湖南省数学会普及委员会编

数学奥林匹克的理论 方法 技巧

上册

要目

- 初等数论
- 多项式
- 不等式
- 覆盖

湖南教育出版社

数学奥林匹克的

理论 方法 技巧

上 册

湖 南 教 育 出 版 社

数学奥林匹克的理论、方法、技巧

上　册

欧阳维诚　周持中　杨克昌　肖果能　编著

责任编辑：郑绍辉

湖南教育出版社出版发行　（长沙展览馆路8号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：12.75　字数：280,000

1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷

印数：1—2,360

ISBN 7—5355—1095—7/G·565

定　价：3.60元

序

当今，各种层次的数学竞赛已经成为大家十分熟悉的一项智力竞赛活动，它不仅引起了广大中学师生越来越浓厚的兴趣，而且也日益得到全社会的重视，因为实践证明：数学竞赛对于促进中学数学教学、提高青少年数学水平、发现和培养人才，确实有着非常重要的作用。数学竞赛的内容虽然同样限于初等数学的各个部分，但在广度、深度上显然与一般的中学数学教学有着很大的区别。因此，为了使参赛者创造好的成绩，除了依靠广大中学师生的努力之外，还需要一支高水平的教练队伍和一套介绍解答竞赛题所需的理论、方法和技巧的读物。湖南教育出版社集中我省关心数学竞赛的有经验的专家、教授、教师，把他们长期积累起来的资料分专题整理，出版了《数学奥林匹克的理论、方法、技巧》一书，书中内容包含了传统的平面几何、组合数学以及某些高等数学的基础部分如初等数论、函数方程、多项式、不等式、图论等，与当前国际中学生数学竞赛的命题热点相吻合，这对于促进数学竞赛活动的开展，提高水平，无疑是十分有益的。

数学是一门基础学科，学习数学不仅是数学知识的积累，更重要的是数学能力的培养；而数学竞赛，归根到底，是智慧、能力和技巧的竞赛。本书的作者正是在这种认识的基础上，不但对他们所论专题的基本内容进行系统的讲述，而且特别注意思路的分析、方法的训练和技巧的培养。深入浅出而富于启发性使本书显示出自己的特色。学习数学，要有一种敢于拼搏的顽强的精神，需要付出艰辛的劳动，但随之而来的却是成功的

喜悦和数学美的感受！认真地阅读本书，你将会领略到学习和研究数学的种种甘甜辛苦。

我们中华民族从来就是一个擅长数学的民族。祖冲之、祖暅、刘徽、杨辉、沈括……，历代数学家的名字将永留史册，他们的卓越贡献将永放光彩。更可喜的是一代新人也正在茁壮成长。1986年我国首次派出六名中学生参加国际数学奥林匹克，以三个一等奖、一个二等奖、一个三等奖的成绩名列第四，一举成功。1988年的第29届国际数学奥林匹克竞赛，我国代表队又跃居第二，夺得了两枚金牌。1989年，在西德布伦内克举行的第30届数学奥林匹克，我国代表队又一举夺得了总分第一。年轻的中学生们为祖国赢得了荣誉，使我们感到欢欣鼓舞。但是也应该看到，我国现在的数学水平与国际数学发展的主流相比还有相当的差距，要在不久的将来使我国跻身于世界数学大国的行列，还需要付出极大的努力。立志献身数学的青少年同学们应该为实现这个宏伟的目标而努力奋斗！1990年的第31届国际数学奥林匹克将在中国举行，我们衷心祝愿作为东道国的我国选手再创纪录，为国争光！

侯振挺

1989.11.21.

目　　录（上册）

初等数论

多 项 式

不　等　式

覆　盖

初等数論

欧阳维诚

引　言

数论是数学中研究数的性质，特别是整数性质的分支学科。

数论是一门古老的数学分支，远在古希腊时代的欧几里得(Euclid)的《几何原本》中，就已经可以找到关于数论的论述。《几何原本》中提出了用欧几里得除法求两个自然数 a 和 b 的最大公因数的方法，证明了一个自然数可以唯一地分解为素数的积，以及存在着无穷多个素数的定理。在第9卷的最后一个命题中还提出了深刻的结论：对于给定的自然数 k，仅当 $n=2^k(2^{k+1}-1)$ 是一个完全数时，或者说，n 的所有因数之和等于 $2n$ 时，数 $2^{k+1}-1$ 是素数。丢番图(Diophantus)在公元250年左右写成的《算术》一书中，论及了包含求 $x^2-30y^2=1$ 这种类型的方程的整数解在内的许多数论问题。《算术》开创了数论的一个分支，称为"丢番图理论"，它讨论求确定的整系数代数方程的整数解的问题。在我国古代的一些数学著作，例如《九章算书》、《孙子算经》中也有不少关于数论的内容。

数论又始终是活跃着的，不断出现新问题，获得新成果的数学分支。历史上许多著名的数学家如高斯(Gauss)、欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)等都曾在数论中作出过重要的贡献。数论在理论和实践中的应用，也随着科学技术的发展而越来越广泛。在计算方法、代数编码、组合理论、近似分析中都大有用武之地，特别是电子计算机技术的发展，数论成了计算数学的有力工具。

数论根据其研究方法的不同，分为初等数论、解析数论、代数数论和几何数论。利用整数本身的性质和逻辑推理的方法

来论证数论命题的分支叫做初等数论；把一个数论问题转化为分析问题，利用数学分析、复变函数等工具来研究论证的分支叫做解析数论；整系数代数方程的根称为代数数，首项系数为1的代数方程的根称为代数整数，利用代数方法研究代数整数的性质的数论分支称为代数数论；利用几何方法研究某些数论问题的数论分支则称为几何数论。

初等数论的命题其含义往往十分明白易懂，但是其解决问题所用的方法、技巧对于学习数学却有其特殊的训练价值，所以已经越来越受到数学教学工作者的重视。历届国际数学奥林匹克的试题中，几乎都离不开初等数论的题目，而且在深度和难度上都在不断地提高。例如1988年第29届IMO试题的第六题是："证明：对于任意的自然数a、b，如果$(a^2+b^2)/(ab+1)$是整数，则一定是一个完全平方数。"试题的含义十分明白易懂，但论证起来却相当困难，得分率极低。

由于初等数论在中学数学中没有占到应有的地位，所以，参加数学竞赛的同学对于初等数论的试题感到困难很大，有时，甚至束手无策，连入门之径都找不到。本部分主要向读者介绍初等数论的有关内容。因为它不是初等数论的教科书，所以不过分追求系统性，而只着眼于通过例题来说明解题的思路、方法和技巧。

每一章的最后都附有一定数量的习题，这些习题形式简单，但解答一般并不容易，有的还需要相当的技巧。有些题目一时做不出来是不足为怪的。有人曾经说过："用以发现天才，在初等数学中再也没有比数论更好的课程了。任何学生，如能把当今任何一本数论教材中的习题做出，就应当受到鼓励，劝他将来从事数学方面的工作。"因此，我们希望，读者千万不要因为学懂了书中讲的内容却做不出书中的习题而灰心丧气，畏难而

退！而应该坚持不懈，熟能生巧，慢慢地就会逐渐掌握解题的方法和技巧了。

和所有的数论书一样，如无特别说明，本书中所用的字母都代表整数。

一、整 除 性

我们知道，两个整数 a 与 b 的和、差与积仍然是整数；但 a 与 b 的商却不一定是整数，我们就从研究两个整数的除法开始。

§Ⅰ 带余除法

为方便起见，我们假定在这一节中讨论的数都是非负整数，因为若非负整数某些性质弄清楚了，对于负整数只不过相差一个符号而已。

（一）带余除法 我们都知道下面这个称为带余除法的定理：

定理1 设n和m是两个整数，$m>0$，则存在唯一的一对整数k与r，使得

$$n=km+r \quad (0\leqslant r<m) \tag{1}$$

成立。此处k称为用m除n所得的不完全商，r叫做用m除n所得的余数。

证明：先证明k、r的存在性。用m的倍数作数列：

$$0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ \cdots \tag{2}$$

n必介于（2）中某两个数之间，即一定存在整数k，使得

$$km\leqslant n<(k+1)m$$

令 $\quad n-km=r$，则$0\leqslant r<m$

于是 $\quad n=km+r$。

再证明k、r的唯一性。假如除（1）以外，还有整数k_1与r_1，使得

$$n = k_1 m + r_1 \tag{3}$$

则由(1)式减去(3)式得

$$0 = m(k - k_1) + r - r_1$$

或者写成

$$r_1 - r = m(k - k_1).$$

在上式中，如果$k - k_1 \neq 0$，则$|m(k - k_1)| \geqslant m$，但注意到$|r_1 - r| < m$，这个矛盾证明了$k = k_1$，从而$r = r_1$。这就证明了k与r的唯一性。

（1）式虽然极端简单，但却是导出许多整数的重要性质的基础。

定义1 在(1)式中，当$r = 0$，即$n = km$时，则称m整除n，记作

$$m | n.$$

当$m | n$时，n称为m的倍数，m称为n的约数。

根据整除的定义，下列性质是很明显的

（A）若$a | b$，$b | c$，则$a | c$。

事实上，由于b是a的倍数，c是b的倍数，所以$b = k_1 a$，$c = k_2 b$，从而

$$c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_2 k_1) a.$$

因为$k_2 k_1$也是整数，所以$a | c$。

（B）若a_1，a_2，…，a_n都是b的倍数，p_1，p_2，…，p_n是n个任意的整数，则

$$b | p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \tag{4}$$

（C）如果在等式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m \tag{5}$$

中，除开某一项以外，已知其余各项都是c的倍数，那么这一项也是c的倍数。

事实上，不妨设所说的一项是b_m，因为a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_{m-1}都是c的倍数，故可设

$$a_1=p_1c,\ a_2=p_2c,\ \cdots,\ a_n=p_nc,$$

$$b_1=q_1c,\ b_2=q_2c,\ \cdots,\ b_{m-1}=q_{m-1}c.$$

则有

$$\begin{aligned}b_m&=a_1+a_2+\cdots+a_n-b_1-b_2-\cdots-b_{m-1}\\&=(p_1+p_2+\cdots+p_n-q_1-q_2-\cdots-q_{m-1})c\end{aligned}$$

因为括号内的代数和仍为整数，所以性质(C)得证。

（D）n个连续整数中有且只有一个是n的倍数。

事实上，设这n个连续整数为

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \cdots\cdots,\ a+(n-1)$$

令$a=kn+r$，因为$0\leqslant r\leqslant n-1$，若$r=0$，则$a$就是$n$的倍数；若$r\geqslant 1$，设$n-r=s$，则$1\leqslant s\leqslant n-1$，于是

$$a+s=kn+r+s=(k+1)n.$$

所以，(6)中的$a+s$是n的倍数。

（E）任何n个连续整数之积一定是n的倍数。

利用性质(A)～(E)可以解决许多有关整除的问题。

例1 设n是任意的自然数，证明$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$是整数。

证明：
$$\begin{aligned}N&=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}\\&=\frac{n^5-5n^3+4n}{5}+\frac{5n^3}{5}-\frac{4n}{5}+\frac{n^3-n}{3}+\frac{n}{3}+\frac{7n}{15}\\&=\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5}+n^3+\frac{n(n^2-1)}{3}\\&=n^3+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5}\\&\quad+\frac{(n-1)n(n+1)}{3},\end{aligned}$$

因为$5|(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$，$3|(n-1)n(n+1)$，所以，N是三个整数之和，因此N是整数。

例2 若ax_0+by_0是形如$ax+by$（x、y是任意整数，a、b是两个不全为零的整数）的数中的最小正数，则对任意的整数，都有

$$(ax_0+by_0)|(ax+by).$$

证明：由带余除法，可设

$$(ax+by)=k(ax_0+by_0)+r,\quad 0\leqslant r<ax_0+by_0$$

于是

$$r=a(x-kx_0)+b(y-ky_0)=ax'+by'$$

所以r也是形如$ax+by$形式的数。而在形如$ax+by$形式的数中，已知ax_0+by_0是最小的正数，由$0\leqslant r<ax_0+by_0$，必然$r=0$，所以

$$(ax_0+by_0)|(ax+by).$$

例3 试证明：$7|(2222^{5555}+5555^{2222})$

证明：$2222=7\cdot 318-4$

$5555=7\cdot 793+4$

所以

$$\begin{aligned}&2222^{5555}+5555^{2222}\\
&=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})\\
&\quad-(4^{5555}-4^{2222})\\
&=(2222+4)(2222^{5553}-2222^{5552}\cdot 4+\cdots)\\
&\quad+(5555-4)(5555^{2221}+5555^{2220}\cdot 4+\cdots)\\
&\quad-4^{2222}(64-1)(64^{1110}+64^{1109}+\cdots)\\
&=2226A+5551B-63C\end{aligned}$$

其中A、B、C是整数。

因为$7|2226$，$7|5551$，$7|63$，所以$7|2222^{5555}+5555^{2222}$。

许多数学竞赛的试题，常常与数的整除性有关。