

空间飞行器动力学

刘墩 赵钧 编著

前 言

自 1957 年 10 月 4 日苏联发射第一颗人造地球卫星,使人类进入太空的梦想成为现实以来,航天技术已获得了飞跃性的发展。空间飞行器动力学是航天技术中研究飞行器轨道、姿态和其他动力学现象的科学,是航天技术的重要基础学科之一。

本书是作者在总结多年教学和科研工作的基础上,参考许多优秀著作并融合自己科研成果而完成的。在篇章的安排上,由浅入深,把空间飞行器视为质点的轨道动力学部分放在姿态动力学的前面将便于读者学习。鉴于空间飞行器的研究经常要引用多个坐标系,而坐标系之间的变换不仅繁琐易生差错,而且在冗长的推导中往往会失去对物理现象实质的把握,所以本书采用了矢量描述的方法。由于在最终的应用和计算时,还得将矢量式分解到指定的坐标系中,获得分量表达式才行,为此,将书中涉及其他学科的基础问题(如矢量分析、运动稳定性判断等)以附录形式加在书后。

本书不仅注重了基础知识的叙述,而且兼顾了学科的新进展。如轨道动力学部分,在两体问题的基础上,展开了对变轨和最优过渡、轨道建立和空间飞行器发射、星下点轨迹、空间飞行器的相对运动、行星际飞行、扰动轨道的分析、空间飞行器返回等的讨论;在此基础上研究了空间飞行器各种交会对接方法、小推力(电火箭)飞行、气动辅助轨道转移、空间飞行器的拦截等新技术和未来工作需要的知识,并讨论了限制性三体问题的基本原理。在空间飞行器姿态动力学部分,除了对必学的刚体卫星运动学、动力学基础知识和重力梯度稳定卫星、单自旋和双自旋卫星、三轴稳定卫星的动态特性、稳定性、阻尼特性等作了详细分析和研究,还对近代挠性和带有晃动液体的空间飞行器专章进行了原理性阐述,给出了对它们进行研究的途径和方法。

由于书中符号较多,为了便于阅读,对书中规定的特殊符号作以下说明(以变量 a 为例): $\underline{a}$ 为一般量构成的矩阵, $\underline{a}$ 为矢量构成的矩阵, $\underline{a}$ 为并矢。

本书的读者对象是高等学校空间飞行器相关专业高年级学生、硕士研究生、博士研究生,对专业领域的科技人员也有参考价值。

本书编写过程中,陕晋军、薛孝补、王劼、赵志萍、周文艳、杨志红等在内容编写、公式推导、例题计算、图表绘制等方面做了不少工作,在此一并表示感谢。

作 者

2003 年 8 月

目 录

第一篇 空间飞行器轨道动力学

第一章 绪论	(3)
1.1 从火箭到导弹和人造卫星	(3)
1.2 常用数据	(4)
第二章 空间飞行器的入轨	(6)
2.1 运载火箭的运动方程式	(6)
2.2 导引规律的选择	(8)
第三章 空间飞行器的轨道	(12)
3.1 两体问题	(12)
3.2 中心引力场中的运动	(14)
第四章 轨道的建立和星下点轨迹	(25)
4.1 轨道的建立	(25)
4.2 轨道要素与发射参数的关系	(29)
4.3 星下点轨迹	(32)
4.4 弹道式导弹的射程	(34)
第五章 轨道机动	(36)
5.1 轨道过渡机动的分类	(36)
5.2 单脉冲机动(同平面相交轨道间的过渡)	(36)
5.3 同平面不相交轨道过渡	(41)
5.4 连续作用力下的轨道机动	(45)
5.5 空间飞行器的拦截	(48)
5.6 气动力辅助轨道转移	(51)
第六章 行星际间的航行	(56)
6.1 会合周期及发射窗口	(56)
6.2 影响球和圆锥曲线拼合法	(57)
6.3 星体的引力摄动	(59)

6.4 向月球飞行	(62)
6.5 太阳系行星间的飞行	(69)
6.6 限制性三体问题	(74)
第七章 空间飞行器的相对运动和交会对接	(83)
7.1 相对运动方程式	(83)
7.2 空间飞行器的交会和对接	(87)
第八章 空间飞行器的摄动理论	(102)
8.1 地球引力场的势函数	(102)
8.2 干扰力分量引起的摄动	(107)
8.3 地球卫星的摄动	(114)
第九章 空间飞行器的返回	(131)
9.1 空间飞行器的返回过程	(131)
9.2 返回式飞行器的分类	(133)
9.3 大气层外的飞行	(135)
9.4 返回飞行器在大气内飞行的动力学方程式	(138)
9.5 大气内飞行时的过载、加热和控制	(139)
 第二篇 空间飞行器姿态动力学 	
第十章 空间飞行器姿态运动学	(153)
10.1 常用的坐标系	(153)
10.2 欧拉角和坐标变换矩阵	(154)
10.3 空间飞行器坐标系和体固联坐标系间的变换	(161)
第十一章 空间飞行器姿态动力学基本方程	(163)
11.1 动能	(163)
11.2 角动量(动量矩)	(164)
11.3 欧拉方程式	(165)
11.4 简化刚体空间飞行器的姿态运动方程式	(166)
第十二章 重力梯度力矩和重力梯度稳定卫星	(167)
12.1 重力梯度力矩	(167)
12.2 圆轨道重力梯度稳定卫星	(170)
12.3 圆和近圆轨道重力梯度稳定卫星的俯仰运动	(172)
12.4 能量损耗对重力梯度稳定卫星的影响	(174)

第十三章 单自旋空间飞行器	(180)
13.1 轴对称空间飞行器的自由转动特性	(180)
13.2 一般空间飞行器的自由转动	(185)
13.3 绕惯性主轴旋转的稳定性	(187)
13.4 有能量损耗的自由旋转刚体	(189)
13.5 重力梯度力矩对单自旋空间飞行器的影响	(190)
13.6 自旋稳定空间飞行器的章动阻尼	(193)
13.7 自旋空间飞行器的两种强迫运动	(200)
第十四章 双自旋空间飞行器	(203)
14.1 双自旋空间飞行器的姿态动力学方程式	(203)
14.2 双自旋空间飞行器的章动	(209)
14.3 双自旋空间飞行器的稳定性	(211)
14.4 有能量损耗的双自旋空间飞行器	(212)
14.5 重力梯度力矩对双自旋空间飞行器的影响	(216)
14.6 双自旋空间飞行器的章动阻尼	(217)
第十五章 三轴稳定空间飞行器	(227)
15.1 多动量轮空间飞行器姿态动力学方程式	(227)
15.2 多动量轮三轴稳定空间飞行器的无控动力学特性	(236)
第十六章 挠性结构和带有液体的空间飞行器	(240)
16.1 带有挠性附件的空间飞行器动力学方程式	(240)
16.2 有晃动液体的空间飞行器	(249)
附录	(253)
附录 1 大气密度	(253)
附录 2 齐奥尔科夫斯基公式	(256)
附录 3 矢量和矢量的分量	(257)
附录 4 转动惯量的特性	(263)
附录 5 矢量和张量对时间的导数	(265)
附录 6 稳定性和劳斯 - 古尔维茨(Routh - Hurwitz)准则	(267)
附录 7 古尔维茨(Hurwitz)稳定性判断准则	(269)
附录 8 李亚普诺夫(Lyapunov)稳定性定理(第二定理)	(270)
附录 9 几个常用的运动稳定性定理	(271)
参考文献	(278)

第

一

篇

空间飞行器

轨道动力学

第一章 绪 论

1.1 从火箭到导弹和人造卫星

火药、指南针、印刷术和造纸术是我国古代对于科学技术的四项重大贡献,其中火药的发明又给火箭的诞生奠定了物质基础。唐朝孙思邈(581 ~ 682 年)著《丹经》,就已给出了火药的配方。火药的出现是化学能转化为机械能,进而转化为动力的重大突破,使火箭发动机的问世有了真实的可能。

不同的学者对我国火箭的真正发明年代有不同的推断,比较可靠的,可认为是在北宋开宝三年(公元 970 年):冯继升向朝廷进贡火箭法,并进行试验和受到赏赐。可见我国的火箭初创于 10 世纪后半期。这时的火箭就是古代的弓箭之箭,其上缚一类似现在儿童玩耍的“起花”(又称“穿天猴”),靠火箭反作用飞行。

13 世纪中叶,火药由我国传入了信奉伊斯兰教的中亚,再传入了欧洲。直到 19 世纪,火箭与火炮一直是并驾齐驱,互相竞争。但到 19 世纪末,火炮上出现了两大改革:以硝化纤维素为基础的新型火药和膛线炮管,大大提高了性能,竞争优势倒向了火炮。

在火箭的发展处于低潮期间,各国科学家对火箭技术的研究和试验却一直在进行着,到了 20 世纪初,出现了两位对火箭技术做出巨大贡献的人。一位是俄国的齐奥尔科夫斯基(Циолковский. К. Е),他于 1903 年发表了《利用火箭探测宇宙》一文,还提出了使用液体燃料(如液氮和液氧)实现星际航行的可能性,并阐述了火箭飞行器的运动规律,提出了多级火箭的概念。另一位是美国的戈达德(R. H. Goddard),1919 年他提出了“达到极高高度的一种方法”,利用固体推进剂制作了火箭,试图射入太空。1926 年他又设计并发射了以液氧和汽油为推进剂的火箭,随后也提出了多级火箭的理论,企图射到月球。

到 20 世纪 30 年代,液体及固体火箭推进剂、高温材料、电子和导航技术都取得了很大的进展,给近代火箭和导弹的出现创造了物质基础,火箭武器又重新有了活力。导弹是一种能够控制的火箭武器,它的出现是在第二次世界大战的末期,希特勒企图凭借一两种新式武器挽救其灭亡的命运,并在原子弹和导弹之间选择了导弹这一“秘密武器”。第二次世界大战之后,苏美两国都争先发展自己的导弹和空间技术,投入很大的人力和物力。1957 年 10 月 4 日,苏联首先把人类第一颗人造卫星送入了轨道,成为航天纪元的开端。1961 年 4 月 12 日苏联又以“东方一号”将宇航员加加林送入空间,实现了人类遨游太空的梦想。苏联还是第一个向月球发射探测器(1959 年 1 月 3 日)和在月球着陆(1959 年 9 月 12 日)的国家。美国由于其技术政策及科学管理上的错误,在空间技术起步阶段落后于苏联。他们总结了失误教训后,终于在 1958 年 2 月 1 日发射了第一颗卫星,并且于 1969 年 7 月 16 日将人送上了月球。此后,一共有六艘“阿波罗”飞船登月,16 人次将足迹留在月球表面,这是迄今为止人类最壮观的空间飞行活动。在完成上述竞争之后,美国着力研究第一代多次使用的航天器——航天飞机,并于 1981 年 4 月 12 日首次飞行成功。苏联在美国致力于登月

飞行和航天飞机研制的期间,将力量重点投入到空间站的研究中,并于1971年4月19日把第一座空间站送入轨道,这就是第一代空间站“礼炮一号”。截止目前苏联已发展了三代空间站,第三代空间站“和平号”积累了大量载人飞行的经验,在运行了15年后,于2001年3月23日坠入南太平洋。与此同时,苏联也继美国之后研制成功了自己的航天飞机“暴风雪号”,并且把目前最大的运载器“能源号”投入使用。美国本来也有空间站计划,在1973年5月4日步苏联之后,曾将他们的空间站“天空实验室”发射入轨,后因航天飞机屡屡拖期,后续计划不得不变更,该空间站于1979年7月11日坠毁。1986年“挑战者号”航天飞机失事之后,由于后来的国际政治、军事、经济格局的变化,美国除了继续研制第2代航天飞机外,也开始参加了通过国际合作发展永久性载人空间站的工作。1998年11月20日国际空间站(ISS)完成了第一次的发射,计划到2005年全部完成。

我国在古代对于火箭技术的贡献是巨大的,只是由于一千余年的封建社会和一百余年的半封建半殖民地社会的桎梏,使得我国的科学技术落后了。解放后,我们急起直追,科学技术有了极大的发展,1970年4月24日成功地发射了“东方红一号”人造地球卫星,是继苏美法日之后第五个独立发射卫星的国家。1975年11月26日我国发射了第一颗返回式人造卫星,并于同年12月2日顺利回收,成为世界上第三个掌握了回收技术的国家。我国发射卫星的成功率是第一流的,价格远低于国外,极具竞争能力。1992年1月,正式启动了我国的载人飞船研制计划,且于1999年11月20日、2001年1月10日、2002年3月15日、2002年12月30日成功发射并回收了“神舟一号”、“神舟二号”、“神舟三号”、“神舟四号”实验飞船。登月和深空探测计划也开始实施。

1.2 常用数据

地球的有关数据

引力常数	$\mu_{\oplus} = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$
平均半径	$R_{\oplus} = 6\,378 \text{ km}$
轨道半径	$r_{\oplus} = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$ (等于1个天文单位(AU))
轨道速度	$v_{\oplus} = 29.78 \text{ km/s}$

月球的有关数据

引力常数	$\mu_{\zeta} = 4.887 \times 10^3 \text{ km}^3/\text{s}^2$
平均半径	$R_{\zeta} = 1\,738 \text{ km}$
轨道半径	$r_{\zeta} = 3.844 \times 10^5 \text{ km}$
轨道偏心率	$e_{\zeta} = 0.054\,9$
轨道速度	$v_{\zeta} = 1.02 \text{ km/s}$
相对地球的 影响球半径	$\rho = 66.1 \times 10^3 \text{ km}$

太阳的有关数据

引力常数	$\mu_{\odot} = 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$
平均半径	$R_{\odot} = 6.98 \times 10^5 \text{ km}$

太阳系行星的有关数据详见表1.1。

表 1.1 太阳系行星的有关数据

星球	平均轨道 半径/ 10^6 km	偏心率 (e)	质量比 (行星/太阳)	影响球半 径/ 10^5 km	引力常数 / $(\text{km}^3 \cdot \text{s}^{-2})$	赤道与轨 道夹角	轨道与黄 道夹角	平均轨道速 度/ $(\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	轨道的恒 星周期/a	与地球的 会合周期/d	赤道平均 直径/ 10^4 km	大气边界 高度/km	自地球过渡 的时间/d
水星	57.91	0.205 63	$0.001\ 64 \times 10^{-4}$	1.12	$(2.16 \sim 2.19) \times 10^4$	0°	7°	47.83	0.241	115.88	0.481	—	105.5
金星	108.21	0.006 79	$0.024\ 5 \times 10^{-4}$	6.16	3.253×10^5	178°	$3^\circ 23'$	34.99	0.615	583.92	1.21	120	146.1
地球	149.60	0.016 72	$0.030\ 4 \times 10^{-4}$	9.29	3.986×10^5	$23^\circ 27'$	—	29.76	1.0	—	1.274 2	100	—
火星	227.94	0.093 38	$0.003\ 24 \times 10^{-4}$	5.78	4.29×10^4	$24^\circ 48'$	$1^\circ 51'$	24.11	1.881	779.94	0.678	100	258.9
木星	778.34	0.048 45	9.55×10^{-4}	482	1.268×10^8	$3^\circ 6'$	$1^\circ 18'$	13.05	11.862	398.88	13.92	400	997.6
土星	1 427.0	0.055 69	2.86×10^{-4}	545	3.799×10^7	$26^\circ 45'$	$2^\circ 29'$	9.64	29.458	378.09	11.48	500	2 209.2
天王星	2 871.0	0.047 24	0.436×10^{-4}	519	5.798×10^6	98°	$0^\circ 46'$	6.80	84.015	369.66	5.34	500	5 428.9
海王星	4 498.6	0.008 58	0.518×10^{-4}	868	6.977×10^6	29°	$1^\circ 46'$	5.43	164.8	367.49	4.97	400	11 183.6
冥王星	5 912.0	0.253 44	$0.002\ 5 \times 10^{-4}$	341	$3 \sim 3.7 \times 10^5$		$17^\circ 8'$	4.8	247.69	366.74	0.55	—	16 654.7

第二章 空间飞行器的入轨

空间飞行器的入轨,就是通过运载火箭的飞行,使空间飞行器在预定的时刻,以给定的速度、给定的方向、给定的位置进入轨道。这样,空间飞行器就会在预先规定的轨道上运行,完成各种指定的任务。

2.1 运载火箭的运动方程式

2.1.1 常用坐标系

计算运载火箭的飞行轨迹,可以在不同的坐标系进行,最方便的是发射坐标系 $O_c X_c Y_c Z_c$ 。其坐标原点为发射点 O_c , X_c 轴水平指向发射方向(一般指东或偏东方向), Y_c 轴与重力方向相反, Z_c 轴与 X_c 、 Y_c 轴构成右旋坐标系(图 2.1 示出运载火箭的平面运动,即在 $O_c X_c Y_c$ 平面中运动的情况)。然而,空气动力却在速度(轨道)坐标系 $OXYZ$ 中计算最为方便,其原点 O 在运载火箭质心, X 轴与速度方向重合, Y 轴在飞行器纵向对称平面内朝上, Z 与前两轴共同构成右旋坐标系。常用的坐标系还有飞行器固联坐标系 $OX_1 Y_1 Z_1$, 其原点也取在飞行器质心, X_1 轴与飞行器纵轴重合, Y_1 轴在飞行器纵向(或对称)平面内,指向上方, Z_1 轴与前两轴构成右旋坐标系。最后引入的坐标系是平移(陀螺)坐标系 $OX_g Y_g Z_g$, 它的原点在质心,三个轴一直保持与发射坐标系在发射瞬间对应轴相平行。值得提醒的是:由于地球的旋转,发射坐标系 $O_c X_c Y_c Z_c$ 是随地球旋转而变动的。图中为了区别,将发射时刻的坐标系以 $Y_c(t_0)$ 和 $X_c(t_0)$ 表示。

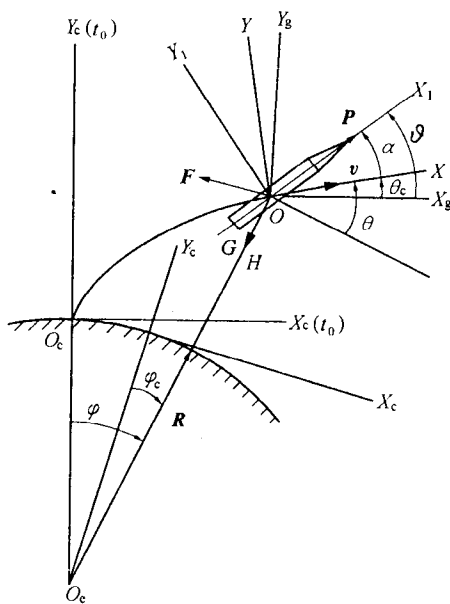


图 2.1 各坐标系

非平面运动的情况,上述坐标系间的关系如图 2.2(a) ~ 2.2(c)。平移坐标系 $OX_g Y_g Z_g$ 到飞行器固联坐标系 $OX_1 Y_1 Z_1$ 是经过三次转动得到的,即先以角速度 $\dot{\psi}$ 绕 OY_g 转过 ψ 角,得 $OX' Y_g Z'$ 系;再绕 OZ' 以角速度 $\dot{\vartheta}$ 转角 ϑ 得 $OX_1 Y' Z'$ 系;最后以角速度 $\dot{\gamma}$ 绕 OX_1 转 γ 角,得飞行器固联坐标系 $OX_1 Y_1 Z_1$ 。由 $OX_g Y_g Z_g$ 平移系到 $OXYZ$ 速度坐标系也是经过三次旋转得到的,旋转的顺序同前,见图 2.2(b)。

速度坐标系 $OXYZ$ 与飞行器固联坐标系 $OX_1 Y_1 Z_1$ 之间的关系,以攻角 α 和侧滑角 β 来

描述(图 2.2(c))。由图 2.2(c) 可见,侧滑角 β 是速度与飞行器纵平面 OX_1Y_1 间的夹角,而攻角 α 是速度在纵平面上投影与纵轴 OX_1 间的夹角。各角的关系如图 2.2 所示,运载火箭在 $O_cX_cY_c$ 中的平面运动时,其侧滑角 β ,倾斜角 γ_c 和横滚角 γ 均为零,是运动的最简单情况。考虑到地球的曲率变化,其水平线随着空间飞行器位移的改变,将逐渐改变其倾斜程度,以变化后的水平线为基准的轨道倾角将以 θ 表示(图 2.1)。

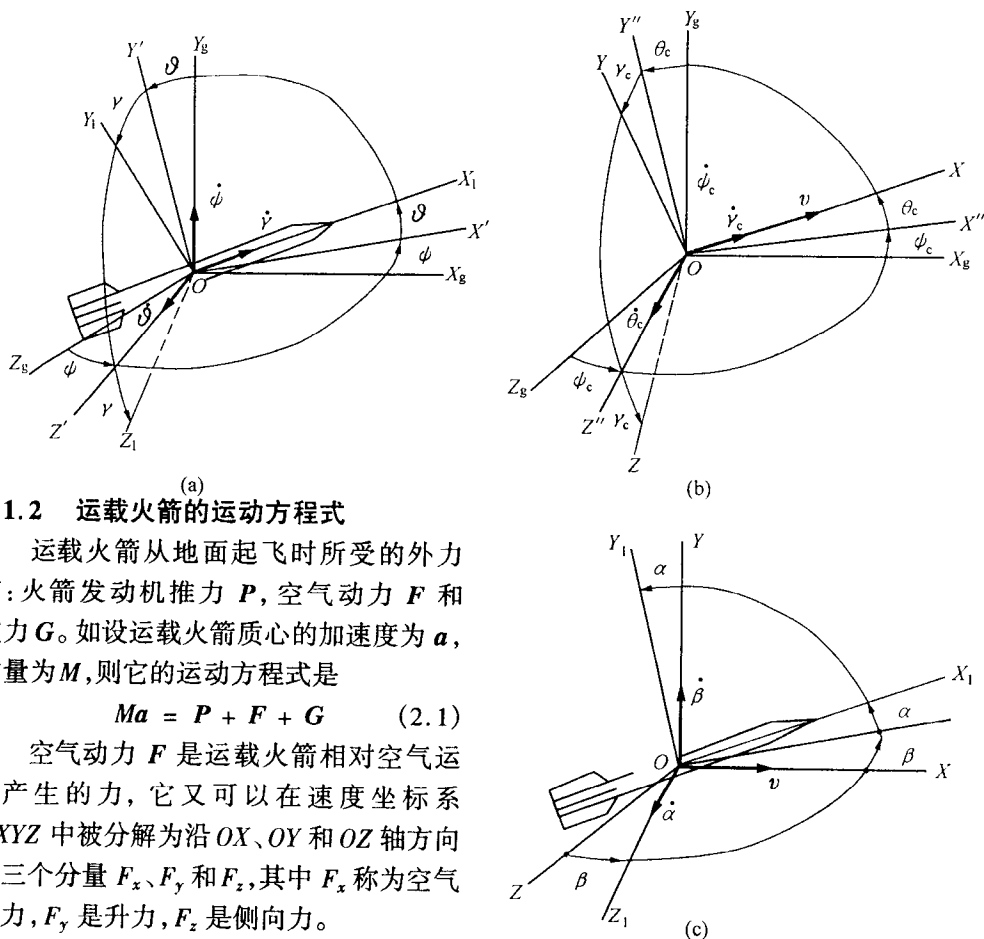


图 2.2 坐标变换

ϕ —偏航角; θ —俯仰角; γ —横滚角; ϕ_c —轨道(弹道)偏角; θ_c —轨道(弹道)倾角; γ_c —倾斜角

2.1.2 运载火箭的运动方程式

运载火箭从地面起飞时所受的外力有:火箭发动机推力 P , 空气动力 F 和重力 G 。如设运载火箭质心的加速度为 a , 质量为 M , 则它的运动方程式是

$$Ma = P + F + G \quad (2.1)$$

空气动力 F 是运载火箭相对空气运动产生的力, 它又可以在速度坐标系 $OXYZ$ 中被分解为沿 OX 、 OY 和 OZ 轴方向的三个分量 F_x 、 F_y 和 F_z , 其中 F_x 称为空气阻力, F_y 是升力, F_z 是侧向力。

当只考虑运载火箭纵向平面中的运动时, 式(2.1)可以写成分量形式, 即沿 OX 和 OY 方向的力平衡方程式或动力学方程式, 以及垂直高度 H 的运动学关系, 即

$$\begin{aligned} M \frac{dv}{dt} &= P \cos \alpha - F_x - Mg \sin \theta \\ Mv \frac{d\theta_c}{dt} &= P \sin \alpha + F_y - Mg \cos \theta \\ \frac{dH}{dt} &= v \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

因在 $OXYZ$ 坐标系中速度是沿着 OX 轴的, 所以有 $v = vi$ (i 是 OX 轴正向单位矢量), 对其求导可得运载火箭加速度, 即

$$a = \frac{dv}{dt}i + v \frac{di}{dt} \quad (2.3)$$

其中 $\frac{di}{dt}$ 可参考附录 5, 得

$$\frac{di}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta t} = \omega \times i$$

可见单位矢量的时间导数, 是该矢量相对惯性空间的角速度 ω 与其自身的叉乘积。

把上式代入式(2.3), 并考虑到 $\omega = \frac{d\theta_c}{dt}k$, 得

$$a = \frac{dv}{dt}i + v \frac{d\theta_c}{dt}j \quad (2.4)$$

其中, j 和 k 分别是 OY 和 OZ 轴的正向单位矢量, 由式(2.4) 可见运载火箭沿 OX 和 OY 方向的加速度分量, 分别是 $\frac{dv}{dt}$ 和 $v \frac{d\theta_c}{dt}$, 这就是式(2.2) 左侧的由来。

2.2 导引规律的选择

式(2.2) 第一式, 表示运载火箭沿轨道的加速性能, 第二式描述其轨道转弯的特性。火箭起飞时, 由于 $\theta_c = \theta = 90^\circ$, $\alpha = 0$, 因而升力 F_y 也是零, 第二式右侧为零, 欲使运载火箭转弯, 只能借助改变 α 角的数值。然而, 当火箭转弯之后(如图 2.1), θ 不再为 90° , 重力 Mg 就成为其继续转弯的驱动力。

我们知道, 当 $\alpha = 0$ 时, 火箭的空气动力只有阻力一项, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 还要出现升力 F_y , 且阻力 F_x 随 α 的增加而增大。人们总是希望阻力小些, 以便节省火箭的燃料, 怎样设计 α 角的变化规律和控制倾角 θ 的变化, 以达到最优地将运载火箭送入卫星轨道就是一个十分重要的问题了。

2.2.1 运载火箭的初始转弯段

由于火箭上升高度有限, 可以认为 $g = g_0$ (g_0 ——海平面的重力加速度), 当火箭以零攻角垂直飞行 $10 \sim 15$ s 后, 令攻角 α 产生一个短时间的变化使火箭转弯。通常选择的变化规律是

$$\alpha(t) = \alpha_m \sin^2 \frac{\pi(t - t_1)}{(t - t_1) + k(t_2 - t)} \quad (2.5)$$

其中, t_1 和 t_2 分别是攻角改变的初始时刻和结束时刻, α_m 是攻角变化的极小值(为负), 而

$$k = \frac{t_m - t_1}{t_2 - t_m}$$

是达到攻角极小值 α_m 时的时间 t_m 与 t_1 和 t_2 差值之比, 通常取 $k = 1/4$, α 随时间的变化规律如图 2.3 所示。

α 角的变化, 除使运载火箭转弯外, θ 角也逐渐变得小于 90° , 其值由式(2.2) 计算得到。

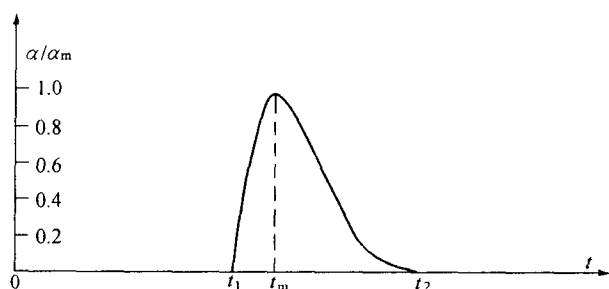


图 2.3 攻角的变化曲线

2.2.2 运载火箭的继续转弯段

经过前一阶段的初始转弯之后,速度约达到 $Ma = 0.8$ 左右,高度为数千米,仍处在稠密大气层之中。通常都以很小的攻角,或零攻角继续飞行,以减小阻力损失,同时也可降低对控制机构的要求和对结构强度的影响。此时,火箭的转弯主要靠重力来实现,故又称此段为重力转弯段。

飞出稠密大气层后,攻角可根据最小能量原则进行优化,也可继续保持为零攻角的重力转弯飞行。

由于运动方程式是非线性和时变的,准确求解火箭的轨迹只能借助于计算机,然而为了能获得解析解以便有清晰的概念,下面把运动方程式简化。首先将空气动力略去,再假设重力为常值平行场,并略去地球自转,这时式(2.2)成为($\theta = \theta_c$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} &= \frac{P}{Mg} - \sin \theta \\ \frac{v}{g} \frac{d\theta}{dt} &= -\cos \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

这是非线性时变方程式,当 P/Mg 为常值时可求得解析解。此时将要求推力随火箭质量的变小而按比例地减小,这在实际中是可以实现的。令

$$z = \tan \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \quad (2.7)$$

则有

$$z^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}, \quad \sin \theta = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \quad (2.8)$$

由式(2.7)还可以求得

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{1 + \sin \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.9)$$

把式(2.7) ~ 式(2.9)代入式(2.6),并设 $P/Mg = n$,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} &= n - \frac{1-z^2}{1+z^2} \\ \frac{v}{g} \frac{dz}{dt} &= z\end{aligned}\quad (2.10)$$

从上两式消去 t , 得

$$\frac{dv}{v} = n \frac{dz}{z} - \frac{1-z^2}{1+z^2} \frac{dz}{z}$$

积分后, 有

$$\ln v = \ln z^n + \ln \frac{1+z^2}{z} + \ln C$$

或

$$v = Cz^{n-1}(1+z^2) \quad (2.11)$$

其中积分常数为

$$C = \frac{v(0)}{z(0)^{n-1}(1+z^2(0))} \quad (2.12)$$

把式(2.11)代入式(2.10), 积分后得

$$t = \frac{C}{g} \int_{z(0)}^z z^{n-2}(1+z^2) dz = \frac{C}{g} z^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{z^2}{n+1} \right) \Big|_{z_0}^z \quad (2.13)$$

应用式(2.11) ~ 式(2.13) 可求得重力转弯时的解。做法是, 先根据初始的 $\theta(0)$ 由式(2.7) 求得 $z(0)$, 再与 $v(0)$ 一同从式(2.12) 计算 C , 此后每给出一个轨道倾角 θ , 即可由式(2.7)、式(2.11)、式(2.13) 算出对应的 z , v 和 t 。至于运载飞行器的轨道坐标值, 可以用

$$\frac{dy_c}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dx_c}{dt} = v \cos \theta \quad (2.14)$$

计算。

对于非平行重力场和地球有自转的情况, 计算方法相同, 只是繁杂得多。

由上述分析可见, 一旦确定了初始条件 ($v(0)$ 、 $\theta(0)$ 、 $y_c(0)$ 和 $x_c(0)$), 重力转弯段的轨道便唯一地被确定了下来, 而要在规定的高度 H^* , 使速度达到规定值 v^* 和确定的方向 θ^* , 可以调节的只有推力 P (或 n) 及初始条件 $\theta(0)$ 和 $y_c(0)$ 等。然而, 重力转弯段的初始条件是初始转弯段的最终结果, 换言之, 其他参数确定后, 只有惟一的 $\alpha_m = \alpha_m^*$ 式(2.5) 能使运载飞行器最终高度 H_k 、末速 v_k 和终点轨道倾角 θ_k 分别达到要求值 H^* 、 v^* 和 θ^* 。当 $\alpha_m < \alpha_m^*$ 时 (注意, $\alpha < 0$), 轨道比规定的低, 且有 $H_k < H^*$ 、 $v_k > v^*$ 和 $\theta_k < \theta^*$; 反之, 如果 $\alpha_m > \alpha_m^*$, 轨道较高, 而且 $H_k > H^*$ 、 $v_k < v^*$ 和 $\theta_k > \theta^*$ (图 2.4)。然而, 即使在 $\alpha_m \neq \alpha_m^*$ 时, 也可达到规定的高度 H^* , 只需对运载飞行器施加控制力矩, 使 α 角不再为零。对于 $\alpha_m < \alpha_m^*$, 使 α 为大于零的数值 ($\alpha > 0$); 对于 $\alpha_m > \alpha_m^*$, 应使 α 小于零 ($\alpha < 0$) (图 2.5)。

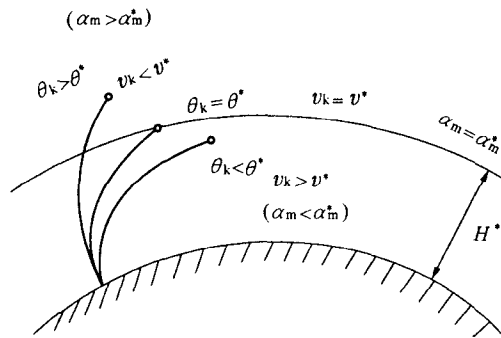


图 2.4 不同的人轨状态

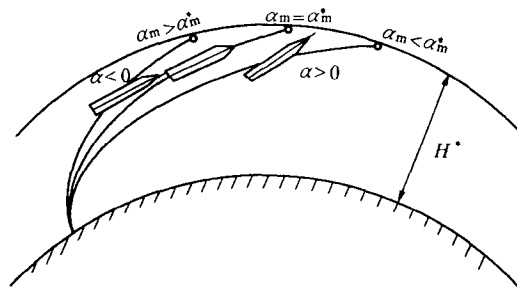


图 2.5 控制攻角的效果

第三章 空间飞行器的轨道

本章研究两体问题和中心引力场的运动问题,也就是忽略其他天体的作用,只研究某一影响最大的星球对空间飞行器的影响(如地球对于人造地球卫星)。多个星体同时作用于空间飞行器的运动规律(n 体问题),目前尚未找到一般通用解,只能依靠数值计算,其中限制性三体问题将在后面章节中研究。

3.1 两体问题

如果将惯性空间某两星体孤立地进行研究,如地球和月球、太阳和某颗行星或某些双星那样,就是本节所研究的问题。

设 $OXYZ$ 是惯性参考坐标系,把其中的两个物体视为质点,质量分别为 m_1 和 m_2 ,构成两体系统。系统的质心为 C ,它位于质点 m_1 相对于 m_2 的距离矢量 $\mathbf{r}$ 上的某点。若坐标系原点到 m_2, m_1 和质心 C 的矢径分别为 $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_c$ (图 3.1),则根据系统质心的特性,有

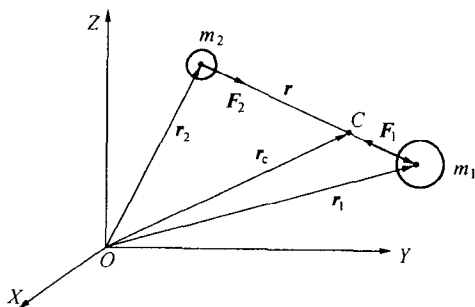


图 3.1 两体系统模型

若坐标系原点到 m_2, m_1 和质心 C 的矢径分别为 $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_c$ (图 3.1),则根据系统质心的特性,有

$$m_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) + m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

利用几何关系

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

依次从式(3.1)消去 $\mathbf{r}_2$ 和 $\mathbf{r}_1$,有

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.2b)$$

因而 m_1 和 m_2 的加速度是

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.3a)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.3b)$$

据牛顿第二定理,作用在 m_1 和 m_2 上的力应为

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (3.4)$$

对于两体问题,作用在 m_1 和 m_2 上的力只有万有引力,它们大小相等方向相反,即

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.5)$$