著名品牌

王迈迈图书品牌

按最新大纲精神修订
与最新考研题型接轨

数学一 数学二命题分析与应试策略
高等数学 线性代数 概率论与数理统计复习指南
20套全真模拟试卷与详细解答

2006考研辅导系列

最新考研数学
数学一 数学二 辅导大全
全真模拟试题与详解

主编 张宏志

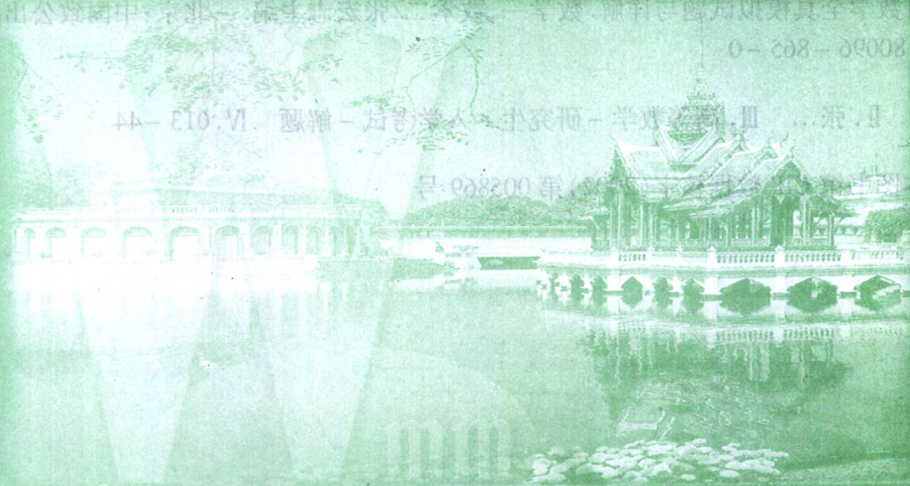
中国致公出版社

王迈迈图书品牌

按最新大纲精神修订
与最新考研题型接轨

数学一 数学二命题分析与应试策略
高等数学 线性代数 概率论与数理统计复习指南
20套全真模拟试卷与详细解答

2006考研辅导系列



最新考研数学辅导大全

数学一 数学二

全真模拟试题与详解

主编 张宏志 副主编 杨军 编者 阎国辉 张宏志 罗炜 郝梅 黄文

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新考研数学全真模拟试题与详解. 数学一、数学二/张宏志主编. -北京:中国致公出版社,2002
ISBN 7-80096-865-0

Ⅰ.最…　Ⅱ.张…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第005869号

最新考研数学全真模拟试题与详解(数学一、数学二)
中国致公出版社出版
新华书店经销
文字六〇三厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16　印张 27　字数 626 千字
2005年3月第3版　2005年3月第1次印刷
印数 1-10000 册
ISBN 7-80096-866-9/G·678
定价:30.00元

始终坚持品牌领先战略，永远提供最新、最权威的考试信息是王迈迈英语十余年来畅销全国、领军同行、傲视群雄的根本原因，也是本套考研辅导系列丛书遵循的原则。

考研辅导丛书目录

CONTENTS 目录

第一部分 最新硕士研究生入学考试数学一、数学二命题分析与应试策略

一、命题分析

1. 试卷结构分析

实行全国硕士研究生入学统一考试是目前我国招收研究生的主要方法，是评价考生能力水平的主要手段。数学统一考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用。因此，为了体现不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求，数学考试分为四个卷种，即数学一、数学二、数学三和数学四，其中数学一、数学二适合于工学各专业及管理学有关专业。

数学命题的基本原则重在考查考生能力，考试的核心是知识的基础性、综合性和交叉性。从试卷考核的知识内容上看，数学一包括三大板块，即高等数学，共有 13 题左右，分值 90，占总分的 60%；线性代数，共有 5 个小题，分值 30 分，占 20%；概率论与数理统计，共有 5 小题，分值 30 分，占 20%. 数学二包括两大板块，即高等数学，题数约 18 个，分值 120，占总分的 80%；线性代数，5 个小题，分值 30，占 20%.

从题型来说，数学一、数学二均包括三大板块，即填空题、选择题和解答题。其中填空题 6 个，分值 24，占总分的 16%；选择题 8 个，分值 32，占总分的 21.3%；解答题有 9 个，分值 94，占总分的 62.7%.

现列表如下：

数学试卷结构统计表

		高等数学	线性代数	概率论与数理统计	填空题	选择题	解答题	合计
数学一	题数	13	5	5	6	8	9	23
	分值	90	30	30	24	32	94	150
	比例	60%	20%	20%	16%	21.3%	62.7%	100%
数学二	题数	18	5	0	6	8	9	23
	分值	120	30	0	24	32	94	150
	比例	80%	20%	0	16%	21.3%	62.7%	100%

2. 题型分析

下面就上述填空题、选择题及解答题作简要分析。

填空题。填空题实际上是简单的计算题，是为了扩大试卷的覆盖面而设计的。但是，考生切勿因为填空题简单而掉以轻心。填空题的计算量少，但要求准确无误，做题的时间又不应花得多。为了将这部分的分数拿到手，应复习时养成良好的计算习惯，切忌轻视基本题的训练。

选择题。数学选择题大致可分成三类:计算性的,概念性的与推理性的。近年来,选择题减少了计算性,而加强了概念性与推理性。这就要求考生在复习时重视概念、定理、性质,甚至运算法则的理解,而不是死背条文。不但要从正面来理解,还要掌握一些反例。逻辑推理上,要弄清楚充分与必要条件的区别。条件是充分而未说是必要的,则往往可举出一些例子说明,如果条件是必要的则缺少这条件时,结论往往就可能是不正确的。做这类选择题时,切忌想当然,更换此条件仍可使结论成立。选择题要多练,看其详尽的分析。

解答题。解答题是2004年开始实施的,包括证明题、计算题、综合题、应用题等。不像填空题或选择题那样不需要写出解答过程,解答题必须给出解答过程,因此难度较大。下面分别简单论述。(1)证明题。数学一试卷中,一般有两题证明题:高等数学与线性代数各一道。数学二也有两道证明题。高等数学证明题的范围大致有:极限存在性,音调性,奇偶性,不等式,零点的存在性及个数,定积分与变限积分的不等式及零点问题,级数敛散性论证。线性代数有矩阵可逆与否的讨论,向量组线性相关与无关的论证,线性方程组无解、存在唯一解与存在无穷解的论证,矩阵可否对角化的论证,两矩阵合同、相似、等价的论证,矩阵正定性的证明,关于秩的大小并用它来论证有关问题等等.至于概率统计,证明题通常集中于随机变量的不相关和独立性,估计的无偏性等。为了做好证明题,就必须熟悉上述有关理论。例如矩阵对角化这一问题,不但要会对角化的计算,而且要掌握什么条件下对角化的理论。这些条件中,有的是充分条件,有的是充要条件。复习时,就要熟悉这些条件并做必要的练习。又如证明不等式,要注意多种题型和方法,其中有的是具体函数,有的为抽象函数,有的又以定积分或变限定积分形式出现。这就要求考生在复习时能很好地融会贯通,举一反三。(2)计算题与综合题。一份试卷,包括填空题在内,计算题或计算性质的题占80%以上。计算题中有一部分是综合题。考生在复习时,应切实加强计算训练。公式当然重要,但仅记公式是不够的。应掌握基本运算方法,熟悉典型步骤,并且要求有熟练的运算能力。有两类综合题,一是形式上的综合,采取的对策是"分解",将一题拆成几段,各个击破。计算时要特别小心,一步走错全盘皆输。数学二中有许多这样的题。另一种是内在的综合,就要从条件去挖掘内涵或抽象出本质要点,然后去运算。这类综合题,不但计算题中有,选择题与证明题中都有。(3)应用题。每一试卷都有一道应用题。考生常常感到应用题较难对付。实际上,应用题着重考查学生的建模能力,而不考查专业知识面。应用题大致有几何,物理(一般限于力学和运动学),变化率,或与日常生活有关的(例如微分方程、线性代数、概率统计中的一些应用题)等等。考生在复习时着重于量的数学描述。

二、应试策略

·把握大纲,重视基础

按照大纲准确把握数学的基本概念、基本方法、基本定理。数学是一门演绎的科学,靠侥幸押题是行不通的。只有深入理解基本概念,牢牢的记住基本定理和公式,才能找到解题的突破口和切入点。数学的概念和定理是组成数学试题的基本元件,数学思维过程离不开数学概念和定理,正确理解和掌握好数学概念、定理和方法是取得好成绩的基础和前提。

·全面复习,抓住重点,多做练习

复习安排上要注意全面复习、抓住重点、多做练习。全面复习是基础,抓住重点是关键,多做练习是重中之重。

复习的前期阶段注重在全面复习基础上,掌握重点;复习的后期阶段则是抓住重点,照顾一般。重点可分为理论重点、现实重点、考试重点三个层次。因为数学学科的特点,多多实际动手练习是非常重要的,不要光看例题,看例题时似乎懂得了很多,但在考试时仍然会感觉无从下手。不要找难题、怪题,要针对基本知识点和基本原理多做练习,体会做题的思路和原理及知识点的应用。

·做题要学会总结规律

做题到一定的阶段要注意总结,什么样的题目应该怎么做,做这种题目什么地方可能会出错,从各个角度加以归纳。不少考生都有这种困惑:很多题目看起来会做,实际动手又做不出来。出现这种情况的考生,在做题的时候不要急于看答案,自己先想一下,这个题应怎么做。如果你看完题目,马上就找答案,收获就不会大。再有一点,自己平时做题看书会发现一些容易使自己思路出错的题,不妨拿个本子摘录下来,经常翻翻。

·重视历年试题，把握考试规律

考研数学复习必须重视历年的考题，分析每年的考题。统计表明，每年的研究生入学考试高等数学内容较之前几年都有较大的重复率，有些考题或者改变某一数字，或改变一种说法，但解题的思路和所用到的知识点几乎一样。所以希望考生一是要注意年年考到的内容，对往年考题要全部消化巩固；二是注意那些多年没考到而大纲要求的内容，这样，通过对考研的试题类型、特点、思路进行系统的归纳总结，并做一定数量习题，有意识地重点解决解题思路问题。

我们还要提一点，考数学二的考生，参考一下往年数学四试卷中多元的微分和积分的考题，因为这部分考试大纲的要求跟数学四考试大纲是一样的；考数学一的同学，最好看看往年的其它类数学的真题，如经济类的概率，数二的线代等，一方面这些题目有可能难于数一的，另一方面，这些题目有可能稍作变换后就出现在后些年的数一考试中。

·通过做模拟试题发现薄弱环节

在精读复习教材或学习复习指导类书后，要开始做模拟题。做模拟题之前要先纠正观念，不要寄希望于通过做模拟题碰上真题。通过做模拟题，可增加临场应变能力，发现自己的薄弱环节，然后再反过来有目的、有重点地重新复习教材或复习指导类书。调整复习方向，模拟题到底要做多少套，应根据自己的情况而定。我们建议做15~20套高质量的模拟试题。

同时要注意一点，数学模拟练习一定要掌握时间，严格按照题目要求来作题。有的同学在练习时一看题目，觉得会作，就不作了。直接看一遍，这样是不对的，因为数学题目是按解题步骤来给分的，况且不自己动手作一遍，时间上也不好掌握。只有平时养成良好的习惯，考试的时候才能做到心中有数，不至于张皇失措。

最后，我们再来谈一下考研数学答题技巧。

先解答填空题，一般填空题是基本概念，基本运算题，得分比较容易，当然试题中计算题或证明题与平时见到过的题类似的也可以先做；其次做计算题；最后解单项选择题，因为有些单项选择题概念性非常强，计算技巧也比较高。

第二部分 最新硕士研究生入学考试 数学一、数学二复习指南

A.高等数学

第1章 函数与极限

一、考点提示与大纲要求

考点提示

1. 函数的概念及表示法；
2. 函数的有界性，单调性，周期性和奇偶性；
3. 反函数、复合函数、隐函数、基本初等函数的性质及图形，初等函数；
4. 简单应用问题的函数关系的建立；
5. 数列极限与函数极限的定义和它们的性质，函数的左、右极限和间断点的类型；
6. 无穷小(大)；无穷小的比较；
7. 极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
8. 函数连续的概念，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质。

大纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法；
2. 了解函数的奇偶性，单调性，周期性和有界性；
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形；
5. 会建立简单应用问题的函数关系式；
6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系；

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；
8. 掌握极限的性质及四则运算法则；
9. 理解无穷小，无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限；
10. 理解函数连续性的概念（含左、右连续），会判别函数间断点的类型；
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理，介值定理），并会应用这些性质。

二、题型归类与解题技巧

题型（一）　求函数的定义域

例 1　求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{lg\cos x}$ 的定义域。

解　由题可知，只有当 $\sqrt{4-x^2}$，$lg\cos x$ 同时有意义，且分母不为 0 的 x 才是 $f(x)$ 的定义域，即有

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \cos x>0\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}\\ x\neq n\pi\end{cases}\quad(n=0,\pm1,\cdots)$$

则上述不等式组的解集为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

故 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

例 2　设 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$ 的定义域。

解　由于 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，从而分别考虑 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 的定义域再解联立不等式。

由题设有

$$\begin{cases}-1\leqslant x+a\leqslant 1\\ -1\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a-1\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

由于 $a>0$. 因此当 $a-1<1-a$ 即 $a<1$ 时，定义域为 $[a-1,1-a]$，当 $a-1>1-a$ 即 $a>1$ 时，定义域为空集 $\varnothing$. 当 $a-1=1-a$ 即 $a=1$ 时，定义域为 $x=0$.

例 3　(1) 设 $f(x)=e^{\arcsin x}$，又 $f[g(x)]=x-1$，求 $g(x)$ 的表达式及定义域；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x\ ,x>0,\\ 1+x\ ,x\leqslant 0;\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}-x^2\ ,x>0\\ x\ ,x\leqslant 0\end{cases}$　求 $g[f(x)]$ 及其定义域。

解　(1) 由等式 $f[g(x)]=e^{\arcsin g(x)}=x-1$，解等 $g(x)=\sin[\ln(x-1)]$，又由表达式可知，应有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\ln(x-1)\leqslant\frac{\pi}{2}\quad 且\ x-1>0$$

得定义域为　$1+e^{-\frac{\pi}{2}}<x<1+e^{\frac{\pi}{2}}$.

(2) $g[f(x)]=\begin{cases}-[f(x)]^2\ ,f(x)>0\\ f(x)\ ,f(x)\leqslant 0\end{cases}$

若 $f(x)>0$，当 $x>0$ 时，则 $f(x)=x>0$. 从而 $g[f(x)]=-x^2$；当 $-1<x\leqslant 0$ 时，则 $f(x)=1+x>0$，从而 $g[f(x)]=-(1+x)^2$.

若 $f(x)\leqslant 0$，当 $x\leqslant -1$ 时，则 $f(x)=1+x\leqslant 0$，从而 $g[f(x)]=1+x$.

综上所述得

$$g[f(x)]=\begin{cases}-x^2\ ,x>0\\ -(1+x)^2\ ,-1<x\leqslant 0.\\ 1+x\ ,x\leqslant -1\end{cases}$$

【技巧点拨】 1. 熟记基本初等函数的定义域和值域；2. 求解较复杂函数的定义域，就是解各个简单函数的定义域所应满足的不等式组的解集.

题型（二）　有关函数的初等性质（奇偶性，有界性，单调性，周期性）的命题

例 4　判定下列函数的奇偶性：

(1) $y=f'(x)$. 其中 $f(x)$ 为奇函数且可导；

(2) $y=F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$. 其中 $f(x)$ 为偶函数且连续.

解　(1) 由题设有 $f(-x)=-f(x)$，又由可导得

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=f'(x)$$

故 $f'(x)$ 为偶函数.

(2) 由已知 $f(-x)=f(x)$

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令\ u=-t}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$$

故　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数。

例 5　判定函数的奇偶性：

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，又 $a>0$ 且 $a\neq 1$

$$F(x)=f(|\sin x|-2)\cdot sgn(\sin x)+\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}.$$

解　由于 a^x+a^{-x} 为偶函数，a^x-a^{-x} 为奇函数，从而它们的商 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 为奇函数. 又由于

$sgn[\sin(-x)]=-sgn(\sin x)$，即为奇函数，

而　$f(|\sin x|-2)$ 为偶函数，故 $f(|\sin x|-2)\cdot sgn(\sin x)$ 是奇函数，而两个奇函数之和仍为奇函数，故

$F(x)$ 为奇函数。

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为常数）试证　$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$　因此，取 $\varepsilon=\frac{|A|}{2}$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{|A|}{2}$$

由不等式　$|f(x)|-|A|<|f(x)-A|<\frac{|A|}{2}$

从而　$|f(x)|<\frac{3}{2}|A|$.

由题设 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数的性质可知，$\exists B$，使

$|f(x)|<B, x\in[a,x]$

取　$M=\max\left\{B,\frac{3}{2}|A|\right\}$ 则对 $\forall x\in[a,+\infty)$

恒有　$|f(x)|\leqslant M$

故　函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

例 7　函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上为（　　）.

(A) 有上界无下界

(B) 有下界无上界

(C) 有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$

(D) 有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$.

解　由题设可知 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上必有界，又因

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)>0$$

从而　$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 单调递增，所以

$2\lg\frac{1}{2}\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant 0$，故选择 (C).

例 8　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，又

$$F(x)=\int_0^x[x^{2n}-(2n+1)t^{2n}]f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $n\geqslant 1$ 为整数，就 $f(x)$ 的单调性，讨论 $F(x)$ 的单调性.

解　由已知得

$$F(x)=x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-(2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t$$

上式两端对 x 求导，得

$$\begin{aligned}F'(x)&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^{2n}f(x)-(2n+1)x^{2n}f(x)\\&=2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2nx^{2n}f(x)\\&=2nx^{2n}f(\xi)-2nx^{2n}f(x)\quad\text{其中 }\xi\text{ 在 0 与 }x\text{ 之间}\\&=2nx^{2n}[f(\xi)-f(x)]\end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 单调增加，当 $x>0$ 时，则 $0<\xi<x$

即有　$f(\xi)-f(x)<0$，于是 $F'(x)<0$

当 $x<0$ 时　则 $x<\xi<0$

即有　$f(\xi)-f(x)>0$　于是 $F'(x)>0$

因此，若 $f(x)$ 单调增加，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，在 $(-\infty,0]$ 上单调增加.

(2) 若 $f(x)$ 单调减少，类似分析可得

$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在 $(-\infty,0]$ 上单调减少.

例 9　设对一切实数 x，有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，证明 $f(x)$ 是周期函数。

证　由题设可知

$$\begin{aligned}f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]&=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}\\&=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)\end{aligned}$$

即有　$f(1+x)=f(x)$

故　$f(x)$ 是周期为 1 的周期函数。

例 10　设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$，$x=b$ 均对称 $(a\neq b)$，求证：$y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

证　依题意可知

$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$.

$$\begin{aligned}\text{从而}\quad f(x)&=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]\\&=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]\\&=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]\end{aligned}$$

因此　$f(x)$ 是周期为 $T=2(b-a)$ 的周期函数.

【技巧点拨】 1. 判断奇偶性一般用定义或者性质. 如：奇（偶）函数的代数和仍为奇（偶）函数，两个奇（偶）函数的乘积仍为偶函数，奇函数和偶函数的积（或商）仍为奇函数。

2. 判别函数的单调性常用两种方法：①直接用定义，②利用函数的导数

3. 判别周期函数一般由定义和运算性质来求解。

4. 判别函数有界性一般用定义，或闭区间上连续函数的性质，或利用存在极限，判断局部有界。

题型（三） 求反函数

例 11　求 $y=f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$ 的反函数.

解　当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2$

则　$x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$

当　$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3\in[-1,8]$.

从而　$x=\sqrt[3]{y}$

当　$x>2$ 时，$y=12x-16>8$，∀　$y>8$

由　$y=12x-16$　得 $x=\dfrac{y+16}{12}$.

因此反函数　$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8\end{cases}$

【技巧点拨】求分段函数的反函数，只需分别求出各区间段内函数的反函数即可。

例 12　求 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数

解　令 $t=\sqrt{1+4x}$ 则

$y=\dfrac{1-t}{1+t}$　于是 $t=\dfrac{1-y}{1+y}$

即　$\sqrt{1+4x}=\dfrac{1-y}{1+y}$

从而　$x=\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\dfrac{y}{(1+y)^2}$

故　$y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$ 为所求反函数。

题型（四） 求复合函数

例 13　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 当|g(x)|\leqslant 1\\ 0, & 当|g(x)|>1\end{cases}$

先看 $|g(x)|\leqslant 1$. 显然此时要求 $|x|\leqslant 2$，否则与 $g(x)=2$ 矛盾

从　而　$\begin{cases}|x|\leqslant 2\\ |2-x^2|\leqslant 1\end{cases}$ ⇒

$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ \{-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1\}\cup\{1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}\end{cases}$

取交集可得　$x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$

再考查　$|g(x)|>1$，其中包含两部分，$\{|g(x)|>1\}\cap\{|x|\leqslant 2\}$

或　$\{|x|>2\}$. 解第一组不等式

$\{-1<x<1\}\cap\{|x|\leqslant 2\}$

或者 $\{\{x<-\sqrt{3}\}\cup\{x>\sqrt{3}\}\}\cap\{|x|\leqslant 2\}$

即有　$x\in[-2,-\sqrt{3}]\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},2]$

解第二组不等式可得　$x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

综上所述得当 $|g(x)|>1$ 时，$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty)$

故　有　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 当x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]\\ 0, & 当x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-1,1)\cup(\sqrt{3},+\infty).\end{cases}$

例 14　设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$　求 $f(f(x))$.

解　由题设有 $f(f(x))=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2\\ 0, & |f(x)|>2\end{cases}$

当 $|x|>2$ 时，$f(x)=0$，$|f(x)|\leqslant 2$

当 $|x|\leqslant 2$ 是，$f(x)=4-x^2$

①由 $|4-x^2|\leqslant 2$ 可解得 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{6}$

$\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{6}\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$　⇒　$\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$

②由 $|4-x^2|>2$ 可解得 $|x|<\sqrt{2}$ 或 $|x|>\sqrt{6}$

$\begin{cases}|x|<\sqrt{2}\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$　⇒ $|x|<\sqrt{2}$

或　$\begin{cases}|x|>\sqrt{6}\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$　⇒无解

故有　$f(f(x))=\begin{cases}0, & |x|<\sqrt{2}\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2\\ 4-0^2, & |x|>2.\end{cases}$

题型（五） 求未定式的极限

例 15　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

解　(1)应用洛必达法则有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]'$

令　$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 则

$\ln y=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

则　$y' = y \cdot \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

从而原式 $= \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$= e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x} = -\dfrac{e}{2}.$

(2)原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})$

对前半部分应用洛必达法则有

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x\cos x+\sin x+\sin x} = \dfrac{2}{3}$

故有　原式 $= \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}) = \dfrac{4}{3}.$

【技巧点拨】对于“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限常采用如下步骤：①首先确定极限存在且不为零的因子；②利用等价无穷小代换；③运用洛必达法则。

例 16　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-1)^{\frac{1}{n}}$

解　(1)方法一

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n^2}\cdot n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}} = e.$

方法二：数列不能采用洛必达法则

令　$y = \left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$　考察 $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{洛}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2+x+1}\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right) = 1$

所以　$\lim\limits_{x\to+\infty}y = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y} = e$

特别取 $x=n\to+\infty$，则其极限也是 e.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = e.$

(2)先考察极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}.$

由于　$(x^{\frac{1}{x}})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(\dfrac{-\ln x+1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

故　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^{\frac{1}{x}})'}{x^{\frac{1}{x}}-1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{x^{\frac{1}{x}}-1} \overset{洛}{=\!=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)^2+x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1-2(1-\ln x)}{x^3}}{x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)^2+\frac{2\ln x-3}{x}}{1-\ln x} = 0.$

于是　$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

特别取 $x=n$，有

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{n}} = 1.$

【技巧点拨】1. 对于“1^∞”型常采用如下两种方法：①直接利用极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. ②取对数，应用洛必达法则。
2. 对于“0^∞”型常采用取对数的方法，应用洛必达法则。

例 17　证明：

(1)当 $a>0$ 时　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

证明　(1)当 $a>1$ 时，令 $\sqrt[n]{a} = 1+h_n$　$(h_n>0)$，

则　$a = (1+h_n)^n = 1+nh_n+c_n^2h_n^2+\dots+h_n^n \geqslant nh_n$

即　$0<h_n\leqslant\dfrac{a}{n}$　当 $n\to\infty$ 时

由两边夹逼定理可得　$\lim\limits_{n\to\infty}h_n = 0$

从而　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$

当 $a=1$ 时，显然成立.

当 $0<a<1$ 时，令 $b = \dfrac{1}{a}>1$

因　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$

从而　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

综上所述，当 $a>0$ 时　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$

(2)由于 $\sqrt[n]{n}>1$，可以令 $\sqrt[n]{n} = 1+g_n(g_n>0)$.

则　$n = (1+g_n)^n = 1+ng_n+c_n^2g_n^2+\dots+g_n^n > 1+\dfrac{n(n-1)}{2}g_n^2$

即　$n-1>\dfrac{n(n-1)}{2}g_n^2$

从而　$0<g_n^2<\dfrac{2}{n}$，令 $n\to\infty$；

由两边夹逼定理可知　$\lim\limits_{n\to\infty}g_n = 0$

故有　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

例 18　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\,dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$

解　(1)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$　(利用等价无穷小代换)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{x+\sin x}{x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{3}.$

(2)原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0^+}[\tan x\ln(\arcsin x)]}$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}[\tan x\ln(\arcsin x)]=\lim\limits_{x\to0^+}[x\ln(\arcsin x)]$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{\arcsin x}\xlongequal{t=\arcsin x}-\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin^2t}{t}=0$

故原式 $=e^0=1$.

(3)原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1+1\right)\right]$　(等价无穷小代换)

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin2t}{t}+\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos t-1}{t}$

$=2+0=2.$

故原式 $=e^2$.

(4)原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\,dt}{\frac{x^4}{2}}$　(等价无穷小代换)

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2x)\cdot2\sin x\cos x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x\cdot x}{x^3}=1.$

例 19　求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$.

解　(1)由于 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

$=2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

而 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}=0$

故原式 $=0$

(2)令 $F(t)=\ln\arctan t$, 当 $x>0$ 时,

$f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 则有

$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x=\dfrac{1}{\arctan\xi}\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}, x<\xi<x+1$

利用两边夹逼定理可得

原式 $=\dfrac{2}{\pi}$.

题型(六)　利用泰勒公式求极限

例 20　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解　由于 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\quad(x\to0)$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\dfrac{1}{12}.$

例 21　设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$, 试求 $f(0)$, $f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值。

解　由于

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$

从而由题设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ 可知

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\dfrac{f''(0)}{2}x^3+xo(x^2)\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[(1+f(0))x+f'(0)x^2+\left(\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\right]$

$=\dfrac{1}{2}$

则有　$1+f(0)=0, f'(0)=0, \dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}.$

题型（七）　求 n 项和式与乘积的极限

例 22　设 $x_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$

解　由于 $\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2n}{2n+1}$

从而 $x_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{2n}{2n+1}\overset{\triangle}{=\!=}y_n$

则有 $0<x_n^2<x_ny_n=\dfrac{1}{2n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$

由两边夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=0$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

由于 $x_n=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{2n}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{2n}\geqslant\dfrac{1}{2n}$

则 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}}\leqslant\sqrt[n]{x_n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}}=1$，$x_n^2\leqslant\dfrac{1}{2n+1}$

则 $\sqrt[n]{x_n^2}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}=1$

由夹逼定理

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

例 23　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解　方法一　令 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$

则 $\dfrac{1}{2}x_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2n+1}$

两式相减得 $\dfrac{1}{2}x_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

即 $x_n=1+\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{2n-1}{2n}$

$=3-\dfrac{1}{2^{n-3}}-\dfrac{2n-1}{2n}$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

方法二，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=s$. 令

$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}$，则

$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)(x^2)^n\dfrac{1}{x^2}$

于是 $s=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

由于 $f(x)=x+x^3+\cdots+x^{2n-1}+\cdots=\dfrac{x}{1-x^2}\quad(|x|<1)$

则 $f'(x)=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，$f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}=6$

故有 $s=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3$.

例 24　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

解　(1) 由于 $\dfrac{1}{n^{3/2}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})$

$=\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{i}{n}}$

这个和式可看作 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分和，根据定积分的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{i}{n}}=\int_1^1\sqrt{x}\,dx=\dfrac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$

故原式 $=\dfrac{2}{3}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]}$

$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}$

$=e^{2\ln2-1}=\dfrac{4}{e}$.

例 25　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{2^3\cdot3!}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n\cdot n!}\right)$

解　易见即求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{2^k\cdot k!}$

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n=s(x)$，则

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!}x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

$=x\cdot e^x+(e^x-1)=xe^x+e^x-1$

故原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^nn!}=s\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}-1$

$=\dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}-1$.

【技巧点拨】 1. 求 n 项和式的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 常用方法有：①通过恒等变形，拆项求和；②用夹逼定理；③化为积分和利用定积分的定义求极限；④利用幂级数求和法。

2. 求乘积的极限常用方法：①利用恒等变形化为极限的四则运算；②取对数后变为 n 项和式的极限。

题型(八) 利用极限存在准则求极限

例 26 设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由题设可知

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1}\quad 而\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n+1}{2n}$$

从而 $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\cdot\frac{n+1}{2n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\leqslant x_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n}$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\cdot\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{4},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{4}$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{4}$.

【技巧点拔】利用恒等变形后再适当地放大与缩小。

例 27 设 $x_1=1,x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\quad(n=2,3,\dots)$,证明数列$\{x_n\}$有极限并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明 由题设可知

$x_1=1>0$ 且 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<2$

即有 $0<x_n<2$.

故$\{x_n\}$有界,下面仅需证明$\{x_n\}$单调。

由于 $x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)$

$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

因此 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号,由题设易见

$x_2=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}>x_1=1$

从而 $x_{n+1}-x_n>0$

故 $\{x_n\}$为单调增加数列.

所以$\{x_n\}$有极限,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,

由等式 $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$两边取极限得

$$a=1+\frac{a}{1+a}$$

解得 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(不合题,舍去)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 28 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}dx$

解 由题设可知,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时

$$0\leqslant\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}\leqslant x^n$$

从而 $0\leqslant\int_0^1\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}dx\leqslant\int_0^1x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n\sin^3x}{1+\sin^3x}dx=0.$$

例 29 设 $a_i\geqslant0\quad(i=1,2,\dots)$证明数列

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$有极限。

证明 由题设,由于

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$
$$=\frac{(1+a_n)-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$
$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})(1+a_n)}$$

因此 $$x_n=\left(1-\frac{1}{1+a_1}\right)+\left[\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\qquad(*)$$

由已知 $a_i\geqslant0\quad(i=1,2,\cdots),x_n>0$

由$(*)$式可知 x_n 单调增加且 $x_n<1$

从而 $0<x_n<1$,由于单调有界数列必有极限

因此数列$\{x_n\}$有极限。

【技巧点拔】对于递推数列,常从单调和有界两个方面加以证明。

题型(九) 由函数方程求函数

例 30 设$f(x)$满足方程 $af(x)+bf\left(-\frac{1}{x}\right)=\sin x$,其中 $|a|\neq|b|$.求$f(x)$.

解 由题设

$$af(x)+bf\left(-\frac{1}{x}\right)=\sin x\qquad①$$