材料无损检测与安全评估

郑中兴　编著

中国标准出版社
www.bzcbs.com

材料无损检测与安全评估

郑中兴　编著

中国标准出版社

图书在版编目（CIP）数据

材料无损检测与安全评估/郑中兴编著. —北京：中国标准出版社，2003

ISBN 7-5066-3355-8

Ⅰ.材… Ⅱ.郑… Ⅲ.①工程材料-无损检验 ②工程材料-安全-评估 Ⅳ.TB303

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 124839 号

中 国 标 准 出 版 社 出 版
北京复兴门外三里河北街 16 号
邮政编码:100045
电话:68523946　68517548
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 22¾　字数 545 千字
2004 年 4 月第一版　2004 年 4 月第一次印刷

*

印数 1—3 000　定价 43.00 元
网址 www. bzcbs. com

序　言

自 1900 年 X-射线技术在法国海关开始得到应用以来，无损检测（NDT）技术的发展已历经整整一个世纪，其重要性已在全世界得到公认。NDT 技术是实现环境和公共安全的重要保证，该技术已广泛应用到航空、航天、电力、化工、铁路、汽车、冶金、核工业等国民经济的许多部门，它对保证设备安全运行、提高设备利用率和延长其使用寿命都具有非常重要的意义。近十几年以来，NDT 技术正逐步向无损评价（NDE）方向发展，除要探测物体内部或表面的各种宏观缺陷，判断缺陷位置、大小、形状和性质外，更强调能对被评价对象的固有属性、功能、状态、发展趋势（安全性和剩余寿命）等进行分析、预测和做出综合评价。NDE 是更有意义，但也是更加艰巨的一项任务。

“材料无损检测与安全评估”一书系统介绍了各种材料中的缺陷及缺陷产生原因，这对材料性能的改进、如何针对不同缺陷实施正确的无损检测方法都具有重要意义。该书在系统介绍超声、电磁、涡流等常规无损检测方法的基础理论知识和检测规程的同时，还十分详细地介绍了声发射、红外检测、激光超声、磁记忆等新的无损检测方法，并特别论述了这些方法在评估材料和构件，包括压力容器和铁道材料安全性方面的重要作用。与此同时，该书还十分详细地介绍了对材料安全有重要作用的一些前沿仪器系统，例如，P-扫描成像技术、超声-涡流一体化技术和大型集装箱透照用直线加速器技术等。

郑中兴教授长期活跃在无损检测的教学和科研第一线，为我国的无损检测事业做出了杰出贡献，其代表著作《超声波探伤原理及应用》、《无损检测新技术导论》、《射线检测》、《无损检测与评价的近代物理方法》等，一直是我国无损检测工作人员的重要参考书。郑中兴教授主持研制的“便携式全数字化超声波探伤成像仪”和“便携式全数字化超声波 P 扫描成像仪”具有国内领先技术水平，并在工程上获得广泛应用。“材料无损检测与安全评估”一书是郑教授多年耕耘的结晶，也是我国无损检测界的一笔宝贵财富。相信该书一定会成为广大无损检测技术工作者和在无损检测领域的大专院校师生和研究人员的重要参考资料。

耿荣生

全国无损检测学会七届委员会理事长

2003 年 12 月于北京

编 者 的 话

当前在我国的国防工业、航空航天、石油化工、交通运输、电力建设、机械制造、电子工业以及新材料新技术的开发等重大工程项目和重大新产品开发项目中，随着科学技术包括高新技术的大力普及和推广应用，使得“科学技术是第一生产力”这一重要论断日益深入人心，在国民经济的主战场上日新月异的改变着我国的面貌。其中对材料和构件的无损检测和安全评估技术即为其中重要内容之一，起着不可替代的作用，显得日益重要。

以无损检测和安全评估为重点，国家质量监督检验检疫总局正在大力推广一批无损检测和安全评定方面的国家标准，包括检测标准、评定方法标准和质量分级标准，并强调和国际标准接轨的重要性。

无损检测和安全评估技术是一门多方法、多学科的综合应用技术，它是在不破坏被检测对象的前提下，对各种材料、零部件和整机构件进行检验、测量、诊断分析和安全评估的科学，被称为“工业诊断学”。它的应用几乎涉及到科学研究和工程技术的一切领域，现代科学技术的许多部门都有无损检测和安全评估技术为其服务，而且越是高精尖的部门，这项技术发展得越深入。另一方面，许多科学技术的最新成就又给这项技术的发展提供了新的方法和手段。从这个意义上说，它一定程度上反映了一个国家的科学技术和工业发展的水平。这门技术除了最常用的五大常规方法即：超声、射线、电磁、渗透、涡流外，还有一大块领域是属于非常规无损检测技术。无论是采用红外热成像技术监控运行中列车车轴的升温情况，还是用声发射技术提取受压容器、导弹外壳在动态情况下产生裂纹和塑性变形时的声发射信息；无论是用激光技术检测飞机蜂窝板的粘结层、电子印刷线路板焊点的内在质量，还是采用微波技术对非金属、复合材料、陶瓷、橡胶、塑料、木材、固体推进剂的内在质量进行检查；乃至应用广泛的测定渗碳层、电镀层、腐蚀层、涂层厚度，无损测定金属的平均晶粒度和低倍组织；无损测定运动物体的速度和几何尺寸；无损测定材料的物理

量、判断材料的化学成分和材质硬度等等，均属于无损检测和安全评估的范畴。

特别是与安全评估技术相结合的无损检测新技术，如：与微电脑技术相结合的智能化和自动化检测和安全评估电站设备方面；锅炉和压力容器构件的声发射检测和安全评估方面；利用金属磁记忆检测系统评估铁道材料和长输管线的安全性方面；利用红外热成像和热斑迹扫描技术评估材料和构件的安全性方面；激光超声在材料应用上的检测方面等，本书对这些方面的新技术都作了介绍，还举出了在各方面应用的实例。

本书既考虑到常规无损检测工作者和广大材料工作者所需知识的交叉互补性，较详细地介绍了无损检测中超声、电磁、涡流检测的基础知识和检测方法，以及各种材料中出现的缺陷及分析其产生的原因，便于改进工艺；又考虑到无损检测这一学科在材料安全评估中的重要作用，特别介绍了铸锻件中的缺陷和材料强度问题；焊接件中的缺陷和材料强度问题；断裂力学在无损检测安全评估中的重要作用；压力容器无损检测中的安全评估；残余应力的形成及其对构件安全性的影响，以期相关领域的技术人员在交叉学科范围互相探讨。考虑到我国的大型钢制桥梁日益增多，本书还介绍了钢制桥梁的无损检测和安全评估系统。

考虑到仪器制造技术在无损检测和安全评估中的重要作用，本书还对检测和评估中的各种仪器系统如：P 扫描成像技术；超声-涡流一体化技术；检测用自动爬行器技术；大型集装箱透照用直线加速器技术等做了介绍。

由于作者水平所限，错误和不妥之处在所难免，望读者批评指正。

编者　于北京交通大学理学院

2003.12

目　录

第一章　材料无损检测和安全评估的理论基础

第二章　各种材料中的缺陷及其产生原因

第三章 材料的超声波检测方法

第四章 材料的电磁检测方法

第五章 材料的安全评估方法

第六章 无损检测和安全评估技术设备的智能化和自动化

第一章　材料无损检测和安全评估的理论基础

1.1　材料无损检测的数学物理基础

1.1.1　声学基础

（1）波的基本性质和波的类型

波是振动源通过介质传播能量的一种扰动现象，扰动的方式随位置和时间而定。一维波传播的数学表达式为：

$$D(x,t)=A\sin(\omega t-kx) \tag{1.1.1}$$

式中：$D(x,t)$为在空间某一位置 x 和某一时间 t 时扰动的值；A 为扰动的幅度；ω 为角频率；k 为角波数（$k=2\pi/\lambda$）。

波的角频率 ω 与频率 f 的关系是：

$$\omega=2\pi f \tag{1.1.2}$$

频率是波在传播过程中，某一点在单位时间内振动的次数，通常用每秒钟振动的次数表示，称为赫兹(Hz)。波数 k 是在单位距离 2π 内的波长 λ 的个数。波长 λ 是波在相邻两波峰或波谷之间的距离。波数和传播速度之间的关系表示为：

$$c=\frac{\omega}{k}=f\cdot\lambda \tag{1.1.3}$$

c 表示传播速度或相速度，它表示任何幅度下的传播速度。对于周期性的波在一定的限度内可以用有限相位差的若干个正弦波之和来描述，对于非周期性的波可以用无限个无限小相位差的正弦波之和来描述。

波的基本类型分为平面波、球面波和表面波。

1）平面波　在三维条件下，(1.1.1)式可以写成：

$$\boldsymbol{u}(x,y,z,t)=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot\cos(k_xx+k_yy+k_zz-\omega t) \tag{1.1.4}$$

式中：$\boldsymbol{u}$ 为 x,y,z 在时间 t 时的扰动；k_x,k_y,k_z 为在三个方向上波矢量的分量；$A_x\boldsymbol{i},A_y\boldsymbol{j}$，$A_z\boldsymbol{k}$ 为在 x,y,z 三个方向扰动时的幅度分量。

以波矢量大小为 $\boldsymbol{k}$，方向平行于波传播的方向形式的波称为平面波。在三维情况下，平面波没有衰减，它在所描述的空间平面中具有相同的相位，在数学中相位为常数值意味着它是一个平面方程：

$$\omega t-k_xx+k_yy+k_zz=\Phi \tag{1.1.5}$$

2）球面波　与平面波不同，它所具有的特定相位值处于三维空间的球面上的一种波。它的数学表达式为：

$$\boldsymbol{u}(r,t)=\frac{A}{r}\cos(\boldsymbol{k}_r-\omega t) \tag{1.1.6}$$

式中：r 为与原点的径向距离；$\boldsymbol{k}_r$ 为径向的波矢量。

3）表面波　表面波亦称瑞利波，是在半无限大空间传播的波，其能量集中在表层一个

波长的范围内，1/4 波长处能量最强。其振动轨迹为一与传播表面相垂直与传播方向相平行的椭圆。在数学上这种波动可以用幅度乘以一个因子表示，这个因子使幅度随距表面距离的增大而减小。

(2) 波在各向同性介质中的传播

由各向同性材料所构成的无限大弹性介质是波传播的基本条件之一，它所具有的应力与应变的关系可用如下方程表示：

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{xx}+\lambda(\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) \quad \sigma_{yz}=\sigma_{zy}=2\mu\varepsilon_{yz}=2\mu\varepsilon_{zy}\\
&\sigma_{yy}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{yy}+\lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{zz}) \quad \sigma_{zx}=\sigma_{xz}=2\mu\varepsilon_{zx}=2\mu\varepsilon_{xz}\\
&\sigma_{zz}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{zz}+\lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \quad \sigma_{xy}=\sigma_{yx}=2\mu\varepsilon_{xy}=2\mu\varepsilon_{yx}
\end{aligned}
\tag{1.1.7}
$$

式中：σ_{ij} 为应力分量；ε_{ij} 为应变分量；λ,μ 为拉米常数。这种形式通常称为弹性介质的虎克定律。拉米常数是材料常数，与另外两个材料常数杨氏模量 E 和泊松比 ν 的关系是：

$$
\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.1.8}
$$

连续介质中质点的运动速度与介质受扰动时的应力分量之间的关系，即连续介质的运动方程为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial^2 t}\\
\dfrac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=\rho\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial^2 t}\\
\dfrac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=\rho\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial^2 t}
\end{cases}
\tag{1.1.9}
$$

式中：u_x,u_y,u_z 为质点位移矢量的分量，ρ 为介质的密度，此处的体积力被忽略。实际上理想的弹性介质中需要用介质的运动方程、介质的连续性方程和介质的物态方程三个方程来描述。介质的连续性方程描述介质受扰动时密度的变化量与质点运动速度之间的关系；介质的物态方程对小振幅波经过略去二级以上微量的线性化处理后，描述声压变化量和密度变化量之间的关系。

考虑如下形式的平面波：

$$
\begin{aligned}
u_x&=A_x\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)\\
u_y&=A_y\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)\\
u_z&=A_z\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)
\end{aligned}
\tag{1.1.10}
$$

式中：A_x,A_y,A_z 为位移幅度的分量；k_x,k_y,k_z 为波矢量的分量；ω 为角频率。

波矢量的量值等于波数：

$$
k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} \tag{1.1.11}
$$

这里波数

$$
k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.1.12}
$$

在波矢量上，分量 k_x,k_y,k_z 是朝向等相位点的平面矢量的分量，波径空间的行进使等相位点平面保持自身平行的移动，故波矢量描述了波的传播方向。

借助于数学变换，可应用下述应变与位移之间的关系得到三维的波动方程。

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\
\varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{yz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right)
\end{cases}
\tag{1.1.13}
$$

下述的三维波动方程决定着声波通过线性、弹性、均质、各向同性材料的传播：

$$
\begin{cases}
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x=\rho\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 u_y=\rho\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z=\rho\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
\end{cases}
\tag{1.1.14}
$$

式中 Δ 为由正应变之和给出的固体应变时的位移体膨胀；∇^2 是拉普拉斯算符。

$$
\Delta=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}
\tag{1.1.15}
$$

∇^2 由如下导数组确定：

$$
\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\tag{1.1.16}
$$

以下介绍波动方程的矢量形式，用 $\boldsymbol{S}=u\,\boldsymbol{i}+v\,\boldsymbol{j}+w\,\boldsymbol{k}$ 表示质点位移矢量，用 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$ 表示质点的速度矢量，而 $v_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial t}, v_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial t}, v_z=\dfrac{\partial u_z}{\partial t}$，如果利用矢量运算符号：梯度 grad，散度 div，旋度 rot，则公式(1.1.14)即波动方程又写成矢量形式：

$$
\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{S}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grod}\Delta+\mu\nabla^2\boldsymbol{S}
\tag{1.1.17}
$$

因为 $\Delta=\mathrm{div}\boldsymbol{S}$，上式可写成：

$$
\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{S}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grod}(\mathrm{div}\boldsymbol{S})+\mu\nabla^2\boldsymbol{S}
\tag{1.1.18}
$$

利用矢量分析关系式：

$$
\mathrm{grod}(\mathrm{div}\boldsymbol{S})=\nabla^2\boldsymbol{S}+\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{S})
$$

上式又可以改写成：

$$
\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{S}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\mathrm{grod}(\mathrm{div}\boldsymbol{S})-\mu\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{S})
\tag{1.1.19}
$$

上式也可以用速度矢量表示：

$$
\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\mathrm{grod}(\mathrm{div}\boldsymbol{v})-\mu\cdot\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})
\tag{1.1.20}
$$

公式(1.1.19)和(1.1.20)都是以矢量形式表示的固体中的声波动方程。对于流体由于 $\mu=0$，所以上式可简化为：

$$
\nabla^2\boldsymbol{v}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}
\tag{1.1.21}
$$

其中：$c^2=\dfrac{\lambda}{\rho}=\dfrac{1}{\beta_S\rho_0}$，对于流体用 ρ_0 代替 ρ，β_S 为绝热体积压缩系数。公式(1.1.21)是

用速度矢量表示的流体中的声波动方程。它实际是固体中声波波动方程中的一种特例。

为了导出各向同性介质中声波的速度，根据矢量分析可知，对于一般矢量场可以表示成标量梯度与矢量旋度之和的形式，因此令：

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\Phi+\mathrm{rot}\boldsymbol{\Psi},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{1.1.22}$$

其中 Φ 称为标量势，$\boldsymbol{\Psi}=\Psi_x\boldsymbol{i}+\Psi_y\boldsymbol{j}+\Psi_z\boldsymbol{k}$ 称为矢量势。对于流体 $\boldsymbol{\Psi}=0$，所以上式可以用速度分量表示。

$$v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_y}{\partial z},\quad v_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_z}{\partial x},\quad v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_x}{\partial y} \tag{1.1.23}$$

将公式(1.1.22)代入公式(1.1.20)，可以分离标量势 Φ 和矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 而得到两个独立的方程：

$$\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\Phi,\quad \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2}=\mu\nabla^2\boldsymbol{\Psi} \tag{1.1.24}$$

对于矢量势还可以用其分量表示：

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}_i}{\partial t^2}=\mu\nabla^2\boldsymbol{\Psi}_i\qquad(i=x,y,z) \tag{1.1.25}$$

当求出势函数的具体形式后，代入公式(1.1.23)就可确定传播介质中质点的速度。

在各向同性介质中引入两个势函数，可以使声波动方程的求解简化。公式(1.1.24)表示在弹性介质中用膨胀和扭转表示的波动方程膨胀代表压缩，反映纵波特性，扭转代表剪切，反映横波特性，实际上标量势描述的就是纵波，矢量势描述的就是横波。对于直角坐标系这些方程描述的是在某一方向传播的平面波，下面导出无限大介质中纵波和横波的声速公式，公式(1.1.24)改写后可得：

$$\nabla^2\Phi=\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{1}{c_{\mathrm{L}}^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{1.1.26}$$

式中：

$$c_{\mathrm{L}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \tag{1.1.27}$$

此式即纵波在无限大介质中的传播速度。式中 E 为杨氏模量，ρ 为介质密度，σ 为泊松比，λ、μ 为拉米常数。为了求横波速度，对公式(1.1.24)中的二式，不考虑矢量的方向，改写后可得：

$$\nabla^2\Psi=\frac{\rho}{\mu}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{1}{c_{\mathrm{S}}^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{1.1.28}$$

式中：

$$c_{\mathrm{S}}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \tag{1.1.29}$$

此式即横波在无限大介质中的传播速度。

以上是无限大介质中的体积波，以下介绍表面波。在无限大的各向同性弹性介质中只能有纵波和横波两种形式的弹性波传播，然而当各向同性介质存在一个边界时，此边界上还能传播弹性的表面波，即瑞利波，其传播速度为：

$$c_{\mathrm{R}}=m\cdot c_{\mathrm{S}} \tag{1.1.30}$$

式中：c_{S} 为弹性介质中的横波声速；m 为下述方程的根。

$$m^6-8m^4+(24-16a^2)m^2+16(a^2-1)=0 \tag{1.1.31}$$

方程中 a 与泊松比 σ 的关系为：

$$a=\sqrt{\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}} \tag{1.1.32}$$

例如当泊松关系成立时，即当 $\lambda=\mu$，也就是 $\sigma=0.25$ 时，则 $a^2=1/3$，方程(1.1.31)将变为：

$$3m^6-24m^4+56m^2-32=0$$

解此方程可得 m 的实数根为 $m=0.9194$。因此当 $\sigma=0.25$ 时，瑞利波的速度为：

$$c_R=0.9194c_S \tag{1.1.33}$$

如果取泊松比 $\sigma=0.5$，则 $a=0$，此时方程(1.1.31)变为：

$$m^6-8m^4+24m^2-16=0$$

此式的唯一实根为 $m=0.9554$，因此当 $\sigma=0.5$ 时，瑞利波的速度为：

$$c_R=0.9554c_S \tag{1.1.34}$$

对于钢来说，$\sigma=0.29$，根据这个值可以求得在钢的表面上传播的瑞利波速度为：

$$c_R=0.9258c_S \tag{1.1.35}$$

(3) 无限大弹性介质中各种波动方程的解

无论是对于膨胀，还是扭转，或者对于膨胀位移势函数和剪切位移势函数，其波动方程的形式都属于一个类型。因此它们的特征方程都可以写成：

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{1.1.36}$$

的形式。其中波的传播速度为 c，对于膨胀或者对于扭转为零的位移而言，相对应的速度即是 $c_L=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$，这种波即为纵波，或叫膨胀波。对于 $\Delta=0$ 即体位移膨胀为零而旋转位移不为零的波，其对应的波速为 $c_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$，这种波即为横波或畸变波。

1) 三维空间中的平面波　在三维空间中，方程(1.1.36)是两种具有不同速度的波在传播时所具有的形式。而在超声波无损检测中，常常应用的是超声波定向传播的特性，因此可以在一定的方向来求它的解。此时方程(1.1.36)所代表的即是平面波的波动方程，假如把超声波看作只在 D 方向传播的波，并且满足方程：

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{1.1.37}$$

式中 l、m、n 作为 D 方向的余弦，则函数

$$\Phi=Ae^{j(2\pi/\lambda)(ct-lx-my-nz)} \tag{1.1.38}$$

即为方程(1.1.36)的解。而势函数 Φ 在任何时候在垂直于 D 的平面上都是不变的，下面我们将证明对于无限大弹性介质中的任何一个平面波也只能以 c_L 和 c_S 进行传播。

设任一平面波的波平面在其法线方向的余弦为 l、m、n，速度为 c，那末在三个方向的位移 u_x，u_y，u_z 为：

$$\begin{cases}u_x=A_1[ct-(lx+my+nz)]\\u_y=A_2[ct-(lx+my+nz)]\\u_z=A_3[ct-(lx+my+nz)]\end{cases} \tag{1.1.39}$$

根据

$$\Delta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

则有：

$$\Delta=-[lA_1'+mA_2'+nA_3'] \tag{1.1.40}$$

式中：$'$ 表示对$[ct-(lx+my+nz)]$求导，把(1.1.39)代入(1.1.38)，并利用方向余弦的关系式(1.1.37)得：

$$\begin{cases}(\lambda+\mu)l(A_1''l+A_2''m+A_3''n)+(\mu-\rho c^2)A_1''=0\\(\lambda+\mu)m(A_1''l+A_2''m+A_3''n)+(\mu-\rho c^2)A_2''=0\\(\lambda+\mu)n(A_1''l+A_2''m+A_3''n)+(\mu-\rho c^2)A_3''=0\end{cases} \tag{1.1.41}$$

若要使 A_1''，A_2''，A_3'' 有不等于零的解，下列关系式必须成立：

$$\begin{vmatrix} l^2+\frac{\mu-\rho c^2}{\lambda+\mu} & lm & ln \\ lm & m^2+\frac{\mu-\rho c^2}{\lambda+\mu} & mn \\ ln & mn & n^2+\frac{\mu-\rho c^2}{\lambda+\mu}\end{vmatrix}=0 \tag{1.1.42}$$

将上面的行列式展开化简后得：

$$(\mu-\rho c^2)^2(\lambda+2\mu-\rho c^2)=0 \tag{1.1.43}$$

要使上式成立，必须使：

$$\begin{cases}\lambda+2\mu-\rho c^2=0\\(\mu-\rho c^2)^2=0\end{cases} \tag{1.1.44}$$

因此 c 有两个解：

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=c_{\mathrm{L}}, c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

这说明在无限大的介质中，运动方程只能存在两种波速度的解，第一个解有一个根，第二个解有两个根。速度 c_{L} 同平行于传播方向的位移分量有关，而速度 c_{S} 同两个垂直于传播方向的位移分量有关。

因此我们可以这样进一步来认为：在无限的弹性介质中，当有平面波存在时，A_1、A_2、A_3 确定了位移矢量 $\boldsymbol{S}(u_x,u_y,u_z)$的分量的幅度，而且 $\boldsymbol{S}$ 还看成是三个矢量 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 之和，$\boldsymbol{B}$ 是在直线传播的方向，而 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都垂直于 $\boldsymbol{B}$ 而且互相垂直。因此，平面波可以包括三个部分，其中每一个部分都不依赖于另外两个部分而独立的进行传播，这三个波即所谓纵波(L 波)；垂直横波(SV 波)；水平横波(SH 波)。纵波是在传播方向以速度 c_{L} 传播的膨胀波，而 SV 波和 SH 波是以速度 c_{S} 传播的畸变波，其位移都垂直于传播方向，同时又互相垂直。这三种波在超声学中统称为体波。

我们平常所看到的波动方程，多为一维的波动方程，用一维波动方程来研究平面波时，并且只考虑存在纵波的情况下，波动方程就变成如下的形式：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{1}{c_{\mathrm{L}}^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{1.1.45}$$

x 为该平面的传播方向，此一维波动方程的通解为：