新世纪高等院校精品教辅

高等数学一本通

主编 李小梅 胡 月

配同济《高等数学》第五版

（第四版同时适用）

辅导用书

浙江大學出版社

新世纪高等院校精品教辅

高等数学一本通

主　编　李小梅　胡　月
主　审　薛有才

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学一本通 / 李小梅，胡月主编 .—杭州：浙江大学出版社，2004.3
ISBN 7-308-03544-1

Ⅰ.高... Ⅱ.①李... ②胡... Ⅲ.高等数学－高等学校－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 105699 号

内容简介

本书是高等数学课内教学的补充与延伸。它以教材为依据，按章节知识点与解题方法分类，集中了大量的常见题型与考研试题，以及教材内部分习题。并针对学生易混淆的概念一一做了点拨。全书共分为十二章，每章分为“知识要点梳理”、“典型范例与解题方法”、“教材习题选解”、“同步训练与水平提高题”及“同步训练与水平提高题解答与提示”五大板块。为学生系统地掌握数学知识，了解教材习题类型，掌握解题技巧提供颇为经典的辅导。

本书可供高等工科院校学生(包括本科、专科高年级学生及高等教育自学考生)在学习高等数学时同步使用，也可作为报考工学、农学和经济类硕士研究生入学考试复习资料，还可作为高等院校的数学教师教学参考书。

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 徐素君
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 24.75
字　　数 680 千字
版 印 次 2004 年 3 月第 1 版 2004 年 7 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-03544-1/O·302
定　　价 30.00 元

前　言

高等数学课程对于大学生的重要性是不言而喻的。近年来，由于许多专业设置的变化和选修课门类的增加，给本来学时就偏紧的高等数学教学带来了新的矛盾和问题，而专业后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求却有深化的趋势。如何使学生适应新的形势，尽快学好高等数学，我们编写了《高等数学一本通》。本书是按照同济大学编写的、高等教育出版社出版的《高等数学》第五版（第四版亦适用）内容进行编写的，共十二章。旨在配合教材教学，扩大学生视野，使他们能够尽快地适应高等数学的学习，掌握学习高等数学的方法和技巧。

尽管同类的教辅书很多，但由于我们长期处于教学第一线，了解学生在学习高等数学时所迫切需要的和所面临的困难，由此在编写过程中有的放矢、注重实效、博采众长、独具匠心地设计了“知识要点梳理”，“典型范例与解题方法”，“教材习题选解”，“同步训练与水平提高题”和“同步训练与水平提高题解答与提示”五大板块。

“知识要点梳理”——根据教学大纲，将知识要点进行梳理，列出重点须掌握的知识点，并对知识点的联系与区别加以点拨，力求做到概念明确，解释清晰，视野广阔。

“典型范例与解题方法”——结合教材的知识点，精心设计题型，指点其内在特点，形成“题眼”布局，使人举一反三、触类旁通。

“教材习题选解”——选编了教材中的部分习题进行分析解答，使学生能立足教材，分析比较同类题目，以培养学生的严谨性及对所学学科的悟性。

“同步训练与水平提高题”及“解答与提示”——遵循“教、学、练、考”的整体原则，按照常考题型（填空题、选择题、解答题、证明题），由浅入深地选编了大量同步训练题，其中包括近年来的一些考研题（书中标明了年号的题，指的是当年的考研题），务求做到实效性、典型性和启发性。

本书由李小梅、胡月主编，李未才、申国伦为副主编，薛有才主审。承担执笔任务的有：李小梅（一、二章）、李未才（三、四章）、胡月（五、六章）、申国伦（七、八章）、薛有才（九、十章）和周小燕（十一、十二章）。

本书的出版，如果对广大学生在学习和复习高等数学的过程中，能达到节省时间、加深理解基本概念、拓宽解题思路和提高分析、解决问题的能力的目的，将是我们的最大欣慰。我们在编写过程中，参考了一些同类的辅导用书，在此对这些书的作者表示衷心感谢。由于编者水平有限，纰漏之处敬请同行专家批评指正。

编　者

2004.1

目录

第一章　函数与极限

知识要点梳理

一、函数的概念与性质

1. 函数的定义　设 x 和 y 是两变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个 $x \in D$,y 按照一定的法则总有惟一确定的值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$,称 D 为函数 y 的定义域.

【点拨】 在函数的定义中涉及到定义域、对应法则和值域,显然只要定义域和对应法则确定,值域也就随之而定.故定义域和对应法则是确定一个函数的两个要素.

2. 函数的性质

(1) **奇偶性**　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任意给定的 $x \in D$ 有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若对于任意给定的 $x \in D$ 有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) **周期性**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $l \neq 0$,使得对于任给的 $x \in D$,有 $x + l \in D$ 且 $f(x + l) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 为周期.

(3) **有界性**　设函数的 $f(x)$ 定义域为 D,若存在 $M > 0$,使得对于任给的 $x \in D$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 有界,或称 $f(x)$ 为有界函数;反之,称 $f(x)$ 为无界函数.

(4) **单调性**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$ 对于任意的 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,若 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调增;若 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调增;当 $x_1 < x_2$ 时,若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调减;若 $f(x_1) > f(x_2)$ 则称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调减.

【点拨】 须掌握初等函数四种特性的判定及应用,了解不是所有的初等函数都具有函数的四种特性.

3. 复合函数　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2 而值域为 w_2,且 $w_2 \subset D_1$,则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为定义在 D_2 上的复合函数,u 称为中间变量.

【点拨】 复合函数可以由两个或两个以上的函数复合而成,但不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数的,必须使内层函数的值域属于外层函数的定义域才能组合成复合函数.因此,复合函数的定义域,就是内层函数的值域与外层函数的定义域的交集.例如:$y = \arcsin u$,$u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数.同时,对复合函数还要弄清楚是由哪些基本初等函数组成的,因为后面几章中关于复合函数求导、积分中的换元法、分部积分公式都是基于复合函数的分解.

4. 初等函数　由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成,且能用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

【点拨】 要注意基本初等函数和初等函数的区别,并掌握基本初等函数的图形性质.同时注意初

等函数在它的"定义区间"连续,而不是在它的定义域内连续。例如:$f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域 $D=\{x\mid x=2k\pi,k$ 为整数$\}$ 中的每一点都是孤立点,显然函数 $f(x)$ 不连续.这些性质在后面的学习中经常使用.

二、极限的概念及运算法则

1.数列极限定义　设数列$\{x_n\}$与常数 a 有下列关系:对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称 a 为数列$\{x_n\}$的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2.函数极限定义

(1)设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2)设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义,如果对于任意给定的正数 ε(无论它那么小)总存在着正数 X,使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$.那末常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【点拨】 数列极限与函数极限既有区别也有联系.

区别在于:数列 $x_n=f(n)$ 的自变量 n 的变化过程是间断的(只取正整数),且只有一种变化过程($n\to\infty$);而函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的,变化过程有六种:$x\to x_0$;$x\to x_0+0$;$x\to x_0-0$;$x\to\infty$;$x\to+\infty$;$x\to-\infty$.

联系在于:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必定存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.因此在求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 时,可先求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,于是便可得到 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$(但注意当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 也可能存在).反之,对于 $x\to x_0(n\to\infty)$ 的任意数列 x_n 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 时,才有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.因此,为了说明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,可找一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$ 对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$为无穷大,或者找两个收敛于 x_0 的数列 x_n 与 $y_n(x_n\neq x_0,y_n\neq x_0)$,使数列$\{f(x_n)\}$与$\{f(y_n)\}$有不同的极限.

3.极限四则运算法则　设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2)$\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$;(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

【点拨】 此计算法则的前提是:$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,再则它的项是有限的,否则将会出错.

例如　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

错解　$$\text{原式}=\left(\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$=0+0+\cdots+0=0.$$

错误原因　上式运算中,在使用:"和的极限等于极限的和"这一法则时,没有注意它只对有限个函数之和的情形成立.随着 $n\to\infty$ 和式中的项数也无限增多,则不能使用该法则.

正确解法　因为

$$n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)\leqslant n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}}\cdot\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}}=\pi.$

同理：$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}=\pi$. 由夹逼准则知：原式 $=\pi$.

4.复合函数极限运算　设函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$,且 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

5.极限存在准则

(1) **单调有界准则**　单调有界数列必有极限.

(2) **夹逼准则**　若 $0<|x-x_0|<\delta$,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}h(x)=A,\text{则}\lim_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}f(x)=A.$$

6.两个重要极限公式　(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$(或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$).

三、无穷小与无穷大

1.无穷小与无穷大的概念　极限为零的变量称为无穷小;绝对值无限增大的变量称为无穷大.

【点拨】 须注意:

(1) **无穷小与函数极限的关系**　$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$($\alpha(x)$为无穷小),(见本部分3.无穷小性质(4)),这样可以把极限问题转化为无穷小问题来处理.

(2) **无穷大与无界函数的关系**　无穷大是指在自变量的某种趋势下对应于函数值的变化趋势,而无界函数是指自变量在某一范围内变化时,对应函数值的变化情况.即,对于不等式 $|f(x)|>M$ 无穷大量要求"一切"x都满足,而无界函数则只要求"有"x满足即可.由此,如果 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大,则 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区间上或者在以 x_0 为端点的某区间上无界.但当 $f(x)$ 无界时,$f(x)$ 则不一定是无穷大.例如:$y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界,但它不是无穷大,因为 $\forall M>0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是能找到这样的 x,使得 $|y(x)|>M$.取 $x=2k\pi(k=0,1,2,3,\cdots)$,$|y(x)|=|(2k\pi)\cos2k\pi|=|2k\pi|>M$.由此,当 $|k|>\frac{M}{2\pi}$ 时,就有 $|y(2k\pi)|>M$;但 $y=x\cos x$,当 $x\to+\infty$ 时,却不是无穷大,因为若将自变量 x 由 $2k\pi$ 增大到 $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$|y(x)|$ 却由大于 M 减小到0,也即并不是所有的 x 都使得 $|y(x)|>M$.

2.无穷小的比较　设 α,β 均为无穷小

(1) **高阶无穷小**　若 $\lim(\frac{\beta}{\alpha})=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,或是 α 是比 β 低阶的无穷小.

(2) **同阶无穷小**　若 $\lim(\frac{\beta}{\alpha})=C$(常数 $C\neq0$),则称 β 与 α 是同阶无穷小.

(3) **等价无穷小**　若 $\lim(\frac{\beta}{\alpha})=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

(4)**k 价无穷小**　若 $\lim(\frac{\beta}{\alpha^k}) = C$(常数 $C \neq 0$)，则称 β 为 α 的 k 价无穷小.

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

(3) 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

(4) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $f(x) = A + \alpha$(α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小)；反之，若 $f(x) - A = \alpha$ 是无穷小，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

4. 等价无穷小的代换定理　设 α,β 均为无穷小，且 $\alpha \sim \alpha',\beta \sim \beta'$，如果 $\lim(\frac{\beta'}{\alpha'})$ 存在，则 $\lim(\frac{\beta}{\alpha}) = \lim(\frac{\beta'}{\alpha'})$.

【点拨】 注意此定理的条件，否则，容易出错.

例如　求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \tan x \sin x}$.

错解　原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0-0}{x^3} = 0$.

这里无穷小代换只能对乘除因子使用，不能对加减的项使用.

正确解法　原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$.

四、函数的连续性

1. 函数连续的概念　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 上述函数连续性概念的等价定义是：① $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ② ϵ-δ 语言(略).

左连续：$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$；右连续：$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

【点拨】 在证明函数的连续性时，在区间内部多用 ϵ-δ 方法. 在分段点处多用左、右极限存在且相等，并等于该点函数值的方法，同时此方法也是判断某一点是否为间断点及其间断点的类型的一个有效方法.

2. 间断点分类　第一类间断点：$f(x)$ 在点 x_0 间断，但它在点 x_0 的左、右极限都存在. ① 可去间断点：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$(存在)，但 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处无定义，或者 $f(x_0) \neq A$. ② 跳跃间断点：$f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限存在但不相等.

第二类间断点：$f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在. 第二类间断点中常见的有无穷间断点和振荡间断点.

3. 连续函数的性质

(1) 设 $f(x)$，$g(x)$ 都在点 x_0 连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$ 也在点 x_0 连续；当 $g(x_0) \neq 0$ 时，

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 也连续.

(2) 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,$u_0=\varphi(x_0)$,$f(u)$ 在点 u_0 处连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续.

4. 闭区间上连续函数的性质　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续:

(1)(**介值定理**)若 $f(a)\neq f(b)$,则对任意介于 $f(a)$,$f(b)$ 之间的数 μ,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=\mu$.

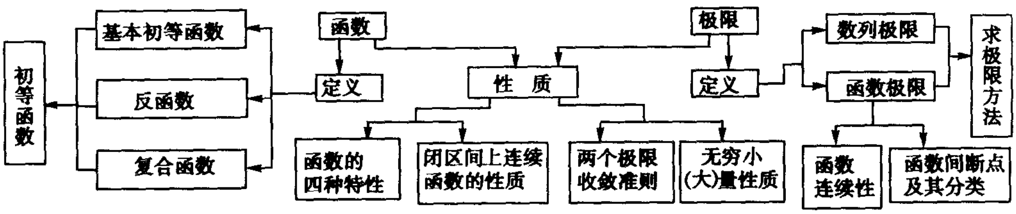
(2)(**零点定理**)若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

(3)(**最大值、最小值定理**)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少取得最大值和最小值各一次.

(4)(**有界性定理**)$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的.

【点拨】 在应用上述定理时特别要注意:① 定理的条件;② 符合定理的区间及函数的确定.

本章知识结构图



典型范例与解题方法

一、求函数的定义域、函数的表达式、反函数,判断或证明函数的某些性质.

【题型特点】 ① 求初等函数的定义域,通常是将该函数按项分成基本一些初等函数的复合,然后考查每项基本初等函数的定义域,得到对应的不等式组,然后联立求解不等式组得函数的定义域.所以,必须熟悉基本初等函数的定义域、值域.② 复合函数表达式的求解方法通常有代入法、分析法和图示法.③ 求解反函数的一般步骤:从原函数 $y=f(x)$ 出发求解 x 的表达式;对换 x,y 的位置得反函数.值得注意的是 $y=f(x)$ 的值域即为 $f^{-1}(x)$ 的定义域.

例 1.1　设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x-1)}+\sqrt{16-x^2}$,求 $f(x)$ 的定义域.

解　要使函数有意义,则应有 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 1\\ x-1>0\end{cases}$,　解之得 $\begin{cases}|x|\leqslant 4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}$.

即　$1<x<2$ 及 $2<x\leqslant 4$,

所以　$D=(1,2)\cup(2,4]$.

例 1.2　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求 $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ 的定义域.

【分析】 要保证复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义,自变量 x 即要在 $\varphi(x)$ 的定义域之中,又要使 $\varphi(x)$ 的值落在 $f(x)$ 定义域之中.

解　依题意有 $0\leqslant\sin\dfrac{\pi}{x}\leqslant 1$,即 $2n\pi\leqslant\dfrac{\pi}{x}\leqslant(2n+1)\pi$　$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

当 $n\neq 0$ 时，$2n\leqslant \frac{1}{x}\leqslant (2n+1)$，即 $x\in\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right]$.

当 $n=0$ 时，$0<\frac{1}{x}\leqslant 1$，即 $x\geqslant 1$.

所以，$f\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 的定义域 $D=\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right]\cup(1,+\infty)$.

例 1.3 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f(x)$，$f(2x)$ 的定义域，并求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$，$f(4)$.

【分析】 分段函数的定义域是各个子区间的并集，而分段函数的复合函数的定义域仍然是需要让内层函数的值域符合外层函数的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域 $D_1=[0,2]$，

所以 $f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -1, & 1<2x\leqslant 2\end{cases}$，即 $f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ -1, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$，

所以 $f(2x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，而 $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$，$f(4)$ 不存在.

例 1.4 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数），且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

【分析】 利用等式改变自变量，找到与原等式联立的一个方程组，从而可解出 $f(x)$.

解 因为 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$……①

所以取 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$，故有 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，即 $bf(x)+af(\frac{1}{x})=cx$……②

联立方程 ①② 解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$.

例 1.5 求双曲正弦函数 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数.

解 由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 化简得 $2y=e^x-\frac{1}{e^x}\Rightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0$，

解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$；

因为 $e^x>0$，所以 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\Rightarrow$ 反函数为 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

例 1.6 函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上为 （ ）

(A) 有上界无下界 (B) 有下界无上界

(C) 有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$ (D) 有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$

【分析】 根据闭区间上连续函数一定有界，或者根据间断点的类型来确定函数的有界性.

解 因为 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续， 所以在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上必有界.

而 $\forall x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，由 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调增加.

所以，$2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，故选(C).

二、求函数和数列的极限

1.利用极限定义求极限

【题型特点】 利用定义求极限一般采用逆推法，其中关键在于解不等式.例如：解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$.此时在求解过程中，往往又是采用放大技巧以简化计算.

例 1.7 用 ε-δ 定义证明 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x}=0$.

【分析】 用逆推法.为从 $\left|\dfrac{x-4}{x}-0\right|<\varepsilon$ 找到 $0<|x-4|<\delta$，可采取适当放大法.

解 任给 $\varepsilon>0$，使 $\left|\dfrac{x-4}{x}-0\right|<\varepsilon$.

因为 $x\to 4$，所以不妨设 $0<|x-4|<1$，即 $3<x<5, x\neq 4$.

于是 $\left|\dfrac{x-4}{x}-0\right|=\dfrac{|x-4|}{|x|}<\dfrac{|x-4|}{3}<\varepsilon$，得到 $0<|x-4|<3\varepsilon$.

所以取 $\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$，则当 $0<|x-4|<\delta$，$\left|\dfrac{x-4}{x}-0\right|=\dfrac{|x-4|}{|x|}<\dfrac{|x-4|}{3}<\varepsilon$ 成立.

即当 $0<|x-4|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x-4}{x}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立.故 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x}=0$.

例 1.8 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【分析】 直接从 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 中解出 n 较困难，可以采取适当放大法.但采取适当放大法时须注意计算技巧.

解 设 $\sqrt[n]{n}-1=a$，则 $\sqrt[n]{n}=1+a$，当 $n>2$ 时，

$$n=(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2!}a^2+\cdots+a^n>\frac{n(n-1)}{2!}a^2>\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}a^2=\frac{n^2\cdot a^2}{4},$$

即有 $n>\dfrac{n^2\cdot a^2}{4}$，从而 $a<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$，故 $\sqrt[n]{n}-1=a<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

这样，$\forall\varepsilon>0$，有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon\Rightarrow n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$.取 $N=\max\left\{2,\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right\}$，

则当 $n>N$ 时，便有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2.利用四则运算法则求极限

【题型特点】 利用极限的四则运算法则求极限，通常先要对函数作某些恒等变形化简，如分式的约分消去零因子、通分、分解因式、分母有理化、三角函数的恒等变形等.

例 1.9 (1997 年) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=(\quad)$.

解

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{x+1}{|x|}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\frac{x+1}{x}\right)=2-1=1.$$

例 1.10 $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

高等数学一本通

解 令 $t=\arccos x$，则 $x=\cos t$，当 $x\to-1^+$ 时，$t\to\pi^-$.

$$原式=\lim_{t\to\pi}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{t}}{\sqrt{\cos t+1}}=\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\sqrt{\pi}-\sqrt{t})(\sqrt{\pi}+\sqrt{t})\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{(1+\cos t)(1-\cos t)}(\sqrt{\pi}+\sqrt{t})}$$

$$=\lim_{t\to\pi}\frac{(\pi-t)\sqrt{1-\cos t}}{|\sin t|(\sqrt{\pi}+\sqrt{t})}=\lim_{t\to\pi}\frac{(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

例 1.11 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

【分析】 随着 $n\to\infty$，数列 $x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$ 的项数也趋向于无穷，而极限的运算法则：代数和的极限等于极限的代数和只对有限多个函数成立，故此题应当先利用某些求和公式将其变为有限项再继续求解.

解 使用自然数前 n 项和公式：$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b.

【分析】 此题极限存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}\to\infty$，故是 $\infty-\infty$ 型. 化为 $\frac{\infty}{\infty}$，利用分子有理化计算极限，确定 a,b.

解 $$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0.$$

因为左 $=\begin{cases}+\infty, & a\leqslant 0\\ \text{“}\infty-\infty\text{”型未定式} & a>0\end{cases}$，所以必有 $a>0$（否则左 $\neq$ 右），且当 $1-a^2\neq0$，$1+2ab\neq0$ 都与已知矛盾，故必有 $1-a^2=0$，$1+2ab=0$.

所以 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$.

例 1.13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}(x>0)$.

【分析】 此题属于求含参数函数的极限，将 x 进行分类讨论，再求极限.

解 因为 $$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ +\infty, & x>1\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x<-1\end{cases},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}.$$

例 1.14 （1992 年）当 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限　　（　　）

(A) 等于 2　　(B) 等于 0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，而 $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$.

所以 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0.$

故此极限不存在也不为 ∞,选(D).

3.消去零因子法

【题型特点】 将函数进行化简时,注意观察分子与分母是否含有零因式.将其约掉,再求极限.

例 1.15 求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

【分析】 先通分,然后视通分后的极限类型再决定下一步的方法,此题通分后变成$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$型未定式,可约去分子分母中的零因式后求极限.

解 $\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$,

所以,原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)=-1.$

4.无穷小因子分出法

【题型特点】 类似$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x n-1+\cdots a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$的计算,可用分子、分母中最高次幂的项分别除以分子、分母,分出无穷小再进行计算.

例 1.16 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^2+4x^2-1}$.

【分析】 $x\to\infty$ 时,分子分母的极限都是无穷大.先用 x^3 去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^2+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}{7+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

例 1.17 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

【分析】 $n\to\infty$ 时,它是$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$型未定式,将分子、分母同除以 3^n,使之分出无穷小再求极限.

解 原式 $$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3.$$

5.利用无穷小的性质

【题型特点】 利用无穷小的定义、无穷大和无穷小的关系以及等价无穷小量代换计算极限.

例 1.18 求极限$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=0$,根据无穷小与无穷大的关系知: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

例 1.19 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(x\sqrt{\cos2x})}{\sin x\cdot\ln(1+x)}$.

【分析】 因 $x\to0,1-\cos(x\sqrt{\cos2x})\sim\frac{1}{2}x^2\cos2x,\sin x\sim x,\ln(1+x)\sim x$,故用等价无穷小代换.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cos 2x}{x\cdot x} = \dfrac{1}{2}$.

例 1.20 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{代换}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/x} = 1$.

例 1.21 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶无穷小．则正整数 n 等于 ( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot x^2}{x\cdot x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^n}$,

要使 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，则 $n<3$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x^n}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}$,

要使 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则 $n-1>0$，即 $n>1$.

所以得 $n>1$ 及 $n<3$．故选 $n=2$，即选(B).

6．利用左、右极限求函数的极限

【题型特点】 对于分段函数、含有绝对值的函数，可以利用左、右极限讨论其极限.

例 1.22 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$，当 $x\to -1$ 及 $x\to 1$ 时极限是否存在；若存在，试求其值.

解 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(1-x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\cos\dfrac{\pi x}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$,

所以 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 不存在.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

例 1.23 (2000 年) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【分析】 函数表达式中含有绝对值，按分段函数利用左、右极限求解.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$,

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1,$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1.$$

故　原式 $=1$.

7.极限存在准则

【题型特点】 ① 对于具有递推关系的数列，若能通过归纳法、减法或除法判断其单调性和有界性，可利用单调有界准则判断极限，② 对于比较容易适度放大或缩小的函数，而且放大和缩小后的函数易求得相同极限的情形，则利用夹逼准则求极限.

例 1.24　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

【分析】　当我们无法或不易把无穷多个因子的积变为有限时，也可考虑使用夹逼准则.

解　因为　$0\leqslant\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$,

不等式两端当 $n\to\infty$ 时都以 0 为极限，所以原式 $=0$.

例 1.25　设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由 $a>0$，易知 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$. 根据算术平均数与几何平均数的关系，有

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)\geqslant\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a},$$

所以，数列 x_n 有下界 $\sqrt[4]{a}$，即对一切 $n>1$，有 $x_n\geqslant\sqrt[4]{a}$.

又 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{4}\left(3+\dfrac{a}{x_n^4}\right)\leqslant\dfrac{1}{4}\left(3+\dfrac{a}{a}\right)=1$，所以 $x_{n+1}\leqslant x_n$，即数列单调减少.

由单调有界准则，知数列 $\{x_n\}$ 有极限.

现设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由极限的保号性知 $A\geqslant\sqrt[4]{a}>0$.

对式子 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$ 两边同时取极限得 $A=\dfrac{1}{4}\left(3A+\dfrac{a}{A^3}\right)$,

解得 $A=\sqrt[4]{a}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$（已舍去负根）.

例 1.26　设 $a>0,x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1},\cdots,x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】　此题可用单调有界准则证明数列极限存在. 数列单调增加是容易看出来的，但其上界却不容易估计. 为此，可以先假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，并由 $A=\sqrt{a+A}$ 解出 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，这便是数列的一个最小上界.

解　先用数学归纳法证明数列单调增加：

由 $a>0$，知 $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=x_1>0$，假设 $x_n>x_{n-1}>0$ 成立，

则 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n$，所以数列 x_n 单调增加.