

DIANZI XINXI GONGCHENG ZHUANYE BENKE XILIE JIAOCAI

ZIDONG KONGZHI YUANLI

10011010010010010100101100101010100011110101010100101100010010100
1001101001001001010010110010101010001111010101001011000100101000
10011010010010010100101100101010101000111101010101001011000100101000
10011010010010010100101100101010101000111101010101001011000100101000
100110100100101010101001011

重庆大学出版社

自动控制原理

主 编 郑有根

副主编 陈 以 傅晓林

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是为贯彻教育部“十五”教材建设规划精神而编写出版的高校本科教材之一。本教材的内容包括控制系统的数学模型、控制系统的时域分析、根轨迹法、控制系统的频域分析、控制系统的校正、非线性系统的分析、离散控制系统等,并在附录中简单介绍了 MATLAB 在自动控制理论中的应用,且配合有一定的习题。本书是电气信息类专业的《自动控制原理》课程的教材,也可供从事自动控制和工业自动化的专业科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自动控制原理/郑有根主编. —重庆:重庆大学出版社,2003.8

(电子信息工程本科系列教材)

ISBN 7-5624-2822-0

I. 自... II. 郑... III. 自动控制理论—高等学校—教材 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 045169 号

自动控制原理

主 编 郑有根

副主编 陈 以 傅晓林

责任编辑:彭 宁 版式设计:彭 宁

责任校对:廖应碧 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

自贡新华印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:14.5 字数:362 千

2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5624-2822-0/TP·416 定价:18.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有 翻印必究

前言

本书是为贯彻教育部“十五”教材建设规划精神而编写出版的高校本科教材之一。

《自动控制原理》课程是电气信息类专业的主要技术基础课。本教材的内容包括控制系统的数学模型、控制系统的时域分析、根轨迹法、控制系统的频域分析、控制系统的校正、非线性系统的分析、离散控制系统等,并在附录中简单介绍了 MATLAB 在自动控制理论中的应用。通过本书的学习应使学生掌握自动控制的基本原理和自动控制系统数学模型的建立方法。掌握分析自动控制系统的基本方法,能采用经典控制理论对实际的一些控制系统进行分析。通过对校正的学习,掌握校正装置的特性和校正控制系统的方法,为设计自动控制系统打下良好的理论基础。

为了便于教学与自学,编写力求突出重点、深入浅出,并配合有一定的习题。

考虑到各学校教学计划的差异,有些内容以“*”号标出,教学时可根据各自的需要取舍。建议使用本教材的学时数为 50~60 学时,并应配合以 4~12 学时的实验,其中应含有应用 MATLAB 解决自动控制原理的有关问题的实验内容。

全书共分 8 章。第 1、6 章、第 5 章的 5.1~5.3、5.6、5.7 节由郑有根编写;第 2 章、附录 A、B 由邓莉编写;第 4、7 章、第 3 章的 3.1~3.4 节由陈以编写;第 3 章的 3.5、3.6 节,第 5 章的 5.4、5.5 节由廖仕利编写;第 8 章及附录 C、D 由傅晓林编写。最后由郑有根对各章进行统稿。

由于编者水平有限,编写过程中可能存在不少错误和不妥之处,希望广大读者不吝指正。

编 者

2002 年 12 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 自动控制的基本原理及控制系统的分类	1
1.2 自动控制原理课程研究的内容	4
习题	4
第 2 章 控制系统的数学模型	6
2.1 控制系统的微分方程	7
2.2 传递函数	10
2.3 方块图及其简化	17
*2.4 信号流图	25
2.5 脉冲响应函数	30
习题	31
第 3 章 控制系统的时域分析法	34
3.1 典型输入和时域性能指标	34
3.2 一阶系统的动态响应	37
3.3 二阶系统的动态响应	41
3.4 高阶系统分析	50
3.5 系统稳定性分析与代数稳定判据	55
3.6 系统稳态性能分析	60
习题	66
* 第 4 章 根轨迹法	69
4.1 根轨迹的基本概念	69
4.2 绘制根轨迹的基本规则	71
4.3 控制系统根轨迹的绘制	79
4.4 利用根轨迹分析系统的动态响应	82
习题	87
第 5 章 控制系统的频域分析	90
5.1 频率特性的基本概念	90
5.2 频率特性表示法	92
5.3 系统的开环频率特性绘制	99
5.4 系统稳定性判据	103

5.5	控制系统的相对稳定性分析	109
5.6	利用开环频率特性分析系统的性能	112
5.7	系统闭环频率特性和阶跃响应的关系	115
	习题	118
第6章	控制系统的校正	121
6.1	系统设计中常用校正装置及其特性	121
*6.2	根轨迹法在系统校正中的应用	126
6.3	串联校正装置的频率特性法设计	132
6.4	反馈校正装置的频率特性法设计	139
	习题	142
*第7章	非线性系统的分析	145
7.1	非线性系统的概述	145
7.2	描述函数法	149
7.3	相平面分析法	160
	习题	167
第8章	离散控制系统	170
8.1	离散控制系统的基本概念	170
8.2	采样过程和采样定理	173
8.3	Z变换	177
8.4	离散控制系统的数学模型	186
8.5	离散控制系统的稳定性、稳态误差、动态性能分析	196
8.6	最少拍离散控制系统的设计	203
	习题	208
附录		210
附录A	常用函数拉普拉斯变换对照表	210
附录B	拉普拉斯变换基本定理	212
附录C	Z变换表	212
附录D	MATLAB 5.3 在自动控制理论中的应用简介	214
参考文献		225

第 1 章

绪 论

自动控制理论随着生产的机械化、电气化的发展而发展,在现代科学技术的诸多领域自动控制技术起着越来越重要的作用。自动控制理论是研究有关自动控制共同规律的一门科学,它是自动控制技术的基础理论,根据发展的不同阶段与内容,可分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。

现代控制理论研究多输入多输出系统,以状态空间法为主要研究方法,研究系统内部状态的运动规律。现代控制理论又向着大系统理论和人工智能等方面继续发展。

经典控制理论研究单输入单输出系统,以传递函数为系统的基本数学描述,以时域分析法、频率法、根轨迹法作为分析和设计系统的方法。经典控制理论研究系统的稳定性、动态、稳态性能及在给定指标下的系统设计。

本教材研究经典控制理论的有关问题。

1.1 自动控制的基本原理及控制系统的分类

1.1.1 自动控制的基本原理

在各种生产过程和生产设备中,常常需要使某些物理量保持恒定或按一定的规律变化。为此需对生产机械或设备进行及时的控制和调整。所谓自动控制,就是在没有人直接参与的情况下,利用控制装置使主控对象或生产过程中的某些物理量(如温度、压力、位置、速度等)按照预定的要求而变化。

下面以恒温控制系统为例说明自动控制的基本原理。

恒温控制可采用人工控制或自动控制的方法,图 1.1 表示人工控制的恒温系统。其控制过程为:由温度计测出恒温箱的实际温度与恒温箱内要求达到的温度进行比较,得出偏差,根据偏差的大小和正负进行控制。当恒温箱温度高

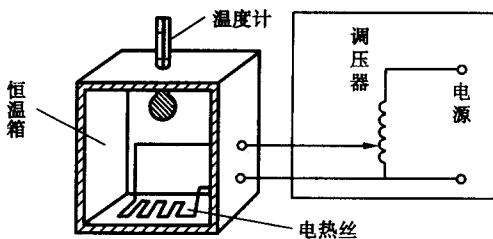


图 1.1 人工控制的恒温系统

于所要求的温度时,移动调压器可动触头减小外施电压,使箱温减小到要求的温度;若箱温低于给定温度,则移动调压器触头增大外施电压,使箱温增大到给定温度。

人工控制精度不高,人的反应不够快,不少恶劣的场合人无法参与直接控制。自动控制系统可以解决以上问题。图 1.2 为一恒温自动控制系统。

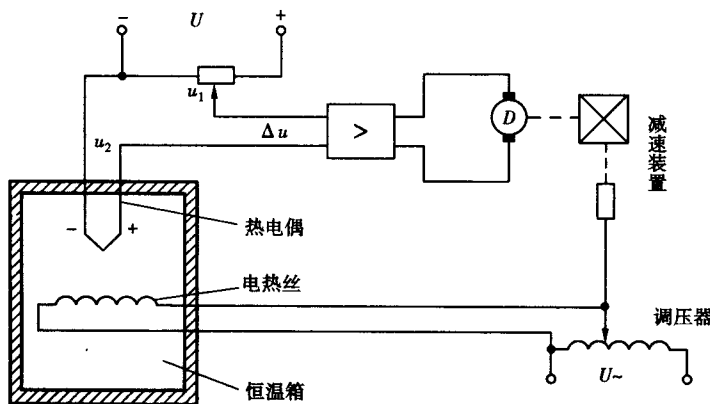


图 1.2 温度自动控制系统原理图

恒温箱的理想温度由电压 u_1 给出,热电偶检测箱温,输出电压 u_2 并反馈回去与给定电压相比较得出偏差电压 $\Delta u = u_1 - u_2$,经电压和功率放大后控制电机的速度和转向,从而改变调压器滑动触头的位置,改变恒温箱的外施电压达到恒定箱温的目的。即当恒温箱内温度偏高时,使调压器降压,反之升压,直到温度达到给定值为止。此时偏差电压 $\Delta u = 0$,电机停转。

由上面分析可知,不论是人工控制还是自动控制它们都需要检测偏差,这一偏差是由被控量的反馈值与给定值相比较产生的,它们都需要利用检测到的偏差去纠正偏差,使偏差减小或消除。这种通过检测、比较得到偏差,由偏差产生控制作用,由控制作用使偏差减少或消除的原理就是我们所研究的自动控制原理,也称反馈控制原理(一般均为负反馈)。

为了便于了解系统的结构及作用原理,可将系统用方框图图 1.3 表示。其中,控制对象为恒温箱,检测元件为热电偶,执行机构为电动机、减速装置、调压器。符号 $\otimes$ 代表比较元件。扰动量为影响被调量的各种因素(如增放被加热元件、取件时恒温箱门被打开等)。

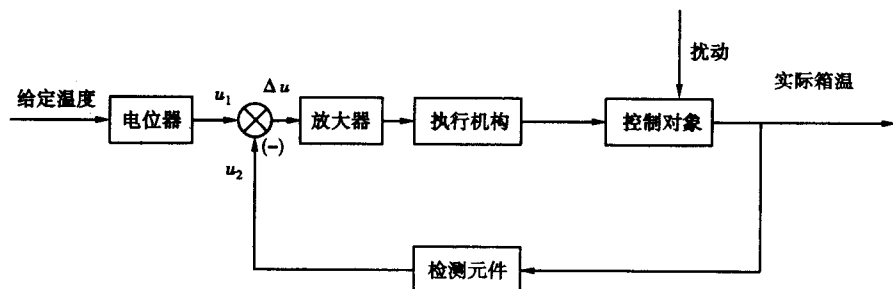


图 1.3 温度自动控制系统

1.1.2 控制系统的分类

控制系统的类型很多,它们的结构类型和所完成的任务也各不相同。控制系统从信息传

送的特点或系统的结构特点来看可分为开环控制系统和闭环控制系统,以及同时具有开环结构和闭环结构的复合控制系统。

图 1.4 所示的直流电动机调速系统为一开环系统,给定电压 u_g 经放大后得到电枢电压 u_a , 改变 u_g 可得不同的转速 n , 该系统只有输入量 u_g 对输出量 n 的单向控制作用。输出端和输入端之间不存在反馈回路。因而, 输出量 n 对输入量 u_g 没有任何影响和联系, 输出量的改变不会产生控制作用。

若在图 1.4 所示系统中利用测速发电机构成转速负反馈, 那么在负载变化的情况下可以有效地控制转速。例如负载增加造成转速下降, 造成偏差 u_e 增大, 使电枢电压升高从而使转速回升到 n 保持基本不变。图 1.5 为其原理图。

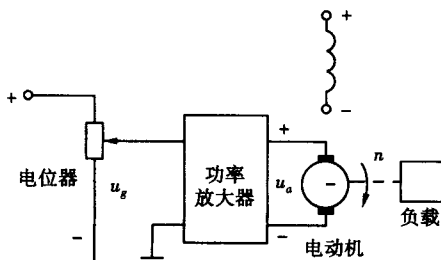


图 1.4 速度开环控制系统原理图

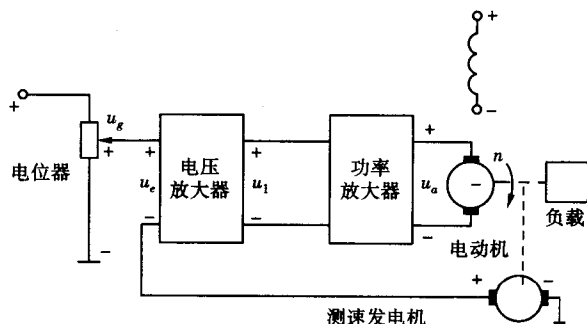


图 1.5 转速闭环控制系统原理图

闭环控制系统又称反馈控制系统或自动控制系统, 为了研究的方便可将自动控制系统按照一定的原则分成各种类型。

(1) 按输入信号的特征分

1) 恒值调节系统 该类系统的输入信号为一常数, 扰动使被控量偏离理想值而出现偏差, 该系统可利用偏差使被控量恢复到理想值或接近理想值。上述的转速闭环控制系统、恒温控制系统均属于此类系统。

2) 随动系统 这类系统的给定量是时间的未知函数, 系统能使被控量准确、快速地跟随给定量变化。随动系统又称伺服系统。火炮自动瞄准系统、船舶自动舵均属此类系统。

(2) 按描述系统的动态方程分

1) 线性系统 该类系统的特点在于组成系统的各环节的输入输出特性都是线性的, 系统的性能可用线性微分方程(或差分方程)来描述。

2) 非线性系统 该类系统的特点在于系统中含有一个或多个非线性元件。系统的性能需用非线性微分方程(或差分方程)来描述。

(3) 按信号的传递是否连续分

1) 连续系统 该类系统各环节间的信号均为时间 t 的连续函数, 其运动规律可用微分方程描述。

2) 离散系统 该类系统在信号传递过程中有一处或多处的信号是脉冲序列或数字编码, 其运动规律可用差分方程描述。数字控制系统、采样系统为离散系统。

系统还可按其参数是否随时间变化而分为定常系统或时变系统。

1.2 自动控制原理课程研究的内容

自动控制原理是一门研究自动控制共同规律的工程技术科学,是研究自动控制技术的基础理论。本门课程研究的内容可归纳为系统分析和系统设计两方面。

1.2.1 系统分析

在已知系统的结构和参数的情况下,研究系统在某种典型输入信号作用下被控量变化的全过程,以及讨论系统的性能指标与系统结构、参数的关系,这类问题叫做系统分析,即分析系统的稳定性、振荡倾向、快速性、准确性及其与系统结构、参数的关系。

1) 所谓稳定性是指系统重新恢复平衡状态的能力。稳定性的要求是系统工作的首要条件。

2) 准确性是指在调整过程结束后输出量与给定量之间的偏差大小,即最终保持的精度。稳态误差越小,表示系统的准确性越好。

3) 快速性是指当系统输入信号改变时,在控制作用下,系统由原先的平衡状态过渡到一个新的平衡状态的快速程度。

1.2.2 系统设计

分析系统的目的在于了解和认识已有的系统,并为系统设计打下基础。在给出被控对象及其技术指标要求的情况下,怎样建造一个满足技术指标要求的控制系统或改造那些控制性能未达到要求的系统,这就需要进行系统设计。设计任务往往是需要改变系统的某些参数或加入某种装置(这种附加的装置称为校正装置,这个过程称为对系统进行校正),使其满足要求的性能指标。

习 题

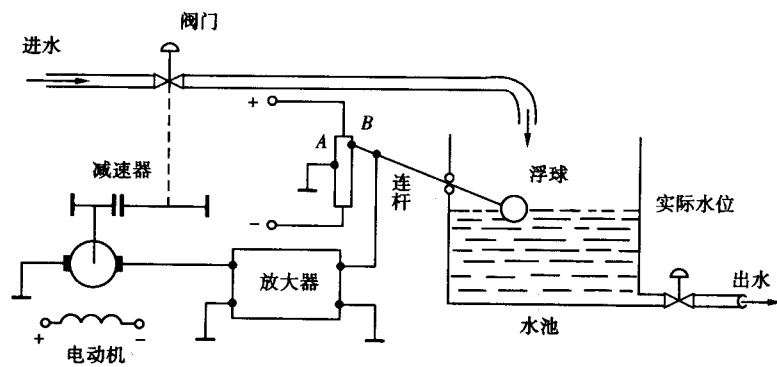
1. 试列举几个日常生活中的开环控制和闭环控制系统实例,并说明它们的工作原理,并比较开环控制和闭环控制系统的优缺点。

2. 反馈控制原理是什么?

3. 试述自动控制系统的基本组成。试述对控制系统的基本要求。

4. 试问在图 1.5 所示的转速闭环控制系统中,若测速发电机的正负极性接反了,系统能否正常工作?为什么?

5. 分析习题 5 图所示的水位自动控制系统,指出系统的输入量和被控制量,区分控制对象和自动控制器。说明控制器组成部分的作用,画出方框图并说明该系统是怎样出现偏差、检测偏差和消除偏差的。



习题5图 水位自动控制系统原理图

第 2 章

控制系统的数学模型

控制系统的数学模型就是描述系统中各变量之间关系的数学表达式。分析和设计控制系统,首先要建立它的数学模型。建立一个合理的数学模型,使其既能满足研究结果的精度要求,又能简化分析计算工作。因此,在建立系统的数学模型时,往往需要根据具体情况,对实际系统的某些次要因素作适当的简化。

控制系统可按数学模型进行分类,例如分成线性系统 and 非线性系统,定常系统和时变系统等。在控制系统分析中,线性定常系统的分析具有特别重要的意义。这不仅在于它已有一套完整的方法,也在于一部分非线性系统或时变系统,在一定的近似条件下,采用线性定常系统的研究方法仍可获得较好的准确性。

如果系统中各变量随时间变化缓慢,以至于它们对时间的变化率(导数)可以忽略不计,这些变量之间的关系称为静态关系或静态特性。静态特性的数学表达式中不含有变量对时间的导数。如果系统中的变量对时间的变化率不可忽略,这时各变量之间的关系称动态关系或动态特性,系统称为动态系统,相应的数学模型称为动态模型。控制系统中的数学模型绝大部分都是指的动态系统的数学模型。

建立系统的数学模型一般采用解析法或实验法(又称辨识)。所谓解析法就是根据系统或元件各变量之间所遵循的物理、化学等各种科学规律,用数学形式表示和推导变量的关系,从而建立数学模型。解析法又称理论建模,本章只讨论解析法。

许多表面上完全不同的系统(如机械系统、电气系统、液压系统等)却具有完全相同的数学模型。数学模型表达了这些系统的共性,所以研究透了一种数学模型,也就完全了解了具有这种数学模型的各种各样系统的特性。因此数学模型建立以后,研究系统主要指的就是研究系统所对应的数学模型,而不再涉及实际系统的物理性质具体特点。

由于系统的类别不同,所采用的分析和设计方法不同。数学模型也相应地有多种多样的形式,它们各有特长和最适用的场合。本章只介绍连续系统中的微分方程、传递函数、动态方块图、脉冲响应函数等数学模型。其他形式的数学模型,如频率特性、离散系统的数学模型等将在后面有关章节介绍。

2.1 控制系统的微分方程

控制系统中的输出量和输入量通常都是时间 t 的函数。很多常见的元件或系统的输出量和输入量之间的关系都可以用一个微分方程表示,方程中含有输出量、输入量及它们各自对时间的导数或积分。这种微分方程又称为动态方程、运动方程或动力学方程。微分方程的阶数一般是指方程中最高导数项的阶数,又称为系统的阶数。

建立系统微分方程的一般步骤或方法是:

- 1) 根据研究问题的需要,确定系统的输入和输出。
- 2) 对实际系统进行适当的简化,如将分布参数集中化、将非线性因素线性化等。
- 3) 根据系统、输入和输出三者之间动态关系的原理或定律,列写系统的微分方程。若系统比较复杂,则需分段列写微分方程,在这种情况下,必须注意各分段之间的负载效应问题。
- 4) 消去中间变量,将方程整理成标准形式,即将与输出有关的项列在等号左边,而将与输入有关的项列在等号右边,且各阶导数按降幂排列。

列写微分方程的关键是元件或系统所属学科领域的有关规律而不是数学本身。但求解微分方程需要数学工具。

下面分别以电气系统和机械系统为例,说明如何列写系统或元件的微分方程式。

2.1.1 电气系统

电气系统中最常见的装置是由电阻、电感、电容、运算放大器等元件组成的电路,又称电气网络。像电阻、电感、电容这类本身不含有电源的器件称为无源器件,像运算放大器这种本身包含电源的器件称为有源器件。仅由无源器件组成的电气网络称为无源网络。如果电气网络中包含有源器件或电源,就称为有源网络。

列写电气网络的微分方程式时都要用到基尔霍夫电流定律和电压定律,它们可用下面两式表示

$$\sum i = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum u = 0 \quad (2.2)$$

列写微分方程时还经常用到理想电阻、电感、电容两端电压、电流与元件参数的关系,它们分别用下面各式表示

$$u = Ri \quad (2.3)$$

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2.4)$$

$$u = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.5)$$

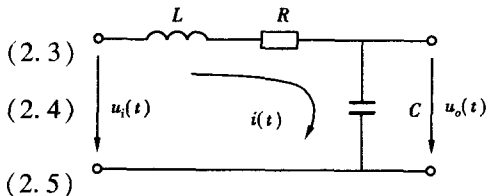


图 2.1 LRC 电路

例 1 在图 2.1 所示的电路中,电压 $u_i(t)$ 为输入量, $u_o(t)$ 为输出量,列写该装置的微分方程式。

解 设回路电流为 $i(t)$ 如图 2.1 所示。由基尔霍夫电压定律可得到

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_o(t) = u_i(t) \quad (2.6)$$

式中 $i(t)$ 是中间变量。 $i(t)$ 和 $u_o(t)$ 的关系为

$$i(t) = C \frac{du_o(t)}{dt} \quad (2.7)$$

将式(2.7)代入式(2.6),消去中间变量 $i(t)$,可得

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t) \quad (2.8)$$

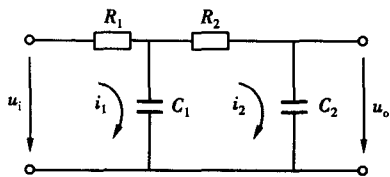


图 2.2 两级 RC 网络

式(2.8)就是所求的微分方程式。这是一个典型的二阶线性常系数微分方程,对应的系统也称为二阶线性定常系统。

例 2 图 2.2 所示为由两个 RC 电路串联而成的滤波网络。试建立输入电压 u_i 和输出电压 u_o 之间动态关系的微分方程。

解 设回路电流 i_1 和 i_2 为中间变量。根据基尔霍夫电压定律对前一回路,有

$$u_i = R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad (2.9)$$

对后一回路,有

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt = R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad (2.10)$$

且

$$u_o = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad (2.11)$$

由上三式消去中间变量 i_1 和 i_2 ,整理即得 u_i 和 u_o 之间动态关系的微分方程

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i \quad (2.12)$$

由上例明显看出,系统中后一部分对前一部分的负载效应,反映在流过前一回路电容 C_1 的电流上,没有后一回路时为 i_1 ,而当串联上后一回路则为 $i_1 - i_2$ 。从能量的角度看,负载效应就是后一回路带走了前一回路的一部分能量。从信息传递的角度看,负载效应就是系统的两个部分之间所存在的信息的内部直接反馈作用。如果在上述两个 RC 电路之间引入一个输入阻抗很高的隔离放大器,则可忽略它们之间的负载效应。这种方法在组合电路中经常采用,这也正是电气系统的一个优点。

2.1.2 机械系统

机械系统指的是存在机械运动的装置,它们遵循物理学的力学定律。机械运动包括直线运动(相应的位移称为线位移)和转动(相应的位移称为角位移)两种。

做直线运动的物体要遵循的基本力学定律是牛顿第二定律

$$\sum F = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.13)$$

式中 F 为物体所受到的力, m 为物体质量, y 是线位移, t 是时间。

转动的物体要遵循如下的牛顿转动定律

$$\sum T = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (2.14)$$

式中 T 为物体所受到的力矩, J 为物体的转动惯量, θ 为角位移。

运动的物体,一般都要受到摩擦力的作用,摩擦力 F_c 可表示为

$$F_c = F_B + F_f = f \frac{dy}{dt} + F_f \quad (2.15)$$

式中 y 为位移, $F_B = f \frac{dy}{dt}$ 称为粘性摩擦力,它与运动速度成正比,而 f 称为粘性阻尼系数。 F_f 表示恒值摩擦力,又称库仑摩擦力。

例3 一个由弹簧-质量-阻尼器组成的机械平移系统如图2.3所示。 m 为物体质量, k 为弹簧系数, f 为粘性阻尼系数,外力 $F(t)$ 为输入量,位移 $y(t)$ 为输出量。列写系统的运动方程。

解 取向向下为力和位移的正方向。当 $F(t) = 0$ 时物体的平衡位置为位移 y 的零点。该物体 m 受到四个力的作用:外力 $F(t)$, 弹簧的弹力 F_k , 粘性摩擦力 F_B 及重力 mg 。 F_k 、 F_B 向上为正。由牛顿第二定律知

$$F(t) - F_k - F_B + mg = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \quad (2.16)$$

且

$$F_B = f \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.17)$$

$$F_k = k[y(t) + y_0] \quad (2.18)$$

$$mg = ky_0 \quad (2.19)$$

式中 y_0 为 $F=0$ 、物体处于静平衡位置时弹簧的伸长量,将式(2.17、2.18、2.19)代入式(2.16)得到该系统的运动方程式

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t) \quad (2.20)$$

该系统是二阶线性定常系统。

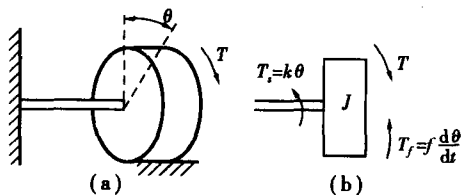


图2.4 机械旋转系统
(a)原理图 (b)分离体图

从该例还可看出,物体的重力不出现在运动方程中,重力对物体的运动形式没有影响。当取平衡点为位移的零点,并且忽略重力的作用时,列出的方程正是系统的动态方程。

例4 图2.4所示为一机械旋转系统。转动惯量为 J 的圆柱体,在矩 T 的作用下产生角位移 θ ,求该系统的输入-输出描述。

解 假定圆柱体的质量分布均匀,质心位于旋转轴上,而且惯性主轴和旋转主轴相重合,则其运动方程可写成:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum T = T - T_f - T_s \quad (2.21)$$

考虑到

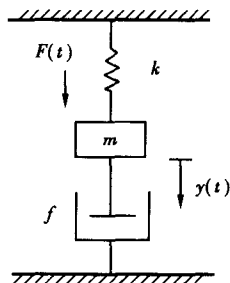


图2.3 机械平移系统

$$T_f = f\omega = f \frac{d\theta}{dt} \quad (2.22)$$

$$T_s = k\theta \quad (2.23)$$

式中 f ——粘性摩擦系数,在一定条件下可视为常数;

ω ——角速度,它是角位移 θ 对时间 t 的导数;

k ——弹性扭转变形系数,在一定条件下可视为常数。

就可得到描述输入与输出关系的微分方程

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + k\theta = T \quad (2.24)$$

以上3种不同物理系统介绍了用机理分析法推导描述系统输入与输出关系的数学模型,它常被称为机理模型。由此不难看出,系统的数学模型由其结构、参量及基本运动定律决定。

在一般情况下,描述线性定常系统输入与输出关系的微分方程如下

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = \\ b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

式中 $x(t)$ ——系统的输入量;

$y(t)$ ——系统的输出量;

a_i ——常量, $i=1, 2, \cdots, n$;

b_j ——常量, $j=0, 1, 2, \cdots, m$;

m ——输入量导数的最高阶数;

n ——输出量导数的最高阶数。

对于一些比较复杂的系统(或过程),机理模型事实上难以推导出来,或者由于过分理想化(简化),推导得到的机理模型不能如实地反映系统的运动规律,这时往往通过实验辨识法建模。实验辨识法就是利用输入、输出实验数据去建立模型的方法。

2.2 传递函数

由于微分方程的求解比较繁难,一般情况下,解析法只限于低阶微分方程,高阶微分方程需要采用数值解法。而且即使能够求解,也不便于分析系统的参数或环节对其动态过程的影响。因此,在对单变量线性定常系统的研究中,最常采用的数学模型是传递函数及以传递函数为基础的频率特性。传递函数是经典控制理论中最重要的数学模型。利用传递函数不必求解微分方程就可研究初始条件为零的系统在输入信号作用下的动态过程。利用传递函数还可研究系统参数变化或结构变化对动态过程的影响,因而使分析系统的问题大为简化。另外,还可以把对系统性能的要求转化为对系统传递函数的要求,使综合设计的问题易于实现。

2.2.1 传递函数的概念

传递函数是描述线性定常系统输入-输出关系的一种最常用的表达式,在小信号工作时,

一个非线性问题可以用线性化的方法处理。

系统的传递函数可以定义为:在所有初始条件均为零时,系统输出的拉氏变换与系统输入的拉氏变换之比。

设有一线性定常系统,其微分方程表达式为式(2.25)。假定所有的初始条件均为零,式(2.25)的拉氏变换可写为

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) X(s) \quad (2.26)$$

由此可得系统的传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.27)$$

2.2.2 传递函数的性质

1) 传递函数的定义,只是对线性系统而言,严格地说,还只是对定常系统而言。

2) 传递函数通常是复变量 s 的有理分式,其分子、分母多项式各项系数均为实数,这些系数均由系统的物理参数所确定。

3) 传递函数表征了系统本身的特性,它是系统动态性能的解析描述,它与输入激励无关,也与初始条件无关。

4) 传递函数并不是系统具体物理结构的描述,所以对于许多物理性质截然不同的系统,如机械系统、电子系统、热传导系统,都可以具有相同的传递函数。

5) 传递函数的分母多项式

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (2.28)$$

式(2.28)就是系统的特征多项式,它的阶次,也就代表了系统的阶次。

6) 传递函数分母多项式 $D(s)$ 的阶次 n ,通常高于或等于分子多项式的阶次 m ,即 $n \geq m$ 。

7) 对于实际的元件和系统,传递函数是复变量 s 的有理分式,其分子 $N(s)$ 和分母 $D(s)$ 都是 s 的有理多项式,即它们的各项系数均是实数。传递函数因式分解后,可以写成

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (2.29)$$

式中, $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 称为传递函数的零点; $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 称为传递函数的极点。

由于传递函数中,分子及分母各项系数均为实数,因此传递函数若具有复数零、极点,则其复数零、极点必然是共轭的。

注意,传递函数分子分母多项式若有公因子可以消去,传递函数变成最简单的分式,这称为零极点相消。因此,只有当式(2.27)中的分子及分母多项式间没有公因子时,传递函数的零、极点才会和系统的零、极点完全相同;分母多项式的阶次才代表系统的阶次。

8) 引入无限零、极点的概念后,可以认为系统的零、极点数目总是相等的。

m 与 n 一般是不等的,但当 $s \rightarrow \infty$ 时,有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = K \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} s^{m-n} \quad (2.30)$$

当 $n > m$ 时, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$, 可以认为 $s \rightarrow \infty$ 时,即在 s 平面的无穷远处,有 $n - m$ 个零点;同理,当 $n < m$ 时, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \infty$, 可以认为 $s \rightarrow \infty$ 时,即在 s 平面的无穷远处,有 $m - n$ 个极点。这种无穷远处的零点或极点,称为无限零点或无限极点。这样,系统或系统的传递函数的有限极