

近似计算

江苏人民出版社

近似计算

江苏^{克仁}工业学院图书馆
藏书章

江苏人民出版社

• 內 容 提 要 •

这是一本数学知识读物，适合于高小毕业及初中文化程度的读者自学。书中首先说明什么是近似值和近似值的表示法，接着重点介绍了近似值加、减、乘、除、开平方的基本运算、省略算法和若干近似计算的公式。

近 似 計 算

钱克仁著

*

江苏省书刊出版业营业许可出〇〇一号

江苏人民出版社出版

南京湖南路十三号

江苏省新华书店发行 江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 2 1/16 字数 39,000

一九五五年十一月第一版 一九五七年一月第二版

一九六三年二月南京第七次印刷

印数 36,531—51,530

前 言

本书内容只谈及誤差的一般概念，近似值加、减、乘、除、开平方的基本运算，省略算法，以及一些近似計算的公式。对于理论的叙述，力求浅显易懂，有些证明尽量不超过初中程度的数学知识。

有些結論沒有作純理论的推导，只是作为归納若干例題后抽象化的自然結果。因此本书可供自学。

本书用四舍五入法来取定一个数的有效数碼，因为在日常生活中，四舍五入法是比較最自然的。为了符合技术計算中的一般需要，本书中各种計算的精确度一般都取定在 1% 以內。

书中有 80 个做好了了的例題，例題內容多选自日常生活及技术上实际計算中的問題，并有 37 个习题。

钱 克 仁

1955 年 6 月

目 录

一	近似值	1
二	近似值的表示法、有效数碼	2
三	四舍五入的規則	4
四	絕對誤差和最大絕對誤差	6
五	相對誤差和最大相對誤差	9
六	近似值的和与差的誤差	15
七	近似值的乘积的誤差	22
八	近似值的省略乘法	26
九	近似值的商的誤差	32
一〇	近似值的省略除法	36
一一	几个关于乘除法的近似公式	42
一二	近似值的平方根	46
一三	預定精確度的計算	53
附	习题答案	59
后	記	62

一 近 似 值

我們在实际生活中所遇到的数，有两种情况：一种是正确的数值；另一种是不正确的，但它是近似的数值。我們把第一种数称为真值，第二种数称为近似值。当我们不可能得到真值的时候，我們就用近似值来代替。

〔例一〕 某班上有 45 个学生。“45”这个数是真值，因为学生可以一个一个地数得到的。

〔例二〕 这个齿轮上有 60 个齿。“60”这个数也是真值，轮齿是可以一个一个地数清楚的。

〔例三〕 某汽車的載重量是 3 吨。这个“3”是个近似值，因为載重量是个“約数”，汽車上多装一、二斤貨物仍然是可以的。

〔例四〕 上海到南京的铁路线长 312 公里。这“312”是个近似值，因为测量的仪器不完全准确，測量工作也总有一定的誤差的。

〔例五〕 某人跑一百米的成績是 12.4 秒。“12.4 秒”是个近似值，因为跑表上沒有再精細的刻度，这成績可能是 12.38 秒、12.37 秒、12.43 秒等值的估計結果。

〔例六〕 圓的面积 $A = \pi r^2$ 。 r 为圓半径的长度， π 是一个无穷位而不循环的小数。我們計算时，有时用 3.14 来代

π , 有时用 3.142 来代 π 。3.14、3.142 等等都是 π 的近似值。

由此, 我們知道, 当度量各种量的时候, 或用数学常数的时候, 我們常常用近似值来表示它們。利用近似值来計算, 其結果也是近似值。度量的时候, 有时精密一些, 所得的誤差較小, 有时粗糙一些, 所得的誤差就大一些。因此, 由各种度量結果計算的最后答案的近似值, 也要考虑它的誤差和精确程度。

近似計算的理論要解决下列几个問題: (1) 度量的精确程度如何表示, (2) 怎样进行近似值的計算, (3) 怎样确定在近似值計算結果中所产生的誤差?

二 近似值的表示法、有效数碼

对于近似值來說, 2.5 尺与 2.50 尺 两个量是有区别的; 0.02 克与 0.020 克也是有区别的, 等等。2.5 尺表示某長度在量的时候能准确到十分之一尺, 在寸以下的刻度就不清楚了; 事实上, 这个長度可能是 2.51 尺或是 2.48 尺, 而我們把它記为 2.5 尺。2.50 尺表示某長度在量的时候能准确到百分之一尺的地步 (即准确到分), 但分以下的刻度就不清楚了; 2.50 尺这个量可能是 2.502 尺、2.498 尺的表示, 但不能是 2.532 尺或 2.481 尺等的表示, 因后面二数与 2.50 尺的相差已大于 0.01 尺 (1 分) 了。

在整数的近似值的写法上, 也是有区别的。我們写出 542 这个数的时候, 就表示这个数是正确到个位数的数。例如, 我

們实际的統計到学校学生的人数是 542 人。假若，在不必完全准确的情形下，我們有时說，学校有五百四十个学生，这是一种大約的数，是一种估計，我們用 54×10 这样的数来表示它，这就是說，这校学生数是五百四十上下，和学生的真实数目是不会相差到五个以上的。又譬如，某城市有二十万居民；我們用 20 万，或 20×10^4 来表示，这就是說，在万位以下的数，我們不去算了。这城市的居民总在二十万上下，即是十九万多些，但不会到二十一万，也不一定恰是二十万人。又如，某种产品最近的日产量是 3810, 3805, 3811, 3812, 3809；我們就說，每日約生产三千八百一十件，我們用 381×10 来表示这个数。博物院里的某件古物，傳說是三千年前的东西。这里三千年是个約数，是个近似值。若是三千一百年，我們也說是三千年前的。因此，假若我們隔了十年，再去看这件古物的时候，講解員仍然只說：“这是三千年前的古物”，而不会說“三千另十年前的古物”的。这件古物的年代写起来，应作：“ 3×10^3 年前”。

一个数除去了它左边的“零”以外，我們把留下的所有的准确数碼，称为那个数的“有效数碼”。例如，2.5 是兩個有效数碼的数；2.50 是三个有效数碼的数；0.02 是一个有效数碼的数；0.00345 是三个有效数碼的数；0.003045 是四个有效数碼的数； 381×10 是三个有效数碼的数；3810 是四个有效数碼的数。

三 四舍五入的規則

在进行計算的时候，我們常要把参加計算的近似值或眞值施行“四舍五入”，就是把这些近似值或眞值的右端的一个数碼或几个数碼割弃不要。为了保証四舍五入以后所得的数能够有最好的近似限度，我們有下面的一些四舍五入的規則。

規則1. 若是我們所要割弃部分的第一个数碼大于5，那末我們要將保留部分的最末一个数碼上加上一个單位。我們要割弃部分的第一个数碼若是等于5，而且这个5以后还有別の数碼，那末我們也將保留部分的最末一个数碼上加上一个單位。

〔例一〕 將数43.683用四舍五入法，求得一个有三个有效数碼的数。我們所要割弃部分的第一个数碼是8，8是大于5的；所以就在保留的部分43.6的最末一个有效数碼6上加上1，最后得到43.7。用43.7比用43.6更为接近43.683。

〔例二〕 將数367.253用四舍五入法，求得一个有四个有效数碼的数。我們所要割弃的数碼是53，虽然它的第一位是5，但是5后还有3，仍是大于5的；所以我們就在保留部分367.2的最末一个有效数碼2上加上1，最后得到367.3。367.3比367.2更接近于原数367.253。

規則2. 若是我們所要割弃部分的第一个数碼小于5，那末我們就用所保留部分的数碼。

〔例三〕 將数56.43用四舍五入法，求得一个有二个有

效數碼的數。我們所要割棄的第一個數碼是 4, 4 小於 5, 所以我們就得 56。用 56 比用 57 更為接近原數 56.43。

規則 3. 若是我們所要割棄部分的數碼是 5, 5 以後沒有別的數碼, 那末我們要用“近似值的偶數法則”, 就是: 若保留部分的末位數是偶數的話, 就不必在它上面加 1; 若是保留部分的末位數是奇數的話, 就加上 1, 使末位數成為偶數。

〔例四〕將數 0.745 用四舍五入法, 求得一個有二個有效數碼的數。因為保留部分的末位數是 4, 4 是偶數, 所以我們就割去 5, 得到 0.74。事實上, 用 0.74 和用 0.75 來表示 0.745, 它們與 0.745 的接近程度是同樣的。

〔例五〕將數 8.75 用四舍五入法, 求得一個有二個有效數碼的數。因為 7 是個奇數, 所以我們在保留部分的末位數碼 7 上加上 1, 得到 8.8。8.8 和 8.7 與 8.75 的接近程度是同樣的。

〔例六〕將數 18.52, 19.5, 0.445, 0.00255, 0.00265, 用四舍五入法, 求得有二個有效數碼的數。根據上列規則, 我們可以得到 19, 20, 0.44, 0.0026, 0.0026。

我們用規則 3, 割棄 5 或在保留部分最末位上加上 1, 這在事實上, 並不能使我們得到比較更接近於原數的近似值。若是我們規定“若保留部分末位數是偶數, 那末在末位上加 1, 若保留部分末位數是奇數, 那末就割棄那個 5”, 這樣也是可以的; 但是所得的近似值的末位數都是奇數, 這在應用上沒有“偶數法則”那樣方便, 所以我們仍用規則 3。

在一個數來看, 用四舍五入法所得的近似值, 有時是比原

数大些,有时是比原数小些。在許多个数的运算的时候,它們每个数中,有的用大些的近似值,有的用小些的近似值,它們之間可以相互抵偿,所以仍可以保証結果的最大程度的准确性。应用“偶数法則”,对于保留部分的末位数是偶数的数,四舍五入的結果比原数小些;对于保留部分的末位数是奇数的数,四舍五入的結果比原数大些。由于保留部分的末位数为偶数或为奇数的机会是差不多一样的,所以在許多个数的計算中,有的用大些的数,有的用小些的数,它們之間也可以相互抵偿,結果仍可保証有最大程度的准确性。

习 題 一

1. 試說出下列数值各有几个有效数碼:

3.14 25.0 25.00 0.12 0.104 8704.6
245.0 2.3×10^5

2. 用四舍五入法,將下列各数写成有二个有效数碼的数:

6.87 24.3 0.0152 8.6214 10.45
3.1416 2.718 0.47712 0.365 0.0175

3. 某城市有 807,463 人,試四舍五入这个数:

(1)到百位数; (2)到千位数; (3)到万位数。

四 绝对誤差和最大绝对誤差

某个量的近似值与它的真值的差,称为这个近似值的“絕

对誤差”。

〔例一〕 某校有学生 1783 人。若我們不說出它的真值，而說出它的近似值 1800 人的时候，那末就有絕對誤差： $1800 - 1783 = 17$ (人)。若我們說，該校有 1780 人，那末此时的絕對誤差是： $1783 - 1780 = 3$ (人)。

我們用 a 来記某个量的近似值，用 x 記它的真值，用 α (讀如“阿尔法”)記 a 的絕對誤差，即得：

$$\alpha = a - x$$

或
$$\alpha = x - a$$

在大多数情形下，我們不会知道量的真值的，因此我們就无法知道近似值的絕對誤差的准确数值。

〔例二〕 我們量一本書的長度，得到 23.4 厘米。这是一个近似值。這本書的長度的真值，我們是不知道的，所以就無法說出這長度 23.4 厘米究竟与書長相差多少，但我們既然量得了这 23.4 厘米，我們总可說出書的長度在 23.3 厘米到 23.5 厘米之間，或更精确些說，這書的長度在 23.35 厘米到 23.45 厘米之間。就是說，拿 23.4 厘米这近似值来代表書的長度，它的絕對誤差 α 不会超过 0.1 厘米；在后面的情形下， α 也是不会超过 0.05 厘米。因此，我們虽然不知道近似值的絕對誤差 α ，但可以定出絕對誤差的最大限度的。

近似值若比真值小，那末絕對誤差 α 是負数；近似值若比真值大，那末絕對誤差 α 是正数。为了簡便起見，我們只考虑絕對誤差 α 的大小，而不考虑 α 的正負，就是說，我們拿 α 的絕對值 $|\alpha|$ 来考虑，因为真值的不知道， α 也不知道，但是

可以定出 α 的最大限度;所以我們总可以定出一个正值来,使 $|\alpha|$ 总是不会超过这正值的。我們記作:

$$|\alpha| \leq \Delta a \quad \text{或即} |a - x| < \Delta a$$

这 Δa (讀如“得而他” a),即是近似值 a 的最大絕對誤差。上例中以23.4厘米这近似值表示書的長度,那末(依照四舍五入法)它的最大絕對誤差是 $\Delta a = 0.05$ 厘米。書的長度的真值虽然不知道,但它是在 $a - \Delta a = 23.4 - 0.05 = 23.35$ (厘米)与 $a + \Delta a = 23.4 + 0.05 = 23.45$ (厘米)之間的。

在量長度、称重量等測量的时候,我們所得的結果总是經過四舍五入的;这些結果的絕對誤差是不会超过它最末一位上單位的一半的。例如23.4厘米的 Δa 为0.05厘米;86.74克的 Δa 为0.005克;三万六千人的 Δa 为五百人。

在实用上,我們又常看到下面的写法:

(1) 68.7厘米 (± 0.1 厘米)

(2) 54.30克 (± 0.005 克)

在(1)中,括号里的 ± 0.1 厘米,就是最大絕對誤差,就是說(1)的量可能有0.1厘米上下的,也就是說(1)量是在68.6厘米与68.8厘米之間。同理,(2)中的 ± 0.005 克是54.30克的最大絕對誤差,(2)量是在54.295克与54.305克之間。

我們是拿測量結果的最大絕對誤差来比較測量工具的精确程度的。例如,称煤的秤只准确到公斤,就是說,用它来称東西的結果,可能有1公斤上下的誤差($\Delta a = 1$ 公斤);买菜

的秤准确到 1 两, 此时 $\Delta a = 1 \text{ 两} = 50 \text{ 克}$; 实验室的天平准确到 0.01 克, 此时 $\Delta a = 0.01 \text{ 克}$ 。显然, Δa 愈小, 测量工具就愈准确。

在近似值的计算中, 我们通常把最大绝对误差只写成含有一个或二个数码的数。例如某量的 $\Delta a = 31.25 \text{ 克}$, 我们可以把它写成 $\Delta a = 40 \text{ 克}$, 或 $\Delta a = 32 \text{ 克}$ 。这样, 在计算的时候比较方便。虽然取了较大的数值, 其结果仍然符合最大绝对误差的定义。

由于真值 x 是常常不知道的, 因此 $\alpha = x - a$ 的 α 也不可知道, 我们常常要用 Δa 来表示近似值 a 的准确或不准确; 所以我们以后就简单地用“误差不超过 Δa ”, 来代替“绝对误差不超过 Δa ”正确的说法。

五 相对误差和最大相对误差

测量一所房屋的长度, 有最大绝对误差 $\Delta a = 1 \text{ 厘米}$, 我们说, 这个结果是很精确的; 量一双鞋子的长度, 有最大绝对误差 $\Delta a = 1 \text{ 厘米}$, 我们说, 这个结果却是很不精确。我们称一架机器准确到 10 公斤, 我们说称得很准确的了, 但是在实验室里, 我们在天平上称东西, 却要求所得结果的最大绝对误差不超过 1 克, 或 0.1 克, 或 0.01 克。因此, 最大绝对误差本身并不表明度量工作的好坏。另一方面, 最大绝对误差是一个名数, 在度量的单位有改变的时候, 绝对误差的数值也要随之而改变的。例如, 用米尺来量长度, 最大绝对误差是 5 厘

米，用市尺来量，最大绝对误差是5分，它们之间，哪一个更准确一些呢？

根据上面的理由，我们有必要采用别的量来表示我们所得近似值的准确程度；这种量便是“相对误差”。

我们用 a 表某量的近似值， x 为它的真值， α 为 a 的绝对误差，我们称 $\frac{\alpha}{a}$ 为近似值 a 的相对误差，记如：

$$\epsilon = \frac{\alpha}{a} \quad (\epsilon \text{ 读如“也泼西隆”})$$

〔例一〕 我们拿1800人来代替1783人，绝对误差是 $1800 - 1783 = 17$ (人)，则相对误差 $\epsilon = \frac{17}{1800} = 0.0094$ ；拿1780人来代替1783人，则相对误差为：

$$\epsilon = \frac{1783 - 1780}{1780} = 0.0017$$

〔例二〕 测量20米宽的马路，绝对误差是1米，则相对误差是 $\frac{1}{20} = 0.05$ ；量500公里的铁路，绝对误差是0.1公里，则相对误差是 $\frac{1}{5000} = 0.0002$ 。

显然，在第二种测量工作中虽然它有较大的绝对误差，但在测量工作的质量上是远远地高过第一种测量工作的。

相对误差是相同单位的量的比值，所以它总是个不名数。并且用不同单位去测量的时候，在相同的准确情况下，也得相同的相对误差。在实用上，我们常用百分数(%)， $1\% = 0.01$ 或千分数(‰)， $1‰ = 0.001$ 来表示相对误差。上面例一中，有 $\epsilon = 0.94\%$ ， $\epsilon = 0.17\%$ ；例二中有 $\epsilon = 5\%$ ， $\epsilon = 0.02\%$ 。

因为近似值的相对誤差是它的绝对誤差和它自己的比值，而一个近似值 a 的绝对誤差 α 不易准确的知道，所以近似值的相对誤差 ϵ 也难以得到。我們已知最大绝对誤差 $|\alpha| < \Delta a$ ，做

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \quad (\delta a \text{ 讀如“小得而他”} a)$$

这 δa 称为近似值 a 的最大相对誤差。

$$\text{因} \quad \epsilon = \frac{\alpha}{a} \quad \text{而} \quad |\alpha| < \Delta a$$

$$\text{故} \quad \epsilon = \frac{\alpha}{a} < \frac{\Delta a}{a} = \delta a$$

$$\text{即} \quad \epsilon < \delta a$$

因为在一般情况下，绝对誤差不易得到，我們以后用“相对誤差”一詞来代替“最大相对誤差”这个名称。

〔例三〕 求鉛笔長度 $a = 17.6$ 厘米的相对誤差。

$a = 17.6$ 厘米，它的最大绝对誤差为 $\Delta a = 0.05$ 厘米，

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \delta a &= \frac{0.05}{17.6} = \frac{0.1}{35.2} = \frac{1}{352} \\ &\approx 0.0028 < 0.003 = 0.3\% \end{aligned}$$

即 $\delta a < 0.3\%$ (記号“ $\approx$ ”表示“近似的接近”)

〔例四〕 已知某量的近似值 $a = 41.6$ 克，它的相对誤差 $\delta a = 0.5\%$ ，試求 a 的绝对誤差，并定出近似值本身的界限。

$$\text{由公式} \quad \delta a = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\text{得} \quad \Delta a = a \times \delta a$$

$$\begin{aligned} \text{此最大绝对誤差为} \quad \Delta a &= 41.6 \times 0.5\% \\ &= 41.6 \times 0.005 \end{aligned}$$

$$=0.208 < 0.21(\text{克})$$

我們知道,真值 x 要滿足不等式: $a - \Delta a < x < a + \Delta a$ 的,因此知道,所量的量的真值大概在 41.4克与 41.8克之間。

現在我們进一步来討論近似值所取的有效数碼的个数和它的相对誤差之間的关系。

〔例五〕 求一个有二个有效数碼的数的相对誤差。

設 a 是一个有二个有效数碼的数, z 是 a 的第一位数碼。

若	$z = 1$	譬如	$a = 12$
則	$\Delta a = 0.5$	$\delta a = \frac{0.5}{12} < \frac{0.5}{10} = 5\%$	
若	$z = 2$	譬如	$a = 2.6$
則	$\Delta a = 0.05$	$\delta a = \frac{0.05}{2.6} < \frac{0.05}{2.0} = 2.5\%$	
若	$z = 3$	譬如	$a = 0.34$
則	$\Delta a = 0.005$	$\delta a = \frac{0.005}{0.34} < \frac{0.005}{0.30} < 1.7\%$	
若	$z = 4$	譬如	$a = 4.8$
則	$\Delta a = 0.05$	$\delta a = \frac{0.05}{4.8} < \frac{0.05}{4.0} < 1.3\%$	
若	$z = 5$	譬如	$a = 52 \times 10^2$
則	$\Delta a = 50$	$\delta a = \frac{50}{5200} < \frac{50}{5000} = 1.0\%$	
若	$z = 6$	譬如	$a = 68$
則	$\Delta a = 0.5$	$\delta a = \frac{0.5}{68} < \frac{0.5}{60} < 0.9\%$	
若	$z = 7$	譬如	$a = 7.3$
則	$\Delta a = 0.05$	$\delta a = \frac{0.05}{7.3} < \frac{0.05}{7.0} < 0.8\%$	