体积發生关系，而是与液体的質量發生关系的。

第二章　靜　水　力　学

在緒言中已經說明，靜水力学是研究液体平衡的規律及这些規律的实际应用。

另一点，我們要注意的是：液体靜止时，是不显示其粘滯性的，即靜止液体內部不产生粘滯力（內摩擦力）。因此，靜水力学中一切的結論，对于理想液体和实际液体都是同样适用的。

§ 2-1　靜水压力及其特性

假如我們在靜止液体中取某一体积如圖 2-1 所示。用某一平面把这个液体体积分成 I Ⅱ兩部分。这兩部分液体在接触面上是互相作用着的。假如我們取掉其中的一个部分，如取掉上面的 I 部分液体体积，那么为了使下面的Ⅱ部分液体保持原来的狀态——平衡狀态，取掉 I 部分后，必須在其隔离面上加上一个力，用它来代替原来 I 部分液体对Ⅱ部分液体的作用。

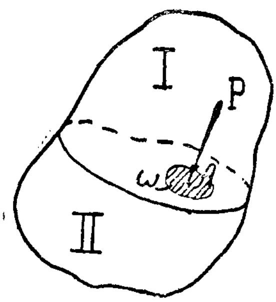

圖 2-1

設在隔离面上划出某一面积 ω。在这面积 ω 上，I 部分液体对Ⅱ部分液体有一个作用力，以大写的 P 来表示，这个力 P 就称为作用在面积 ω 上的**总靜水压力**，而面积 ω 称为該力 P 的作用面。

这样，在面积 ω 上作用着力 P，它們的比值 $\frac{P}{\omega}$ 表示了在面积 ω 上的**平均靜水应力**，但在水力学中習慣上不用"应力"兩字，而称它为**平均靜水压**

即

$\frac{P}{\omega}$ = 作用在面积 ω 上的平均靜水压力。

但是，一般情况下，在面积 ω 上的靜水压力分佈是不均匀的（只有当作用面水平时，靜水压力才均匀分佈）。为了得到某一点的靜水压力，而不是面积 ω 上的平均靜水压力，我們可以把面积 ω 無限地縮小，使它成为一个点 A，那么，这个比例 $\frac{P}{\omega}$ 的極限就表示 A 点的靜水压力，以小写 p 表示。

即
$$\lim_{\omega\to 0}\frac{P}{\omega}=p(A\text{ 点的靜水压力})$$

这里要注意：总靜水压力 P 是永远对应它的作用面 ω 而言的，当作用面 ω 趋近于零时，其总靜水压力 P 就愈加趋近于 A 点的靜水压力，所以它們的比值——A 点的靜水压力 p 是个有限的值。另外，要注意总靜水压力 P 和靜水压力 p 的單位。总靜水压力 P 是力，可用克，公斤或吨等力的單位来表示。而靜水压力 p 是單位面积上的力，所以它的單位可用克/厘米^2，公斤/厘米^2，吨/米^{2}或者用大气压力来表示。注意，大气压力是單位面积上的力，而不是力，这点不要用錯。1 个大气压相当于每平方厘米上作用着一公斤力的压力。另外，靜水压力还可用水柱高度来表示，这将在后面討論。

可以認为，在均質的連續的介質中（如均質液体就是这种介質）靜水压力 p 是一个連續函数。

静水压力的性質与固体內部应力的性質有着本質上的差别。固体內部各点所受的应力可以是垂直作用面，也可以是平行作用面，可以受压应力，也可受拉应力，另外某点应力大小与作用面的方向是有关的。

静水压力具有下面兩点特性：

第一种特性：静水压力的方向总是沿着作用面的內法綫方向。

第二种特性：某点的静水压力大小与作用面的方向無关，而仅仅与点的坐标（空間位置）和液体的种类有关

現在来証明这兩种性質。

第一种性質的証明：

第一种性質是說明静水压力的方向問題，即静水压力的方向与作用面的关系，作用力的方向与作用面的关系不外乎有三种可能：作用力垂直作用面（即所謂的法綫方向）和作用力不垂直作用面，而前者又分为兩种情况，作用力垂直作用面而且向着作用面方向（即所謂的內法綫方向），和作用力垂直作用面而背着作用面方向（外法綫方向）。概括一下，三种情况是：

第一种情况：作用力不垂直作用面。（圖 2-2 a）

第二种情况：作用力垂直作用面而方向朝外（外法綫方向）。（圖 2-2 $б$）

第三种情况：作用力垂直作用面，而方向朝里（內法綫方向）。（圖 2-2 $в$）

压力的方向与作用面的关系必定是上面三种中的一种，現在我們用反証法。

先分析一下第一种情况是否可能存在。压力 p 不垂直作用面，則它可分解成兩分力，垂直作用面的法向应力 p_n 和平行作用面的切向应力 p_τ。在緒言中已指出，只有在液体运动时才可能产生切向应力，而这結論与我們所討論的前提——平衡液体是不相吻合的，所以这情况是不可能存在的。

現在来分析一下第二种情况，这情况作用力沿外法綫方向，即受拉力，在緒言中也已指出，液体受拉力是不可能平衡的，这也与我們討論的前提不符合，故第二种情况也是不可能存在的。

总共只有三种可能，而第一二种已証明不可能存在，所以第三种情况必定是成立的，而且也只有它是成立的，即静水压力是沿着作用面的內法綫方向。这正是緒言中所指出的，液体仅能抵抗对它压縮的力，而不产生变形，即保持平衡狀态。这样，我們就証明了静水压力的第一种性質。我們証明第一种性質是以流体的基本特征为依据的。

現在来証明静水压力的第二种性質：

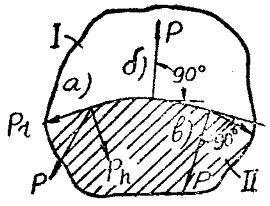

圖 2-2

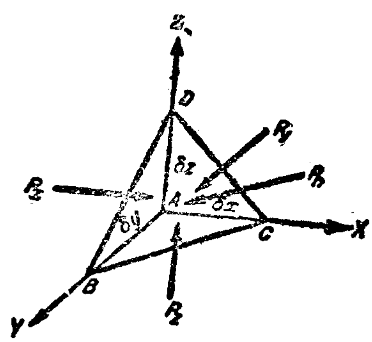

圖 2-3

我們可以通过写平衡方程式而得到証明。

在平衡液体内 A 点設一空間直角座标系 $OXYZ$，并在其座标軸上作一無限小的四面体 $ABCD$，$ABCD$ 面与座标軸間的夾角可任意截取（圖 2-3）。这四个面的面积及相应的靜水压力为：

ABD 面的面积为$\frac{1}{2}\delta y\delta z$，作用在該面上的靜水压力为 p_x。

ACD 面的面积为$\frac{1}{2}\delta x\delta z$，作用在該面上的靜水压力为 p_y。

ABC 面的面积为$\frac{1}{2}\delta x\delta y$，作用在該面上的靜水压力为 p_z。

BCD 面的面积为 $d\omega$，作用在該面上的靜水压力为 p_n。

以上靜水压力 p_x、p_y、p_z 和 p_n 的方向，根据靜水压力第一性質，是垂直相应作用面，而且沿內法綫方向。

四面体 $ABCD$ 除了受以上四个力作用外，还有体积力（包括重力及慣性力），以X、Y、Z 表示單位体积力在 x、y、z 軸上的投影，則作用在四面体上的体积力在 x、y、z 軸上的投影等于：

在 x 軸上为 $X\cdot\rho\cdot\frac{1}{6}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$

在 y 軸上为 $Y\cdot\rho\cdot\frac{1}{6}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$

在 z 軸上为 $Z\cdot\rho\cdot\frac{1}{6}\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$

式中：ρ 是液体的密度。

現在来写 x 軸方向的平衡方程式：

$$\frac{1}{2}p_x\delta y\delta z-p_n d\omega\cdot\cos(p_n\cdot x)+\frac{1}{6}\cdot X\cdot\rho\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z=0$$

式中第一二項是二阶無限小，而第三項是三阶無限小，所以第三項在式中可以忽略不計。

另外，式中第二項里的 $\cos(p_n,x)$表示靜水压力 p_n 与 x 軸間夾角的余弦，从圖上可看出，它等于 BCD 面与 ABD 面夾角的余弦，这样 $d\omega\cdot\cos(p_n,x)$就表示面积 $d\omega$ 在 Ayz 面上的投影。显然它等于 ABD 面的面积。即：

$$d\omega\cdot\cos(p_n\cdot x)=\frac{1}{2}\delta y\cdot\delta z$$

代入上式得

$$p_x\cdot\frac{1}{2}\delta y\delta z=p_n\cdot\frac{1}{2}\delta y\cdot\delta z$$

得：

$$p_x=p_n$$

同样，我們来写 y 軸，z 軸方向的平衡方程式：得：

$$p_y=p_n$$

及

$$p_z=p_n$$

綜合上列結果得出：

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

这样就証明了静水压力第二性質，静水压力大小与作用面方向無关。

§ 2-2 重力液体的静水力学基本方程式

現在来討論非常重要的液体中任一点的静水压力的大小問題，也叫静水压力分佈的規律。

这里討論的液体限于工程上最常見的“重力液体”。所謂**重力液体是指作用在这种液体上的，体积力只有重力的液体**，它不受惯性力作用。一切静止的和等速直綫运动的液体都是沒有惯性力所以这类液体都是重力液体。

現在来求重力液体自由表面下任意深度 h 处 A 点的静水压力 p。

設 x、y、z 坐标系，z 軸垂直向上，x 和 y 軸取在自由表面上（如圖 2-4 所示)。

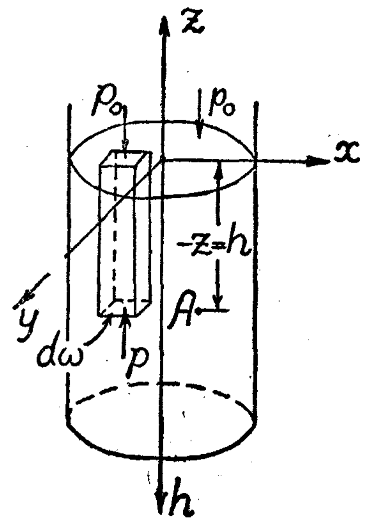

圖 2-4

通过 A 点作一微小的水平面积 $d\omega$,然后再通过該微小面积的边緣作鉛垂面，一直延長到自由表面，这样就得到一个底面积为 $d\omega$ 的柱形体，其頂面以后由表面为界。現在以这个柱形体为隔离体，来研究作用其上的力之間的关系。这隔离体是整个静止液体的一部分，所以隔离体本身是静止的，那么作用其上的外力应該是平衡的，即作用在隔离体上外力在各軸上的投影之和等于零。現在来写 z 軸上的平衡方程式。首先分析一下作用在隔离体上的外力，在 z 軸上有那些力的分力；

表面力有：

(1) 作用在底面垂直向上的总压力 $P = p \cdot d\omega$

(2) 作用在頂面垂直向下的是自由表面上的总压力 $P_0 = p_0 \cdot d\omega$

(3) 作用在側面积上的压力是水平方向的，所以在 z 軸上投影等于零。

体积力只有：

(4) 重力 $G = \gamma \cdot h \cdot d\omega$ 方向垂直向下。

写出 z 軸上的平衡方程式：

$$p \cdot d\omega - p_0 \cdot d\omega - \gamma \cdot h \cdot d\omega = 0$$

以 $d\omega$ 除上方程式，然后移項可得

$$p = p_0 + \gamma h \tag{2-1}$$

这就是重力液体静水压力方程式，它是静水力学中的基本方程式，所以有时就称它为静水力学基本方程。

由公式可看出，重力液体中任意点 A 的静水压力 p 是由兩部分組成，所以静水压力 p 可称为静水全压力。而 p_0 是表示液体表面上的压力，故称为静水表面压力。γh 是全压力超过表面压力的压力，因此称为静水超压力，也可用代号 p' 表示，它是由液体的自重产生的。上式可写成如下形式：

$$p=p_0+p'$$

在实际工程中，$p_0=p_a$(p_a: 一个大气压力)。一个大气压力＝1 公斤/厘米²＝10 吨/米²＝10米水柱

[例題]: 在海深 $h=300$ 米处，測得静水全压力为 32.5 公斤/厘米²，試求海水的重率 $\gamma_{海水}$，假定海水表面压力 p_0 为一个大气压。

解：根据公式

$$p=p_0+\gamma_{海水}h$$

$$\gamma_{海水}=\frac{p-p_0}{h}$$

$$p_0=1\text{ 个大气压}\quad 1\text{ 公斤/厘米}^2=1000\text{ 克/厘米}^2$$

$$\gamma_{海水}=\frac{32500-1000}{300\times100}=1.05\text{ 克/厘米}^3$$

由公式中可以明显地看出，静止液体中各个点的静水压力 h 受表面压力的影响是一样的。不管这个点在什么深度，这个点的静水压力 p 都是由同一个表面压力 p_0，再加上由这个点的深度 h 和液体的重率 γ 所决定的超压力。假如 p_0 值由于某种原因变大或变小了，則在所研究的静止液体中各个点的静水压力都随之以同样大小的数值变大或变小。

静水压力与静止液体表面上的压力之間的这种关系称为巴斯加定律。

如：**[例 1]** 使一封閉的容器与一圓柱活塞相連，該活塞能在与其相接触的液体表面上产生各种压力，如圖 2-5 所示。假使活塞把力 P 傳遞到液体表面 ω 上，那末在該液体的这部分边界面上造成压力 $p_0=\frac{P}{\omega}$，同时液体的平衡不被破坏。那末容器內部每点，在力 P 加到活塞以后，液体內部各点的静水压力値便增加一个 p_0。

[例 2] 使敞口容器里液体自由表面上（即液体与气体分隔的表面上）作用着等于大气压力或者用人工增加的或减小的力 p_0（后种情况下液体里將产生眞空，这在以后將再講到）。（圖 2-6б）因为液体的平衡在 p_0 値改变时不被破坏，因此表面压力的任何变化（增加或减小）都会均匀地傳播到液体內所有点上。

但应該注意上述原則在液体平衡条件未被破坏时适用，如液体平衡被破坏后則不适用，如：

[例 3] 使在敞口容器里的液体自由表面上浮起一面积为 ω 的木板（圖 2-6 B）。

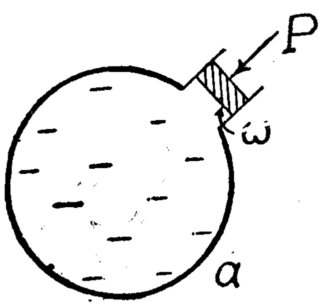

圖 2-5

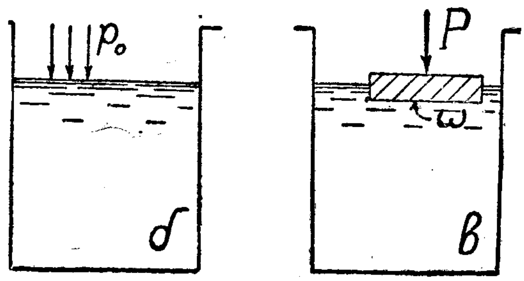

圖 2-6

我們在木板上加一向着液体內部的力 P 以后，就能在木板与液体接触面上产生压应力 $p_0=\frac{P}{\omega}$。然而这压力不向液体內部的所有点上傳播，因为該力不發生在液体的所有自由表

面上，而只發生在部分的自由表面上，于是木板一定要沉到液体里去，也就是說液体的平衡將被破坏。

在某些書籍里对巴斯加定律这样的叙述使人們产生一种印象，認为只能將上述压力傳透規律应用于封閉容器里的液体上。从所举的例子中我們見到，这个定律对靜止液体，不論其有否自由表面，只要液体保持在叙述这定律时所要求的平衡狀态的必要条件同样的能应用。

§ 2-3 連通器里的液体平衡

我們知道，在均質液体中，靜水压力是座标的連續函数。一般講，在靜止液体的各点上有不同的靜水压力，但其中某些点的靜水压力是相等的。若將各靜水压力 p 相等的点連成一个面，則这面称为等压面，即在这个面上各个点的靜水压力都相等。当然，我們可以在靜止液体中，作一系列压力相等的等压面。

我們知道，**液体的自由表面就是一个等压面**因为它們都受到同一个表面压力，而它們的超压力都等于零。**对于重力液体来說，液体的自由表面是水平面**。我們从这点出發，同样利用靜水力学基本方程式 $p=p_0+\gamma h$ 可以得到如下結論：**在靜止的均質的連續的重力液体中，各水平面都是等压面**。因为重力液体的自由表面是水平面，而且它是等压面，那么所有液体中的水平面都与自由表面平行，即該水平面上各个点所处的水深是相同的，即 $h=$ 常数，而現在又是均質液体即 $\gamma=$ 常数，从靜水力学基本方程很容易看出該平面上各点的靜水压力是相同的。

下面我們就利用等压面的概念来解决連通器中液体的平衡条件的問題。

关于連通器里液体的平衡，可以分为下述四种情况来討論：

第一种情况：在兩个連通器皿里注入同一种液体，其自由表面上的压力也相等（圖 2-7 *a*）。如果我們在低于器皿內液体自由表面处作一水平面，这个作在靜止均質連續的重力液体里平面，正象前面所述的是等压面，在这个平面上所有各点液体的靜水压力都是一样的，根据靜水力学基本方程式 $p=p_0+rh$，則器皿中液体自由表面在所作的水平面以上的高度都是相同的。

第二种情况：在兩个連通器皿中的一个里，（例如在(圖 2-7*б*)所示的右面的器皿）里加一些較輕的，具有單位体积重量 $r_1<r$ 的液体，兩边自由表面上的压力仍然是相同的。

我們知道兩种靜止液体的分界面是个等压面，如果將这个分界面延長，使它通过右面的器皿，則这个水平面以及所有低于它的每个水平面是兩个器皿的等压面，因为这些面的所有点都在均質的連續的重力靜止液体里，因此在分界面上的 A 点和右面器皿里位于延長平面上的 B 点，它們的靜水压力是相等的。

$$p_A=p_O+r_1h_1$$

$$p_B=p_O+rh$$

因 $p_A=p_B$ 及 $p_O=$ 常数，因此：

$$\gamma_1h_1=\gamma h \text{或} \frac{r_1}{r}=\frac{h}{h_1} \tag{2-2}$$

即从液体分界面向上計算的液体高度，与兩液体的单位体积的重量成反比例。

这里要指出，高于兩液体分界面的水平面对于整个連通器来講，不是等压面，因为它不符合前面指出的条件——均質的。当然，对于連通器的一侧，它仍然是等压面，它是符合前面講的条件的。

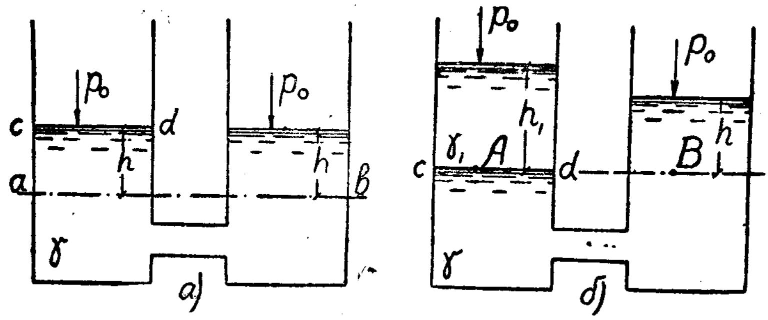

圖 2-7

第三种情况：是兩器皿里的液体是同一类的，但其表面静水压力是不相同的，則平衡时应有：

$$p_{01}+\gamma h_1=p_{02}+\gamma h_2 \tag{2-3}$$

式中因 $p_{01}\neq p_{02}$ 則 $h_1\neq h_2$、

第四种情况是兩个器皿里所盛的液体与第二种情况相似，但它們的表面压力不相等，則其平衡条件为：

$$p_{01}+\gamma_1 h_1=p_{02}+\gamma h_2 \tag{2-4}$$

連通器內液体平衡的原則，广泛地应用到測量液体压力的仪器中。

§ 2-4 測压管高度及靜力高度

在本节和下节將討論水力学中很重要的概念——測压管高度，靜力高度及与它对应的測压管水头和靜力水头。

現在先来討論測压管高度和靜力高度。

如圖 2-8 所示，在一个盛有液体的封閉容器兩側，連接兩根管子，左管上端是开口通大气的，它的表面压力等于大气压力，即 $p_{02}=p_a$。右管上端是封閉的，与大气隔絕，我們假定將其中的空气全部抽出使 $p_{03}=o$。又使容器中的表面压力为 p_{01}（如圖 2-8 中所画的情况 $p_{01}>p_{02}$）。

这样一个容器和側边兩根管子，也就構成了我們上一节所說的連通管，它們的压力与高度間的关系，我們可以通过連通器原理求得。

A 点的靜水全压力可根据靜水力学基本方程式为：

$$p_A=p_{O1}+rh_A$$

通过 A 点作一水平面 $A-A$，它是一等压面。这样，可根据左管来写 A 点的靜水力学方程式

$$p_A=p_a+rh_{n\cdot A}$$

移項：$h_{n\cdot A}=\dfrac{p_A-p_a}{r}$（長度因次） (2-5)

我們称 h_n 为**測压管高度**（$h_{n\cdot A}$ 为 A 点的測压管高度）它是由某点（这里是 A 点）往