

潘仲明 王跃科 杨 俊 编著

现代测控理论基础

——信号分析、处理与参数估计

国防科技大学出版社

现代测控理论基础

——信号分析、处理与参数估计

潘仲明 王跃科 杨 俊 编著

国防科技大学出版社

·湖南长沙·

内容简介

本书比较全面地介绍了现代信号处理的基本理论、方法,内容包括波形与频谱分析及随机数据处理、检测系统与匹配滤波器、参数估计、自适应滤波器、AR谱分析、小波分析与算法。每章配有例题和习题,大都涉及到应用 Matlab 工具箱进行系统分析、建模与仿真。

本书可作为高校仪器科学与自动化技术专业研究生的教材,也可供从事测量、检测与自动控制工作的有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代测控理论基础/潘仲明,王跃科,杨俊编著. —长沙:国防科技大学出版社, 2004.3

ISBN 7-81099-056-X

I. 现… II. ①潘…②王…③杨… III. 预测控制-基础理论 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 015636 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

E-mail: gkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:耿 筠 责任校对:徐 飞

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×960 1/16 印张:15 字数:277 千

2004 年 3 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-3000 册

ISBN 7-81099-056-X/TP·4

定价:22.00 元

前 言

随机数据处理、参数估计、自适应滤波、波形和频谱分析以及时频分析,是现代信息科学技术中正在迅速发展和具有广阔应用背景的边缘学科。通常,这些技术理论与方法统称为“信号处理”或“现代信号处理”。在动态测试、检测技术、系统辨识、图像处理、智能机器人、信号分析与故障诊断、导航定位与测控以及过程监控等几乎所有的工程技术专题中,信号处理技术都得到了卓有成效的应用。

当前,与信号处理相关的新概念、新算法不断产生,信号处理技术的发展正面临着众多的新课题。限于学时与篇幅,不可能由一本教科书来表述信号处理领域中的各个议题。为此,作者仅仅精选了信号处理中一些最常用的基本内容,作为仪器科学与自动化技术学科的研究生教材,并力图把这些基本内容讲深讲透。考虑到“测”与“控”是仪器科学与自动化技术学科群中最常见的关键词,为了兼顾专业导向问题,作者将本教材定为《现代测控理论基础》。

在教科书的编写过程中,要求体现“少”而“精”的原则是当前教育界的普遍认识;此外,在教学大纲中,“了解”、“理解”和“掌握”也是频繁出现的词汇。然而,能真正体现这三个词义所蕴涵的不同层次要求的专业理论教材尚不多见。所谓的“了解”,应当是指粗略地明白了某种物理或事理,即再遇到同类问题时,读者能够坦然地接受而不会感到陌生;而所谓的“理解”应该是“解”于“理”,要求读者能用“理性”的方式来演绎同类命题,或者陈述同类问题的所以然或必然;至于“掌握”,顾名思义,应该是要求读者能达到这样的一种境界——将所学的东西转化为解决实际问题的“工具”,并能够运用自如。如果上述意见不谬的话,那么,在专业理论教材中就不应当包括那些教师不好讲(或者讲不清楚)和学生听了就忘的内容。

本书的编写旨在作为现代信号处理的入门教材,全书共分六章。第一章是本书所需的主要数学基础,其基本内容包括波形、频谱和随机过程的基本理论以及随机数据的预处理方法。第二章以理想的水声信号处理为例,简要介绍最佳检测理论的基本概念。以此为基础,详尽介绍了如何应用随机过程理论推导最佳似然比检测系统,并从中引申出匹配滤波器的基本原理与作用。第三章简要

介绍了参数估计的基本概念、方法与应用实例,重点讨论了如何建立数学模型和各种类型数学模型参数的最小二乘参数估计。第四章仍以水声似然比检测系统为例,简要介绍了波形估计、维纳滤波器和自适应滤波器之间的关系,着重讨论了 LMS 自适应横向滤波器的时域算法、频域算法和约束算法与 LMS 自适应滤波器的性能测度及各种用途。第五章介绍了时间序列模型和现代谱估计的基本内容,深入讨论了 AR 谱估计器和自适应谱线增强器(ALE)的实现方法及其在水声广义似然比检测系统中的应用。第六章阐述了一维小波变换的基本原理与应用,重点讨论多分辨率分析的基本框架和双正交滤波器组的设计方法。全书注重利用 Matlab/Simulink 这一高效、便捷的软件工具,对系统进行分析、建模与仿真,给出了与本书相关的主要功能函数和编程实例;对于要求读者了解的许多其它算法与应用方面的示例,则充分利用了 Matlab Demos 的强大功能,指出这些应用示例的演示方法,以方便读者。

在本书中,作者采用了理想化的水声检测系统实例来诠释现代信号处理的基本概念,其目的是强调把数学概念从属于系统概念。因为开设本课程的目的不是为了阐述和发展“数学式”的信号处理理论,而是为了深化测控理论知识、改进解决测控技术问题的方法与技能。事实上,任何逻辑上十分严谨的数学问题答案,对于任何工程技术问题的实际“解决”,毕竟只能起“导向”的作用。此外,作者还努力多用直观的图示化方法和尽量少引进复杂的数学公式来研究信号处理问题,使读者容易接受和理解现代信号处理的基本原理,掌握应用信号处理技术分析和设计实际测控系统的要领。但是,限于作者的学识和水平,本书的选材和文字难免有不当和错误之处,敬请读者谅解并不吝赐教。

国防科技大学仪器科学与技术专业和机械电子工程专业的 2002 级研究生为本书提供了有参考价值的练习题,谨此一并深表谢意。

作者
2004 年 2 月

目 录

第一章 波形、频谱与随机数据处理

1.1 波形与频谱的基本概念	(1)
1.1.1 观测数据的波形与频谱	(1)
1.1.2 观测数据的类型与描述	(3)
1.2 平稳过程的相关函数与功率谱	(5)
1.2.1 随机过程的基本数字特征	(5)
1.2.2 平稳随机过程	(8)
1.2.3 相关函数的性质	(9)
1.2.4 功率谱及其性质	(10)
1.3 线性系统的随机信号响应	(18)
1.3.1 线性系统的相关分析法	(19)
1.3.2 线性系统辨识	(23)
1.4 平稳高斯随机过程	(24)
1.4.1 高斯过程的定义和性质	(25)
1.4.2 条件概率密度	(29)
1.5 平稳随机数据的数字处理方法	(30)
1.5.1 采样与量化	(30)
1.5.2 单个样本记录	(31)
1.5.3 两个样本记录的数字处理	(33)
1.6 观测数据准备、检验与修正	(36)
1.6.1 随机数据预处理的基本内容	(36)
1.6.2 畸变波形的反演修正	(38)
本章小结	(43)
习 题	(43)

第二章 典型检测系统的理论分析

2.1 最佳检测系统的基本概念	(45)
2.1.1 判决规则	(46)
2.1.2 检测概率、虚警概率和处理增益	(47)
2.1.3 黎曼-皮尔逊准则下的最佳检测系统	(48)
2.2 在高斯条件下的最佳检测系统	(50)
2.2.1 最佳检测系统的结构	(51)
2.2.2 最佳检测系统的信噪比计算	(54)
2.3 最佳预选滤波器和匹配滤波器的作用	(63)
2.3.1 预白滤波器	(64)
2.3.2 厄卡特(匹配)滤波器	(65)
2.3.3 匹配滤波器的性质	(68)
2.3.4 匹配滤波器的实现	(70)
本章小结	(74)
习 题	(75)

第三章 参数估计理论与应用

3.1 参数估计的评价准则	(76)
3.1.1 无偏性、有效性与相容性	(77)
3.1.2 Fisher 信息和 Cramer-Rao 不等式	(79)
3.2 基于统计分布的参数估计方法	(81)
3.2.1 Bayes 估计	(81)
3.2.2 最大似然估计	(83)
3.3 基于模型的参数最小二乘估计	(89)
3.3.1 最小二乘估计器及其统计特性	(89)
3.3.2 递推最小二乘估计	(94)
3.3.3 卡尔曼滤波器的递推算法(状态估计)	(96)
3.3.4 限定记忆的递推最小二乘估计	(97)
3.3.5 广义最小二乘估计	(100)
3.3.6 改进数值稳定性的 U-D 分解法	(101)

本章小结	(104)
习 题	(105)

第四章 维纳滤波器与自适应滤波器

4.1 多元阵似然比检测系统	(107)
4.1.1 空间处理器的结构和基阵增益	(107)
4.1.2 最佳滤波器组	(110)
4.1.3 最佳滤波器组的频率特性	(113)
4.1.4 多元阵时空统一处理与波形的相关估计	(115)
4.2 波形估计与维纳滤波器	(120)
4.2.1 信号波形的最小均方误差估计	(120)
4.2.2 信号波形无失真最小噪声估计	(124)
4.2.3 似然比检测系统与波形估计的关系	(127)
4.3 LMS 自适应横向滤波器	(128)
4.3.1 LMS 自适应滤波器	(129)
4.3.2 DFT/LMS 和 DCT/LMS 算法	(137)
4.4 LMS 自适应横向滤波器在波形估计中的应用	(143)
4.4.1 信号无失真约束 LMS 自适应滤波器	(144)
4.4.2 约束 LMS 算法	(146)
4.4.3 LMS 自适应噪声抵消器	(148)
4.4.4 自适应滤波器的物理可实现问题	(150)
本章小结	(153)
习 题	(154)

第五章 AR 谱分析与自适应谱线增强器

5.1 时间序列的参数模型与谱估计	(155)
5.1.1 三种时间序列模型及其相互联系	(155)
5.1.2 ARMA 谱估计	(157)
5.1.3 AR 谱估计	(161)
5.2 自适应谱线增强器	(166)
5.2.1 LMS 自适应谱线增强器	(167)

5.2.2 自适应谱线增强器的性能分析	(169)
5.3 谱线检测与谱线跟踪问题	(171)
5.3.1 在高斯噪声中的 DFT 谱估计器	(171)
5.3.2 ALE 权向量和输出的 DFT 谱估计器	(175)
本章小结	(178)
习 题	(178)

第六章 小波变换与应用

6.1 短时傅立叶变换与小波分析	(180)
6.1.1 短时傅立叶变换	(181)
6.1.2 连续小波分析	(183)
6.2 小波变换的特点及其基本性质	(187)
6.2.1 小波变换的反演公式	(187)
6.2.2 小波变换的基本性质	(189)
6.2.3 连续小波变换的离散化	(191)
6.3 多分辨力小波分析的基本框架	(194)
6.3.1 多分辨力信号分解与重构的基本概念	(194)
6.3.2 尺度函数和小波函数的主要性质	(200)
6.4 双正交滤波器组的设计	(204)
6.4.1 上、下采样的基本关系	(205)
6.4.2 滤波器与采样器的等效易位与分解	(207)
6.4.3 双通道多采样速率滤波器组的理想重构条件	(208)
6.4.4 双正交滤波器组与双正交小波	(212)
6.4.5 双正交线性相位滤波器组的设计	(214)
6.5 时频信号分析的 Matlab 仿真	(219)
6.5.1 短时傅立叶变换与小波变换函数	(220)
6.5.2 基于 Matlab 软件包的编程示例	(221)
本章小结	(227)
习 题	(227)
参考文献	(229)

第一章 波形、频谱与随机数据处理

波形、频谱与随机信号处理是现代信息技术的主要内容之一.从应用数学的角度来看,波形分析、频谱分析和随机信号处理的理论并不深奥,然而,能够巧妙地应用这些理论、方法来解决实际问题的初学者却很少.这是因为未经处理的实际观测信号均含有随机噪声,有时甚至含有虚假的信息.因此,要求测试人员必须具备这样的能力,即能够对测控系统的工作条件提出合理的假设,并建立恰当、符合工程实际的数学模型.这其中的许多问题涉及到实践经验与数学技巧的应用问题,许多人都承认介绍这类介于科学与技巧之间的议题是不容易的.作为一种尝试,本章力求从工程的观点来阐述波形、频谱和随机过程理论的基本原理及其应用.

1.1 波形与频谱的基本概念

波形和频谱的概念是从光学、声学 and 无线电技术中发展起来的.现代测控系统所涉及的问题很多,但归根到底是要通过数据采集、分析与处理,得到真实而可靠的数据和数学模型,以便反映被观测对象的静、动态特性或变化规律,其中,观测数据的波形与频谱分析是信号处理中具有同等重要和最常用的分析方法.

1.1.1 观测数据的波形与频谱

来源于电、磁、光、声和机械量(力、位移、速度、加速度)等各种物理对象的任何观测数据,都有一种共同的形式,即在一定的观察点或条件下,随着时间的变化,其物理参量均有一定的变化轨迹.若以时间作为横坐标,而把物理参量的幅值作为纵坐标,就可以得到一种变化的图形,称之为时域波形;若把频率作为横坐标,而将经数学处理后的各个参量(如幅值、相位、功率等)作为纵坐标,便可得到一组变化的频域波形或谱线,一般将它称为频谱.各种不同形式的波形和频谱,不同程度地反映着观测点的时变特征或动态特性.

观测数据的时域分析,一般是指对观测信号在时间域和幅值域里进行分析,简称波形分析.通过波形分析,可以得出观测信号的各种特性或关系.例如,信号

的起始时间与持续时间、波形的时间滞后、波形的畸变以及波形与波形之间的相似程度等时域特征。观测数据的频域分析,即频谱分析,是对观测信号在频率域内进行分析,分析的结果可以得到幅值谱、相位谱、功率谱和互谱密度等。谱分析是以傅立叶级数(Fourier Series)和傅立叶积分为数学基础的。频谱分析以及与之有关的相关分析、滤波分析和信号识别问题,是数据处理中的一个十分重要的环节。为了从波形或时间序列中提取有用的信息,抑制和滤除噪声,首先应分析有用信号(信息)和干扰的频率成分,然后,根据信息的物理性质或动力学特征、频谱关系和相关函数,修正观察到的数据和波形,从而取得反映客观规律的信息。

波形分析与频谱分析可以通过傅立叶变换把它们联系起来,即

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

式中, $X(\omega)$ 是 $x(t)$ 的傅立叶变换, $x(t)$ 是 $X(\omega)$ 的傅立叶逆变换。图 1-1 直观地表示了时间域和频率域观测动态信号之间的有机联系。例如,应用傅立叶级数分析某复杂的周期振动信号 $x = f(t)$, 如图 1-1(a) 所示, 则 x 可分解为许多谐波分量(见图 1-1(b)):

$$x = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + B_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + B_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots$$

而在频谱分析中,也可用傅立叶级数原理计算复合周期波形在各个频率的离散谱线(见图 1-1(c))。

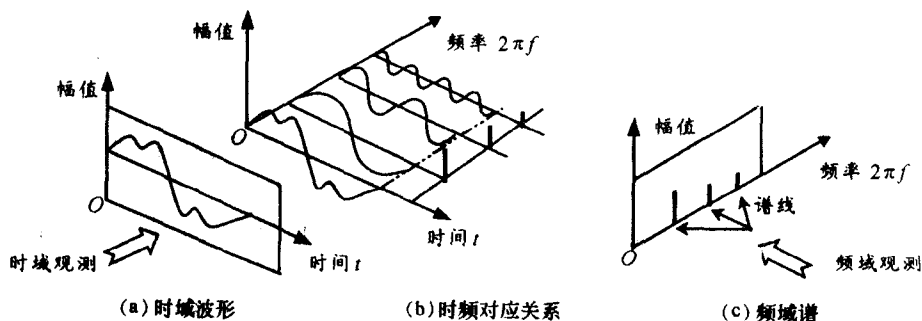


图 1-1 波形分析与频谱分析

时域分析和频域分析从两个不同的观测角度分析信号的动态特性,它们是

相互联系、缺一不可和相辅相成的。

应当强调指出,任何被测波形均有不同程度的波形畸变和失真,就像我们在“哈哈镜”中看到的形象一样。除了极少数情况以外,绝大多数观测中是看不到真实波形的,而且实际观测到的波形无法与真实波形进行比较,这样就有可能把已经“扭曲”的测试数据当做可用的结果加以应用和推广。因此,未经分析处理、修正反演而简单地根据测试波形直接求得的结果,往往会产生很大的误差,有时甚至会得出错误的结果。波形的分析与处理的目的之一就是要避免出现这种情况^[1]。

1.1.2 观测数据的类型与描述

在实践中,判断观测数据是确定性的还是随机的,通常是以测试过程能否重复产生这些数据为依据。如果一个实验,能够重复多次得到在容差范围内的“相同”数据,那么,一般可以认为这些数据是确定性的。如果不能设计一组观测实验,使重复测试产生“相同”的数据,则可认为这些数据是随机的。事实上,任何实际的测控系统都是受到噪声污染的动态系统。由于噪声过程是一种随机现象,故从实际的测控系统中所观测的数据都是随机数据。

由于我们所研究的随机过程一般都是具有统计规律的,而不是任意的随机现象,因此,我们总可以对观测数据进行分类,以便选择恰当的数学工具对观测数据进行分析 and 处理。为了便于说明各种观测数据的基本类型,我们把物理数据作为时间的函数来讨论。

观测数据可分为周期和非周期的两种类型。周期数据可分为简谐周期数据和复杂周期数据;非周期数据也可分为准周期数据和瞬变数据。下面简要地讨论这些数据类型的数学描述和例子。

(1) 简谐周期数据

简谐周期数据可用下列形式的函数来描述:

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

或

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.1.1)$$

式中, A 为振幅; $f_0 = 1/T$ 称为频率,表示谐波在单位时间内的循环数; T 为周期,表示正弦波完成一次循环所需的时间; $\omega_0 = 2\pi f_0$ 称为角频率; φ 表示相对时间原点的初始相位(弧度)。

式(1.1.1)描述了正弦或余弦的时间历程。在实践中,有很多物理现象会产生近似的简谐数据。例如,交流发电机的电压输出,偏心转子的振动等。从数据分析的角度来看,简谐数据是观测数据中最简单的形式。

(2) 复杂周期数据

复杂周期数据可用周期时变函数表示:

$$x(t) = x(t \pm kT), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.1.2)$$

与简谐周期波形一样,一个波经历的时间称为周期 T ,单位时间内基波的循环数称为基频 f_1 .显然,简谐周期波是复杂周期波的一个特例.复杂周期波可以展成傅立叶级数:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_1 t) + b_n \sin(2\pi n f_1 t)] \quad (1.1.3)$$

式中

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_1 t) dt$$

$$T = 1/f_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

复杂周期数据还可以用傅立叶级数的另一种形式表达:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \varphi_n) \quad (1.1.4)$$

式中

$$X_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

如果只考虑复杂周期数据的幅值谱,则可用图 1-2 所示的离散谱线来表示式 (1.1.4) 的幅频特性.

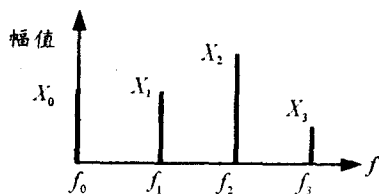


图 1-2 复杂周期数据的频谱

在实践中产生复杂周期数据的状态远多于简谐周期数据的状态.事实上,归类于简谐周期数据往往是复杂周期数据的一种近似(忽略了无穷小高次谐波分量).

(3) 准周期数据

准周期数据是一种非周期数据,可用下式表示:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi f_n t - \varphi_n) \quad (1.1.5)$$

式中, f_n/f_m ($n \neq m$) 在任何情况下都不等于有理数.当两个或多个无关联的周期性现象混合作用时,常常会出现准周期数据,如多机组内燃机车在发动机不同步时的振动响应就是一个很好的准周期数据的例子.准周期数据也可以用图 1-2 所示的离散谱线来表示它的幅值谱,其差别仅仅是各个分量的频率的比值不再是有理数的关系.

(4) 瞬变非周期数据

除了准周期以外的所有非周期信号都属于瞬变数据.瞬变数据与周期数据不同的一个重要特征,就是它不能用离散谱来表示.但在多数情况下,瞬变数据可以用傅立叶积分表示成连续谱,即

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

或

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} \quad (1.1.6)$$

其中, $|X(\omega)|$ 表示瞬变信号的幅频特性; $\theta(\omega)$ 表示瞬变信号的相频特性.

1.2 平稳过程的相关函数与功率谱

任何观测数据都可以分为确定性的和随机的两大类.其中,观测对象的变化规律,若能够用确定性函数来描述,即自变量(时间)与函数值是一一对应的,且规律保持不变,则称为确定性过程,相应的观测数据,称为确定性数据;观测数据若不能用确定性数学关系式来描述,且没有确定的变化形式,即对于自变量(时间)可取不同的函数值,则称为随机数据;表示随机现象的单个时间历程,称为样本函数;在有限时间区间上观测的数据,称为样本记录;样本函数的全体集合,称为随机过程.

1.2.1 随机过程的基本数字特征

平稳随机过程是一类应用相当广泛的随机过程,其特点是过程的统计特性

不随时间的推移而变化.严格地说,对于某一实数域(通常是指时间域 T),如果对任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 和任意实数 h , 当 $t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in T$ 时, n 维随机变量 $[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$ 和 $[x(t_1 + h), x(t_2 + h), \dots, x(t_n + h)]$ 具有相同的分布函数,则称随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 具有平稳性,并称此过程为平稳随机过程,简称平稳过程.当平稳过程的参数集 T 定义在 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 离散参数集上时,则称为平稳随机序列或平稳时间序列.

与平稳过程相反的是非平稳过程.一般情况下,当随机过程处于过渡阶段时总是非平稳的.不过在实际问题中,当仅仅考虑过程的平稳阶段时,为了方便数学处理,仍可把平稳阶段时间范围取为 $-\infty < t < \infty$.

随机过程的分布函数族能完善地刻画随机过程的统计特性,但在实际观测中,往往只能得到随机过程的部分样本,用这些样本来确定分布函数是困难的,甚至是不可能的,因而有必要引入随机过程的基本数字特征(主要是均值函数和相关函数)来描述随机过程的基本特性.下面主要围绕这些数字特征及其性质对随机过程进行讨论.

为了简化符号,在以下讨论中均将随机过程记为 $\{x(t)\}$, 而把随机变量记为 $x(t)$.

(1) 一阶矩或期望值

给定实或复随机过程 $\{x(t)\}$, 固定 t , 则 $x(t)$ 是一随机变量, 其一阶矩一般与 t 有关, 定义为

$$m_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t)] \quad (1.2.1)$$

称 $m_x(t)$ 为随机过程 $\{x(t)\}$ 的均值函数或数学期望.

(2) 二阶矩与相关函数

将实或复随机变量 $x(t)$ 的二阶原点矩和中心矩分别定义为

$$\phi_x^2(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[x^2(t)] \quad (1.2.2)$$

$$\sigma_x^2(t) = \text{var}[x(t)] \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t) - m_x(t)]^2 \quad (1.2.3)$$

并分别称它们为随机过程 $\{x(t)\}$ 的均方值函数和方差函数, 其中, σ_x 称为均方差或标准差, 它表示随机变量 $x(t)$ 在 t 时刻对于原点或均值的平均偏离程度.

对于任意 $t_1, t_2 \in T$, 定义随机变量 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 的二阶原点混合矩(即自相关函数, 或简称相关函数)为

$$R_{xx}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_1)x^*(t_2)] = R_x(t_1, t_2) \quad (1.2.4)$$

式中, $x^*(t_2)$ 是 $x(t_2)$ 的复共轭. 类似地, 还可定义随机变量 $x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 的二阶中心混合矩:

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x^*(t_2) - m_x^*(t_2)]\} \\ &= C_x(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

通常,称它为随机过程 $\{x(t)\}$ 的自协方差函数,简称协方差函数。

自相关函数和自协方差函数是刻画随机过程自身在两个不同时刻的状态变量之间统计依赖关系的数字特征.上述定义的函数之间具有如下关系:

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x^*(t_2)$$

当 $t_1 = t_2 = t$ 时,上式变为

$$\sigma_x^2(t) = \psi_x^2(t) - m_x^2(t)$$

类似地,两个随机过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 的互相关函数定义为

$$R_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_1)y^*(t_2)] \quad (1.2.6)$$

而它们的互协方差函数为

$$C_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(t_1) - m_x(t_1)][y^*(t_2) - m_y^*(t_2)]\} \quad (1.2.7)$$

其中 $m_y(t)$ 是随机过程 $\{y(t)\}$ 的均值函数。

若两个随机过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 分别是为 $n \times 1$ 和 $m \times 1$ 的列向量,用上标 H 表示共轭转置,则它们的自相关函数和互相关函数可表示为

$$R_x(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(t_1)][x^H(t_2)]\}$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x(t_1)][y^H(t_2)]\}$$

式中, $R_x(t_1, t_2)$ 为 $n \times n$ 矩阵, $R_{xy}(t_1, t_2)$ 为 $n \times m$ 矩阵.相应的协方差函数和互协方差函数也是矩阵函数。

(3) 不相关,正交,独立过程

考虑两个随机过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$,如果

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= R_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y^*(t_2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

则称 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是不相关的;如果

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad (1.2.9)$$

则称 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是正交的;如果

$$p(x, y) = p(x)p(y) \quad (1.2.10)$$

其中 $p(x)$, $p(y)$ 和 $p(x, y)$ 分别表示随机变量 $x(t)$, $y(t)$ 的概率密度函数及二者的联合概率密度函数,则称两个随机变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是独立的。

上述关系很容易推广到 n 个随机过程,此不赘述。

1.2.2 平稳随机过程

由平稳过程的定义,对于任意 $t, t + \tau \in T$, 一维随机变量 $x(t)$ 和 $x(t + \tau)$ 同分布. 取 $\tau = -t$, 则有

$$m_x(t) = E[x(t)] = E[x(0)] \stackrel{\text{def}}{=} m_x = \text{常数} \quad (1.2.11)$$

同样, 随机变量 $x(t)$ 的均方值函数 ϕ_x^2 和方差函数 σ_x^2 亦均为常数. 此外, 在式 (1.2.4) 中, 令 $t_2 = t$ 和 $t_1 - t_2 = \tau$, 就有

$$\begin{aligned} R_{xx}(t + \tau, t) &= E[x(t + \tau)x^*(t)] \stackrel{\text{def}}{=} R_x(\tau) \\ C_x(t + \tau, t) &= E\{[x(t + \tau) - m_x][x^*(t) - m_x^*]\} \stackrel{\text{def}}{=} C_x(\tau) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

这表明, 平稳过程的相关函数和协方差函数仅是时间差 $\tau = (t_1 - t_2)$ 的函数, 且不随时间 t_1, t_2 的推移而变化. 显然, 当 $\{x(t)\}$ 是零均值平稳过程时, 就有

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) \quad \text{和} \quad C_x(0) = R_x(0) = \sigma_x^2$$

满足式 (1.2.11) 和 (1.2.12) 的随机过程 $\{x(t)\}$ 称为弱平稳过程或广义平稳过程; 反之, 则称 $\{x(t)\}$ 为非平稳过程. 相对地, 按分布函数定义的平稳过程称为严格平稳过程. 今后, 除特别声明外, 文中所提及的平稳过程均指弱平稳过程.

类似地, 如果 $R_{xy}(t_1, t_2)$ 只是时间差 $t_1 - t_2 = \tau$ 的单变量函数, 记为 $R_{xy}(\tau)$, 那么就称两平稳过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是平稳相关的. 平稳相关过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 的互协方差函数可写成

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x m_y^*$$

由上式可见, 当两个平稳过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 中有一个是零均值的, 那么, 互相关函数就等于互协方差函数.

前面讨论的平稳和非平稳性概念, 是指随机过程总体平均特性而言的. 如果可以用总体中的某个样本函数的时间平均来代替总体平均, 即对于任意 $\tau \in T$, 平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 中的第 k 个样本函数 $\{x_k(t)\}$ 的均值和自相关函数可分别表示成

$$m_x(k) = \bar{x}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt = m_x \quad (1.2.13)$$

$$R_x(\tau, k) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t + \tau) x_k^*(t) dt = R_x(\tau) \quad (1.2.14)$$

那么, 就称此平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 具有各态历经性或遍历性(ergodicity).