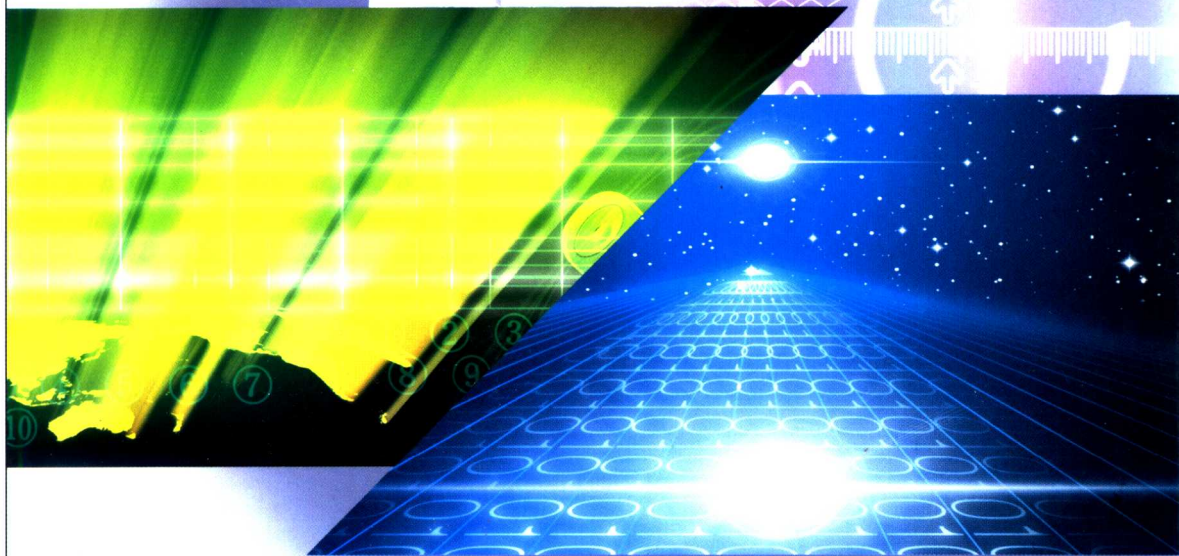




普通高等教育“十五”国家级规划教材

数字信号处理

陈后金 主编
薛 健 胡 健 编



高等教育出版社

内容简介

《数字信号处理》是普通高等教育“十五”国家级规划教材,2003年被列入高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目。本书介绍了数字信号处理的基本原理、基本分析方法和处理技术,简要介绍了离散时间信号与系统的时域、频域和 z 域分析的基础理论,重点介绍了离散傅里叶变换的原理及其快速算法FFT在信号处理中的应用,并深入讨论了IIR和FIR数字滤波器的设计。本书在介绍随机信号经典功率谱估计的基础上,较全面地讨论了现代功率谱估计,并根据信息技术的发展,较系统地介绍了多速率信号处理以及信号的时频分析。

本书内容丰富,强调基本理论、基本概念和基本方法,注重内容的时代性和前沿性,将计算机仿真工具MATLAB与教材内容紧密结合,增加设计性、综合性和工程性的例题及习题,充分体现了经典与现代相结合,基本理论与工程技术相结合,解析方法与计算机辅助分析相结合。全书叙述深入浅出,条理清楚,概念清晰。

本书可作为高等学校工科电子信息工程、通信工程、自动化、电子科学技术、测控技术与仪器、生物医学工程及理科电子信息科学与技术专业作为“数字信号处理”课程教材使用,也可供有关领域的科技工作者自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/陈后金主编. —北京: 高等教育出版社, 2004. 7

ISBN 7-01-014542-1

I. 数… II. 陈… III. 数字信号-信号处理-高等学校-教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第053910号

策划编辑 刘激扬 责任编辑 高云峰 封面设计 刘晓翔 责任绘图 朱静
版式设计 张岚 责任校对 王效珍 责任印制 孔源

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京市南方印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 27.25
字 数 510 000

版 次 2004年7月第1版
印 次 2004年7月第1次印刷
定 价 33.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

序 言

随着信息技术的不断发展,新的信号处理的理论和技术不断涌现。信息科学与技术研究的核心内容主要是信号的获取、传输和处理、识别及综合等。信号是信息的载体,系统是信息处理的手段。因此,作为研究信号和系统的基本理论与方法的数字信号处理教材,应跟踪信息技术发展趋势,积极吸收国内外教研成果。为此,编者在研究国内外最新同类教材的基础上,结合多年教学经历,重新组织和编写了本教材,使它具有以下几个方面的特色:

在教材的观念上,体现教材不仅是人类知识的载体,也是人类思维方法和认知过程的载体。教材的体系结构循序渐进,教材的内容深入浅出,符合认知规律。努力实现在教材学习的过程中,既能够获取有效的知识,又能够锻炼和提高自主学习能力。

在教材的体系上,正确处理局部与整体的辩证关系。根据电气信息学科的技术基础课程“路、场、信号处理”的知识体系,确立信号处理系列课程的体系,以信号分析为基础、系统分析为桥梁、处理技术为手段,突出理论和方法中所蕴涵的数学概念、物理概念和工程概念,实现原理、方法和应用的有机结合。

在教材内容上,体现经典与现代相结合、基本理论与工程技术相结合、解析方法与计算机辅助方法相结合的特点。在介绍经典的理论与方法的基础上,适当引入现代信号处理的理论与方法,体现基础性、时代性和先进性,如较系统地介绍了信号处理的多速率分析、信号的时频分析及小波分析等新内容。数字信号处理是技术性很强的课程,本书引入 MATLAB 仿真分析软件的介绍,突出信号处理理论的技术应用,如在信号谱分析、滤波器设计、信号的时频分析及应用等内容中,都利用 MATLAB 实现其工程应用。

本教材于 2001 年被评为普通高等教育“十五”国家级规划教材,2003 年列入高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目,同时也是北京交通大学国家工科基础课程电工电子教学基地的系列教材之一。本书编者长期从事信号与系统、数字信号处理的系列课程教学与研究,立体化建设信号处理教材。纵向按信号与系统、数字信号处理进行系列化建设,已主编出版了北京市精品立项教材《信号与系统》,主持建设的《信号与系统》课程 2003 年被评为国家精品课程;横向按理论教材、教学辅导、电子教案、实验教材、试题库等进行多媒体建设。本教材的出版得到了教育部、高等教育出版

社、北京交通大学教务处和电子信息工程学院的大力支持。

本书共分9章,第1~7章是经典的数字信号处理内容,第8~9章中大部分是现代的数字信号处理内容。根据不同学科专业的需求,适当地选取第8~9章中的教学内容,建议学时为48~64学时。数字信号处理是技术性较强的课程,该教材配备了大量的基于MATLAB的例题和习题,应充分利用MATLAB仿真软件以加深对课程原理与方法的理解。

第1章是信号与系统课程、数字信号处理课程之间承上启下的内容,也是后续章节的信号频谱分析和系统设计的理论基础。本章简要总结了离散信号与系统的时域、频域和 z 域分析的主要内容,引入了最小相位系统及全通滤波器的概念,并简要介绍了信号的时域抽样和频域抽样。

第2章首先回顾四种信号傅里叶变换,从信号表达的角度引入了有限长序列的离散傅里叶变换(DFT),介绍了DFT的性质,着重介绍了利用DFT分析连续信号频谱的原理和方法,并列出了多个基于MATLAB的信号谱分析的例题,力求从数学概念和工程概念阐述分析过程中出现的混叠现象、泄漏现象和栅栏现象。

第3章主要介绍了DFT的快速算法FFT,重点分析了基2时间抽取FFT和基2频率抽取FFT的算法原理,并介绍了基4时间抽取FFT算法和线性调频 z 变换算法,为进一步学习信号处理的其他快速算法奠定基础。

第4章重点介绍了无限脉冲响应(IIR)数字滤波器设计的基本思想与基本方法,简要介绍了模拟滤波器的设计过程,并阐述了脉冲响应不变法与双线性变换法的特点,给出了多个利用MATLAB设计IIR数字滤波器的例题。

第5章首先讨论了有限脉冲响应(FIR)数字滤波器的时域特性和频域特性,重点介绍了线性相位FIR数字滤波器的设计方法,即窗口法和频率取样法,并简单介绍了FIR数字滤波器的优化设计方法,给出了利用不同设计方法由MATLAB设计FIR数字滤波器的例题,分析了不同设计方法中的误差原因,比较了各设计方法的优越性。

第6章简要介绍了随机信号的特征描述,重点介绍了经典功率谱估计的基本原理和改进方法,在此基础上,简要介绍了现代功率谱估计的基本原理和基本方法,并给出了利用MATLAB进行随机信号功率谱估计的例题。

第7章主要介绍了IIR和FIR数字滤波器的基本结构,并分析了有限字长对信号处理和系统实现可能产生的影响,利用MATLAB讨论了数字滤波器在不同结构下的有限字长效应。

第8章简要介绍了多速率信号处理的基本概念,从频域讨论了在离散域实现信号的抽取和内插的基本原理,并简要介绍了多速率信号处理中半带滤波器和两通道滤波器组的基本设计方法。

第9章在讨论信号傅里叶变换的基础上,引入了信号短时傅里叶变换,根据信号展开的理论引入了信号小波变换,从多分辨分析(MRA)的角度阐述了信号小波变换的数学概念,从滤波器组的角度分析了信号小波变换的物理概念,从信号时频分析的角度展现了信号小波变换的工程概念,并给出了许多基于MATLAB的信号小波变换及应用的例题,以加深理解信号小波分析的理论和方法。

本书由陈后金主编,第1、4、5、8章由薛健执笔,第6、7章由胡健执笔,陈后金执笔第2、3、9章,并对全书进行了整理和统稿。郝晓莉提供了部分素材,钱满义和高海林也给予了许多帮助。本书由北京交通大学吴湘淇教授审阅,并提出了许多具体建议,在此深表感谢。

限于编者水平,书中错误及不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2004年5月

于北京交通大学电子信息工程学院

目 录

第 1 章 离散信号与系统分析基础	1
1.1 离散时间信号	1
1.2 离散时间系统	9
1.3 离散时间信号的频域分析	16
1.4 离散系统的频域分析	32
1.5 双边 z 变换	39
1.6 系统函数	48
1.7 全通滤波器与最小相位系统	56
1.8 信号的抽样	60
1.9 离散信号和系统分析的 MATLAB 实现	69
1.10 习题	79
第 2 章 离散傅里叶变换	92
2.1 有限长序列的傅里叶分析	92
2.2 离散傅里叶变换的性质	100
2.3 离散傅里叶变换与 z 变换的关系	108
2.4 利用 DFT 计算线性卷积	109
2.5 利用 DFT 分析连续非周期信号的频谱	115
2.6 利用 MATLAB 实现信号 DFT 的计算	127
2.7 习题	131
第 3 章 离散傅里叶变换快速算法	135
3.1 基 2 时间抽取 FFT 算法	136
3.2 基 2 频率抽取 FFT 算法	143
3.3 实序列的 DFT 计算	146
3.4 IDFT 的快速计算方法	148
3.5 基 4 - FFT 算法	149
3.6 线性调频 z 变换算法	153
3.7 习题	158
第 4 章 IIR 数字滤波器的设计	160
4.1 模拟低通滤波器设计	161
4.2 模拟域频率变换	176

4.3	脉冲响应不变法	185
4.4	双线性变换法	190
4.5	用 MATLAB 实现滤波器设计	195
4.6	习题	206
第 5 章	FIR 数字滤波器的设计	211
5.1	线性相位 FIR 滤波器的特性	211
5.2	窗函数法设计 FIR 滤波器	220
5.3	频率取样法设计线性相位 FIR 滤波器	232
5.4	线性相位 FIR 滤波器的优化设计	236
5.5	利用 MATLAB 实现 FIR 滤波器设计	244
5.6	习题	259
第 6 章	功率谱估计	266
6.1	随机信号的特征描述	266
6.2	平稳随机序列通过 LTI 离散时间系统	270
6.3	经典功率谱估计	273
6.4	现代谱估计	285
6.5	随机信号功率谱估计的 MATLAB 实现	297
6.6	习题	302
第 7 章	数字系统的结构	305
7.1	IIR 数字滤波器的基本结构	305
7.2	FIR 数字滤波器的基本结构	310
7.3	格型结构	314
7.4	数字滤波器结构的 MATLAB 实现	320
7.5	有限字长效应	323
7.6	习题	338
第 8 章	多速率信号处理基础	341
8.1	多速率系统中的基本单元	341
8.2	抽取滤波器和内插滤波器	347
8.3	多相分解	354
8.4	半带滤波器	357
8.5	两通道滤波器组	361
8.6	习题	372
第 9 章	信号时频分析与小波分析	376
9.1	短时傅里叶变换	376
9.2	小波展开与小波变换	378

9.3 小波变换与多分辨分析	379
9.4 小波变换与滤波器组	389
9.5 基于小波的信号处理与应用	398
9.6 利用 MATLAB 实现信号小波分析	402
部分习题参考答案	416
参考文献	423

第 1 章

离散信号与系统分析基础

离散时间信号与系统分析的基本理论是数字信号处理的基础,本章首先介绍离散时间信号的时域描述,以及线性时不变离散时间系统的时域特性。在离散信号与系统时域分析的基础上,重点介绍了离散时间周期信号的频域分析、离散时间非周期信号的频域分析以及线性时不变离散时间系统的频域特性。本章最后还介绍了离散时间信号的 z 域分析线性时不变离散时间系统的系统函数。此外简单介绍了简单的数字滤波器、全通滤波器和最小相位系统。

1.1 离散时间信号

人们日常生活中会遇到各种信号,如语音信号、音乐信号、静止图像信号、视频信号等,通常可将信号表示为一个或多个变量的函数。如语音信号可表示为空间某一点空气压强随时间变化的函数 $x(t)$,静止的黑白图像信号可表示为亮度随空间位置变化的函数 $B(x, y)$ 。

在信号的定义中,自变量可以是连续变量,也可是离散变量。自变量为连续的信号称为连续时间信号,自变量为离散的信号称为离散时间信号。离散时间信号可以通过对连续信号的抽样获得,也有信号本身就是离散的,如电话交换机在单位时间内收到的电话呼叫次数,计算机产生的离散序列等。

通用的计算机或专用的 DSP(Digital Signal Processing) 芯片在表示离散信号的幅度时,只能利用有限的二进制位数来表示,所以实际离散时间信号的幅度值只能取有限个离散值。在幅度上只能取有限个离散值的离散时间信号称为数字信号(digital signal)。本书只在有限字长效应一节中讨论离散时间信号幅度量化的影响。

离散信号 $x[k]$ 可以用图形来表示,如图 1-1 所示。横轴为 k ,只有 k 为整数时 $x[k]$ 才有定义。纵向线段的长短表示信号幅度的大小。

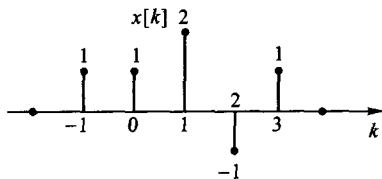


图 1-1 离散信号的图形表示

图 1-1 所示的离散信号也可表示为

$$x[k] = \{1, 1, 2, -1, 1; k = -1, 0, 1, 2, 3\}$$

或

$$x[k] = \{1, \overset{\uparrow}{1}, 2, -1, 1\}$$

上式中的箭头表示序列 $k=0$ 所在位置。若没有特别说明,约定 $k=0$ 为起点。

1.1.1 常用序列

在研究离散时间信号和系统时,经常需要将一个复杂的离散时间信号表示为一组基本序列的线性组合。所以基本离散序列在离散时间信号和系统的分析中起着非常重要的作用。下面将分别介绍这些常用的基本离散序列。

1. 单位脉冲序列

单位脉冲序列定义为

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

单位脉冲序列的波形如图 1-2(a) 所示。位移了 n 个样本点的单位脉冲序列为

$$\delta[k-n] = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

图 1-2(b) 画出了 $\delta[k+2]$ 波形。

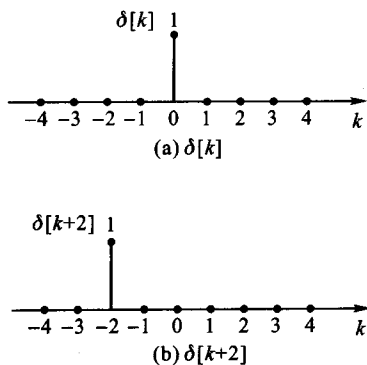


图 1-2 单位脉冲序列及其位移

对图 1-1 所示序列,可用单位脉冲序列表示为

$$x[k] = \delta[k+1] + \delta[k] + 2\delta[k-1] - \delta[k-2] + \delta[k-3]$$

一般地,任意序列 $x[k]$ 可用单位脉冲序列表示为

$$x[k] = \sum_n x[n] \delta[k-n] \quad (1-2)$$

式(1-2)中的求和范围是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。本书中如果求和上下限没有明确写出,则表示求和范围是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。

2. 单位阶跃序列

如图 1-3 所示,单位阶跃序列定义为

$$u[k] \textcircled{1} = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

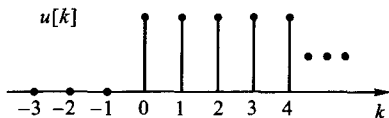


图 1-3 单位阶跃序列

单位阶跃序列和单位脉冲序列的关系为

$$u[k] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[k-n] \quad (1-4)$$

$$\delta[k] = u[k] - u[k-1] \quad (1-5)$$

3. 矩形序列

长度为 N 的矩形序列定义为

$$R_N[k] = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-6)$$

矩形序列的波形如图 1-4 所示。

矩形序列可用单位脉冲序列或单位阶跃序列表示为

$$R_N[k] = u[k] - u[k-N] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[k-n] \quad (1-7)$$



图 1-4 矩形序列

4. 指数序列

指数序列定义为

$$x[k] = \alpha^k, k \in \mathbb{Z} \quad (1-8)$$

式中 \mathbb{Z} 表示整数的集合。

有界序列是指一个序列的每一个样本的幅度都小于一个有限的正数,即

$$|x[k]| \leq M_x < \infty, k \in \mathbb{Z} \quad (1-9)$$

上式中 M_x 是一个与 k 无关的常数。由有界序列的定义可知,式(1-8)定义的指数序列仅当 $\alpha = \pm 1$ 时才是有界序列。 α 取其他值时,式(1-8)定义的指数序列都是无界序列。右边指数序列定义为

$$x[k] = \alpha^k u[k] \quad (1-10)$$

注:① $u[k]$ 在有些教材中也被写为 $\varepsilon[k]$ 。

当 $|\alpha| \leq 1$ 时,右边指数序列是有界序列。

5. 余弦型序列

余弦序列定义为

$$x[k] = A \cos(\Omega_0 k + \phi), k \in \mathbb{Z} \quad (1-11)$$

式中 A 是余弦序列的幅度, Ω_0 是余弦序列的角频率,单位是弧度或弧度/样本, ϕ 是余弦序列的初始相位。

如果存在一个正整数 N ,使得

$$x[k] = x[k + N], k \in \mathbb{Z} \quad (1-12)$$

则称序列是一个周期为 N 的周期序列。满足式(1-12)的最小的 N 称为序列的基本周期(fundamental period)。

下面分析余弦序列是否为周期序列。若余弦序列是周期序列,则由周期序列的定义有

$$A \cos(\Omega_0 k + \phi) = A \cos(\Omega_0 k + \Omega_0 N + \phi) \quad (1-13)$$

由余弦函数的性质可知,当 Ω_0 满足

$$\Omega_0 N = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

时,式(1-13)中的等式才成立。所以余弦序列为周期序列是有条件的。仅当 $\Omega_0/2\pi$ 为有理数时,余弦序列才是周期序列。由此推出,如果

$$|\Omega_0|/2\pi = m/N \quad (1-14)$$

则余弦序列的(基本)周期为 N 。其中 N, m 是不可约的正整数。

例 1-1 试确定余弦序列 $x[k] = \cos(\Omega_0 k)$ 的基本周期 N 。

- (a) $\Omega_0 = 0$; (b) $\Omega_0 = 0.1\pi$; (c) $\Omega_0 = 0.2\pi$;
 (d) $\Omega_0 = 0.8\pi$; (e) $\Omega_0 = 0.9\pi$; (f) $\Omega_0 = \pi$ 。

解:(a) $\Omega_0/2\pi = 0/1$,故信号的基本周期为 $N = 1$;

$$(b) \Omega_0/2\pi = 0.1/2 = 1/20, \quad N = 20;$$

$$(c) \Omega_0/2\pi = 0.2/2 = 1/10, \quad N = 10;$$

$$(d) \Omega_0/2\pi = 0.8/2 = 2/5, \quad N = 5;$$

$$(e) \Omega_0/2\pi = 0.9/2 = 9/20, \quad N = 20;$$

$$(f) \Omega_0/2\pi = 1/2, \quad N = 2。$$

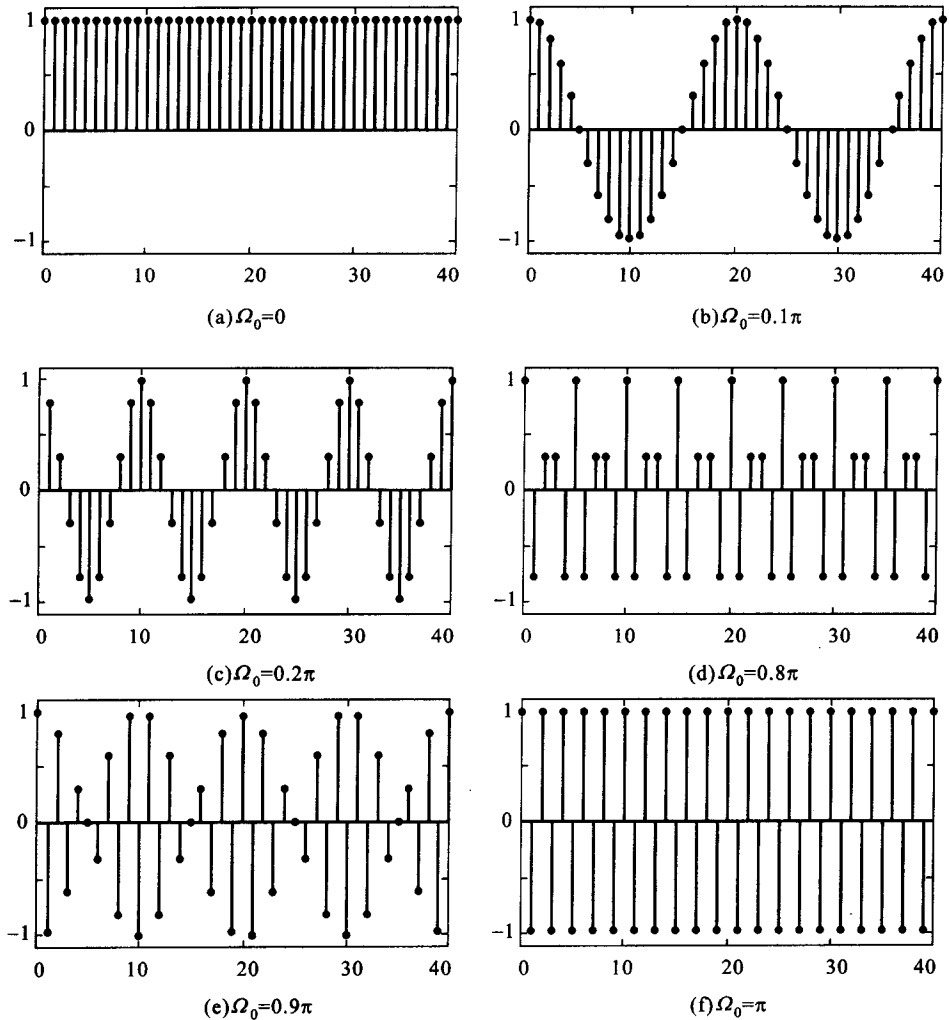
由上述结果可知,随着角频率 Ω_0 的增加,余弦序列的周期不一定变短。

图 1-5 画出了上述余弦序列的波形。由图可见,当角频率 Ω_0 从 0 增加到 π 时,余弦序列幅度的变化在逐渐加快,即信号的频率在不断的提高。

由三角公式有

$$\cos[(2\pi - \Omega_0)k] = \cos(\Omega_0 k)$$

故当 Ω_0 从 π 增加到 2π 时,余弦序列幅度的变化逐渐变慢,即信号的频率在不断地下降。所以角频率 π 是余弦序列最高频率。角频率在 π 附近的余弦序列

图 1-5 余弦序列 $x[k] = \cos(\Omega_0 k)$ 的波形

是幅度变化比较快的信号,称之为高频信号。角频率在 0 或 2π 附近的余弦序列是幅度变化较为缓慢的信号,称之为低频信号。

由于三角函数的性质

$$\cos[(\Omega_0 + 2\pi n)k] = \cos(\Omega_0 k) \quad n \in \mathbb{Z}$$

即两个余弦序列的角频率相差 2π 的整数倍时,所表示的是同一个序列。所以一般地,我们将角频率在 π 的偶数倍附近的余弦序列称为低频信号,角频率在 π 的奇数倍附近的余弦序列称为高频信号。由于 Ω_0 的周期特性,在实际中常将 Ω_0 限制在区间 $[-\pi, \pi)$ 或 $[0, 2\pi)$ 。

6. 虚指数序列(单频序列)

角频率为 Ω 的虚指数序列定义为

$$x[k] = e^{j\Omega k}, k \in \mathbb{Z} \quad (1-15)$$

虚指数序列有和余弦序列类似的性质。如 $\Omega/2\pi$ 为有理数时,虚指数序列才是周期序列。角频率相差 2π 整数倍的虚指数序列是同一个序列。虚指数序列可看成是对角频率为 ω 的连续虚指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 以 T 为间隔抽样所得,即

$$x[k] = x(t) \Big|_{t=kT} = e^{j\omega T k} = e^{j\Omega k}$$

其中

$$\Omega = T\omega \quad (1-16)$$

上式给出了连续虚指数信号和离散虚指数序列角频率之间的关系。由于离散虚指数序列角频率相差 2π 整数倍仍是同一序列,所以不同频率的连续虚指数信号抽样后有可能对应同一离散虚指数序列。例如,连续虚指数信号的角频率为 $\omega + 2\pi n/T$, n 为一整数,抽样后的离散信号为

$$x[k] = e^{j(\omega T k + 2\pi n k)} = e^{j\Omega k}$$

即模拟信号角频率 ω 相差 $2\pi n/T$ 时,以 T 为间隔抽样后的离散信号是完全相同的。这一现象称为混叠。在信号抽样一节中将详细研究混叠问题。

由 Euler 公式,余弦型序列可用虚指数序列表示为

$$\cos(\Omega k) = \frac{1}{2}(e^{j\Omega k} + e^{-j\Omega k})$$

$$\sin(\Omega k) = \frac{1}{2j}(e^{j\Omega k} - e^{-j\Omega k})$$

1.1.2 序列的基本运算

在实际应用中,需对输入系统的离散时间信号按指定的算法进行运算,从而获取有用的信息。一般来说,这些运算可分解为若干基本运算,所以下面介绍的序列基本运算是研究和分析离散信号和系统的基础。

1. 翻转

信号的翻转是指将信号 $x[k]$ 变化为 $x[-k]$ 的运算,即将 $x[k]$ 以纵轴为中心作 180° 翻转,如图 1-6(b) 所示。

2. 位移

离散信号的位移是指将信号 $x[k]$ 变换为 $x[k-n]$ 的运算。当 $n > 0$ 时,称序列延迟(右移)了 n 个样本,如图 1-6(b) 所示。当 $n < 0$ 时,称序列超前(左移)了 $|n|$ 个样本。单位延迟器的框图如图 1-7(a) 所示。

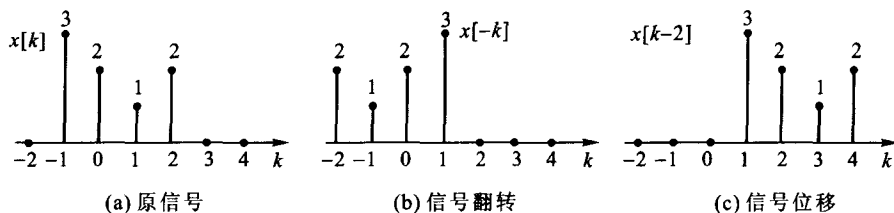


图 1-6 离散信号的翻转和位移

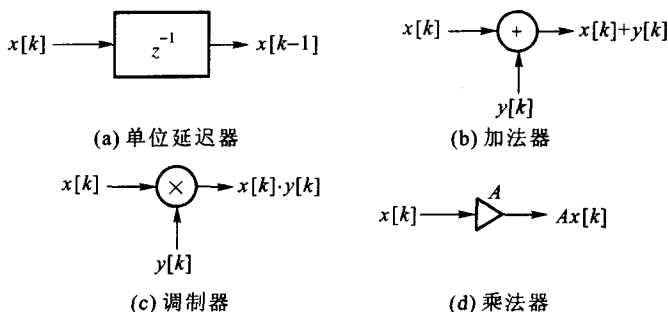


图 1-7 序列基本运算单元框图

3. 相加

离散信号的正加是指将两个离散序列序号相同的样本值相加,可表示为

$$y[k] = x_1[k] + x_2[k], k \in \mathbb{Z} \quad (1-17)$$

加法器的框图如图 1-7(b)所示。

4. 调制

离散信号的调制是指两个离散序列序号相同的样本值相乘,可表示为

$$y[k] = x_1[k] \cdot x_2[k], k \in \mathbb{Z}$$

若一个序列只在 k 的有限范围内有非零值,称之为有限长序列,反之称为无穷长序列。若 $x[k]$ 是一个无穷长序列,可将 $x[k]$ 和 $R_N[k]$ 相乘获得一个长度为 N 的有限长序列,这个过程称为加窗,称 $R_N[k]$ 为窗函数。加窗过程将在频谱分析和滤波器设计中起重要的作用。调制器的框图如图 1-7(c)所示。

5. 相乘

离散信号的相乘是指离散序列的每个样本值乘上同一常数,可表示为

$$y[k] = Ax[k], k \in \mathbb{Z} \quad (1-18)$$

乘法器的框图如图 1-7(d)所示。

6. 卷积和

两个序列的卷积和(也称卷积)定义为

$$y[k] = x_1[k] * x_2[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[k-n] \quad (1-19)$$

根据卷积和的定义,卷积和的计算可分为以下步骤:

(1) 将序列 $x_2[n]$ 翻转得 $x_2[-n]$;

(2) 对某一固定的 k , 将序列 $x_2[-n]$ 位移 k 得 $x_2[-(n-k)] = x_2[k-n]$, $k > 0$ 序列右移, $k < 0$ 序列左移;

(3) 将序列 $x_1[n]$ 与 $x_2[k-n]$ 相乘得序列 $x_1[n]x_2[k-n]$;

(4) 将乘积后序列 $x_1[n]x_2[k-n]$ 的全部样本相加得 $y[k]$;

对所有不同的 k 重复(2)到(4), 即可得两个序列的卷积和 $y[k]$ 。

例 1-2 已知 $x[k] = \{-0.5, 0, 0.5, 1; k = -1, 0, 1, 2\}$, $h[k] = \{1, 1, 1; k = -2, -1, 0\}$, 试计算 $y[k] = x[k] * h[k]$ 。

解: 卷积和的计算过程如图 1-8 所示。

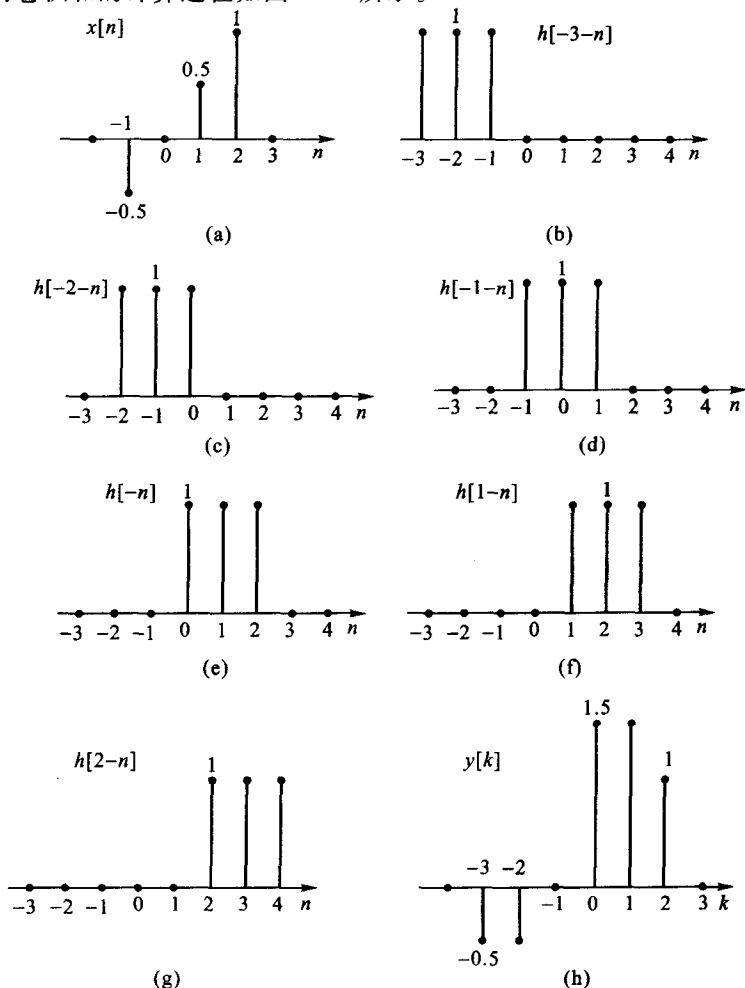


图 1-8 例 1-2 卷积和计算过程

可以证明离散卷积和具有下列基本性质:

交换律(commutative property)

$$x_1[k] * x_2[k] = x_2[k] * x_1[k]$$

结合律(associative property)

$$(x_1[k] * x_2[k]) * x_3[k] = x_1[k] * (x_2[k] * x_3[k])$$

分配律(distributive property)

$$x_1[k] * (x_2[k] + x_3[k]) = x_1[k] * x_2[k] + x_1[k] * x_3[k]$$

例 1-3 已知 $x_1[k] * x_2[k] = y[k]$, 试求 $y_1[k] = x_1[k-n] * x_2[k-m]$ 。

解: 由交换律及卷积和定义可得

$$x[k] * \delta[k-m] = \delta[k-m] * x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-m] x[k-n] = x[k-m]$$

利用上式及卷积和结合律可得

$$\begin{aligned} y_1[k] &= x_1[k-n] * x_2[k-m] = (x_1[k] * \delta[k-n]) * (x_2[k] * \delta[k-m]) \\ &= (x_1[k] * x_2[k]) * (\delta[k-n] * \delta[k-m]) = y[k] * \delta[k-(m+n)] \\ &= y[k-(m+n)] \end{aligned}$$

由本例可知, 序列的位移对卷积和结果的影响只有位移。在用计算机计算卷积和时可利用这个性质。

例 1-4 设有限序列 $x[k]$ 非零范围为 $N_1 \leq k \leq N_2$, 其非零点数为 $L_1 = N_2 - N_1 + 1$ 。有限序列 $h[k]$ 的非零范围为 $N_3 \leq k \leq N_4$, 其非零点数 $L_2 = N_4 - N_3 + 1$ 。试求序列 $y[k] = x[k] * h[k]$ 的非零范围及非零点数 L 。

解: 由卷积和定义可得

$$y[k] = x[N_1]h[k-N_1] + x[N_1+1]h[k-(N_1+1)] + \cdots + x[N_2]h[k-N_2]$$

由于 $h[k]$ 的非零范围为 $N_3 \leq k \leq N_4$, 故 $h[k-N_1]$ 的非零点范围为 $N_1 + N_3 \leq k \leq N_1 + N_4$; $h[k-N_2]$ 的非零点范围 $N_3 + N_2 \leq k \leq N_4 + N_2$ 。所以 $y[k]$ 的非零的范围为 $N_1 + N_3 \leq k \leq N_4 + N_2$, $y[k]$ 的非零点数 $L = N_4 + N_2 - (N_1 + N_3) + 1 = (N_2 - N_1 + 1) + (N_4 - N_3 + 1) - 1 = L_1 + L_2 - 1$ 。

1.2 离散时间系统

离散时间系统可对一个已知的输入序列进行处理或加工, 从而产生一个满足特定需求的输出序列。本书主要讨论单输入和单输出的离散时间系统, 如图 1-9 所示。 $x[k]$ 表示系统的输入信号, $y[k]$ 为系统的输出信号。系统的输出和输入关系表示为 $y[k] = T\{x[k]\}$ 。 $T\{\}$ 表示系统对输入信号的某种变换或映射。