模糊控制系统的设计及稳定性分析

佟绍成
王　涛
王艳平
唐润涛
著

科学出版社
www.sciencep.com

模糊控制系统的设计及稳定性分析

佟绍成　王　涛　王艳平　唐涧涛　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍了基于模糊 T-S 模型控制的基本内容和方法，力图概括国内外最新研究成果。主要内容有：模糊集和模糊逻辑系统的基本知识，模糊控制系统的设计方法与稳定性分析，不确定模糊系统的鲁棒控制设计方法与稳定性分析，非线性动态系统的模糊鲁棒控制设计方法与稳定性分析，模糊动态系统的分段控制设计方法与稳定性分析，不确定模糊系统的 H^{∞} 控制设计方法与稳定性分析，模型参考模糊控制的设计方法与稳定性分析，非线性时滞系统的模糊控制设计方法与稳定性分析。

本书起点高、系统性强、覆盖广，既可以作为高等院校自动控制专业以及相关专业的研究生教材，又可作为从事研究模糊控制理论的科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

模糊控制系统的设计及稳定性分析/佟绍成等著.
北京：科学出版社，2004.
ISBN 7-03-012979-2

Ⅰ.模…　Ⅱ.佟…　Ⅲ.模糊控制-控制系统　Ⅳ.TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 014270 号

责任编辑：李淑兰　马长芳 / 责任校对：陈丽珠
责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年4月第 一 版　　开本：787×1092 1/16
2004年4月第一次印刷　印张：20
印数：1—2 000　　　　字数：463 000

定价：46.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

随着科学技术的进步，现代工业过程日趋复杂，过程的严重非线性性、不确定性、多变量、时滞、未建模动态和有界干扰，使得控制对象的精确数学模型难以建立，单一应用传统的控制理论和方法难以满足复杂控制系统的设计要求。而模糊控制则无需知道被控对象的精确数学模型，且模糊算法能够有效地利用专家所提供的模糊信息知识，处理那些定义不完善或难以精确建模的复杂过程。因此，模糊控制成为了近年来国内外控制界关注的热点研究领域。

1965 年，美国控制理论专家 L. A. Zadeh 发表了创建性论文“模糊集合论”，随后，国内外许多学者对模糊控制系统理论和方法进行了研究，对所提出的模糊控制方法进行了工程化研究，并成功地应用于实际工业过程，取得了明显的应用效果。特别是近几年来，在模糊控制系统理论的研究方向上，对模糊控制系统的设计准则，模糊系统的稳定性、鲁棒性等关键性理论问题的研究取得了长足的进展。鉴于国内外尚无这方面的专著出版，众多成果散见于期刊文献之中，为满足广大科技工作者的迫切需要，我们编写了本书，期望为从事模糊控制理论的研究人员和研究生进入该领域提供捷径。

本书系统介绍模糊控制系统的设计方法和基本理论，着重反映该领域最新的研究成果和发展状态。本书取材于国际期刊杂志上公开发表的学术论文，同时包含了作者的某些研究成果。本书的出版应感谢中国科学院科学出版基金的资助，感谢国家重大基础研究规划项目(2002CB312200)、国家自然科学基金项目(60274019)和辽宁省自然科学基金项目(2001101061)的资助。

限于作者水平，书中纰漏和错误在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

目　　录

第一章　模糊集和模糊逻辑系统

本章介绍了有关模糊集合和模糊逻辑系统的一些主要知识,这些知识是后面各章节的基础。

1.1　模糊集合及其性质

定义 1.1.1　映射 $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$称为论域 X 上的模糊子集合,记为 A。$\mu_A(x)$称为 x 相对于模糊集合 A 的隶属度,$\mu_A(x)$称为模糊集合 A 的隶属函数。

由定义 1.1.1 可知,论域 X 的一个模糊集合 A 完全由隶属函数 $\mu_A(x)$所刻划。x 对模糊集 A 的隶属程度由 $\mu_A(x)$在闭区间[0,1]上的取值大小来反映。特别地,当 $\mu_A(x)$的值域为{0,1}时,隶属函数将变成集合 X 上的特征函数,即模糊集合变成了清晰集合。因此,模糊集合是清晰集合在概念上的拓广;清晰集合是模糊集合的一种特殊形式。

模糊集合有多种表示方法,最基本的表示方法是将它所包含的元素及其相应的隶属函数表示出来。它可以用如下的序偶形式来表示:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

也可表示成

$$A = \begin{cases} \int_X \dfrac{\mu_A(x)}{x}, & \text{如果 } X \text{ 为连续论域} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mu_A(x_i)}{x_i}, & \text{如果 } X \text{ 为离散论域} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

下面给出模糊集合的例子。

例 1.1.1　设论域 X 为"年龄",在 $X=[0,200]$上定义两个模糊集合"少年"和"老年人",这两个模糊集分别用 Y,O 表示,其隶属函数如图 1-1 所示。

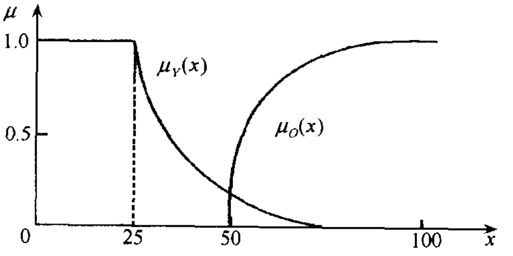

图 1-1　模糊集合的隶属函数

隶属函数是模糊集合的重要组成部分,它是人为主观定义的一种函数。在理论上隶属函数描述了论域内所有元素属于模糊集合的强度。在实际中,人们常常用有限的数值来定义一个模糊集,中间值则用内插值法计算。常见的隶属函数有指数函数、高斯函数和线性函数等。在工程实际应用中,为了计算方便,大都采用线性函数的形式。下面给出有关模

糊集合的几个重要概念。

定义 1.1.2 设 A 是 X 上的一个模糊集合，则称

$$\mathrm{supp}A = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\} \tag{1.1.2}$$

为模糊集合 A 的支撑集(见图 1-2)。

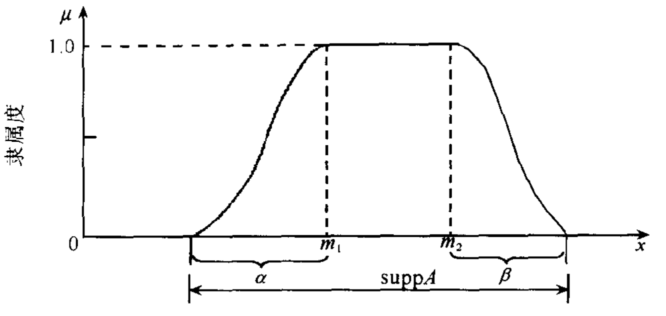

图 1-2 模糊集的支撑集

定义 1.1.3 设 A 是 X 上的一个模糊集合，如果 A 的支撑集仅为一个点，且在该点的隶属函数 $\mu_A(x)=1$，则称 A 为单点模糊集。

定义 1.1.4 设 A 是 X 上的一个模糊集合，定义 A 的 α 截集(见图 1-3)为

$$A_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geqslant \alpha\} \tag{1.1.3}$$

模糊集 A 的 α 截集 A_α 实际上是一个普通集合。

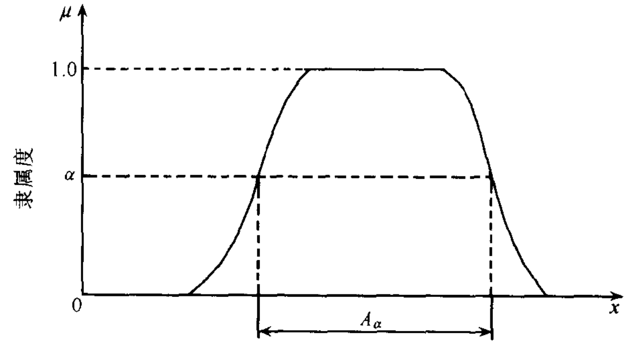

图 1-3 模糊集的 α 截集

同理，可以定义模糊集的强截集，$A_{\dot{\alpha}}=\{x \mid x\in X, \mu_A(x)>\alpha\}$。

1.2 模糊集合的基本运算

定义 1.2.1 设 A,B 是论域 X 上的两个模糊集，如果$\forall\ x\in X, \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，则称 A 包含于 B，或 B 包含 A，并记作 $A\subset B$。若$\forall\ x\in X, \mu_A(x)=\mu_B(x)$，则称 A 等于 B，记作 $A=B$。

用$\varnothing$表示隶属函数恒为 0 的模糊集，X 表示隶属函数恒为 1 的模糊集，则有下面的性质：

(1) $\varnothing\subset A\subset X$；

(2) $A \subset A$;

(3) 若 $A \subset B, B \subset A$,则 $A = B$;

(4) 若 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$。

定义 1.2.2 设 A,B 是论域 X 上的两个模糊集,$\mu_A(x)$,$\mu_B(x)$ 分别为 A 及 B 的隶属函数,定义并集 $A \cup B$ 的隶属函数为

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{1.2.1}$$

交集 $A \cap B$ 的隶属函数为

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{1.2.2}$$

A 的补集 $\overline{A}$ 的隶属函数为

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{1.2.3}$$

定义 1.2.3 设 A,B 是两个模糊集,其论域分别为 X,Y,称积空间 $X \times Y$ 上的模糊集合 $A \times B$ 为 A 和 B 的直积,其隶属函数为

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \tag{1.2.4}$$

或者

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \mu_A(x)\ \mu_B(y) \tag{1.2.5}$$

模糊集与经典集合有着相同的运算性质:

(1) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(2) 结合律

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(3) 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(4) 吸收律

$$(A \cap B) \cup A = A$$
$$(A \cup B) \cap A = A$$

(5) 幂等律

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$$

(6) 同一律

$$A \cup X = X, A \cap X = A, A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$$

(7) 狄·摩根律

$$(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}, (\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(8) 双重否定律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

值得指出的是:普通集合中成立的排中律和矛盾律对于模糊集合不再成立,即

$$A \cup \overline{A} \neq X, \qquad A \cap \overline{A} \neq \varnothing$$

在模糊集合运算,特别是在模糊推理中,还常常用到其他类型的运算,下面列出主要

的几种：

(1) 代数和

$$A \hat{+} B \leftrightarrow \mu_{A\hat{+}B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{1.2.6}$$

(2) 代数积

$$A \cdot B \leftrightarrow \mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{1.2.7}$$

(3) 有界和

$$A \oplus B \leftrightarrow \mu_{A\oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} \tag{1.2.8}$$

(4) 有界积

$$A \otimes B \leftrightarrow \mu_{A\otimes B}(x) = \max\{0, \mu_A(x)\mu_B(x) - 1\} \tag{1.2.9}$$

(5) 强烈和

$$A \cup B \leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x), & \mu_A(x) = 0 \\ 1, & \mu_A(x),\ \mu_B(x) > 0 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

(6) 强烈积

$$A \cap B \leftrightarrow \mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x), & \mu_A(x) = 1 \\ 1, & \mu_A(x),\ \mu_B(x) < 1 \end{cases} \tag{1.2.11}$$

1.3 模糊集合的基本定理

分解定理和扩张原理是模糊数学中的两个重要定理，它们在理论研究中有广泛的应用。

定理 1.3.1(分解定理) 设 A 是论域 X 上的模糊集，A_α 是 A 的 α 截集，其中 $\alpha \in [0,1]$，则下列分解式成立：

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha \tag{1.3.1}$$

式中 αA_α 也是论域 X 上的一个模糊集，被称为 α 与截集 A_α 的"乘积"，其隶属函数定义为

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in A_\alpha \\ 0, & x \notin A_\alpha \end{cases} \tag{1.3.2}$$

上述关系可用图 1-4 来表示，当 α 取不同的 $\alpha_i (i=1,2,\cdots,n)$ 值时，可由图 1-5 直观表示。当 α 在闭区间[0,1]取遍所有值时，按 $\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha$ 求模糊集"并"运算，也就是取各个 $\alpha\in[0,1]$水平集隶属函数上的点，并且连接成为一条曲线。显然，该曲线与 $\mu_A(x)$重合，这就是分解定理的物理意义所在。

分解定理的另一种表现形式为

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x)] \\ &= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x)] \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

或

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge \mu_{A_{\dot{\alpha}}}(x)]$$

$$= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x)] \tag{1.3.4}$$

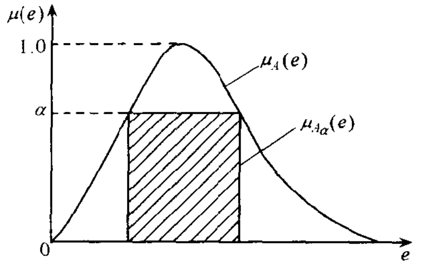

图 1-4 隶属函数

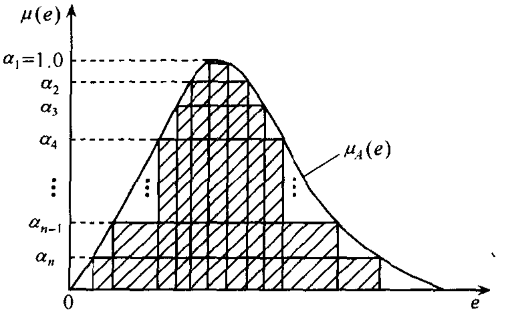

图 1-5 分解定理示意图

定义 1.3.1 设映射 $f: X \to Y$，若 $A \subseteq Y$，则称 $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$ 为 A 在映射 f 下的"象"。若 $B \subseteq Y$，则称 $f^{-1}(B)=\{x \mid f(x) \in B\}$ 为 B 在映射 f 下的"原象"。

由上述定义，对于幂集 $P(X)$ 与 $P(Y)$，可诱导出一个新的映射 g，

$$g: P(X) \to P(Y), \qquad A \to g(A) = \{y \mid y = g(x), x \in A\} \tag{1.3.5}$$

用特征函数表示，有

$$\Psi_{g(A)}(y) = \bigvee_{g(x)=y} \Psi_A(x) \tag{1.3.6}$$

并且，当 $g^{-1}(y)=\varnothing$ 时，$\Psi_{g(A)}(y)=0$。同样有相应的逆映射

$$g^{-1}: P(Y) \to P(X) \quad B \to g^{-1}(B) = \{x \mid g(x) \in B\} \tag{1.3.7}$$

用特征函数表示，有

$$\Psi_{g^{-1}(B)}(x) = \Psi_B(g(x)) \tag{1.3.8}$$

对于模糊集合，能否将映射 g 扩展到幂集 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 上去呢？这是 1975 年 L. A. Zadeh 给出的著名的扩展定理所解决的问题。

定理 1.3.2（扩展原理） 设映射 $f: X \to Y$，由 f 诱导一个新的映射，记为 $\tilde{f}$，

$$\tilde{f}: F(X) \to F(Y), A \to \tilde{f}(A)$$

$$\mu_{\tilde{f}(A)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{\tilde{f}(x)=y} \mu_A(x), & \tilde{f}(y) \neq \varnothing \\ 0, & \tilde{f}(y) = \varnothing \end{cases} \tag{1.3.9}$$

由 $\tilde{f}$ 诱导出另一个新的映射 $\tilde{f}^{-1}$，

$$\tilde{f}^{-1}: F(Y) \to F(X), B \to \tilde{f}^{-1}(B)$$

$$\mu_{\tilde{f}^{-1}(B)}(x) = \mu_B(\tilde{f}(x)) \tag{1.3.10}$$

这时，$\tilde{f}(A)$ 叫做 A 在 $\tilde{f}$ 下的象，而 $\tilde{f}^{-1}(B)$ 叫做 B 在 $\tilde{f}$ 下的原象。这里的 $\tilde{f}$ 称为 f 的扩展。A 通过 $\tilde{f}$ 映射为象 $\tilde{f}(A)$ 时，它的隶属函数的值保持不变。

由扩展原理，并设 $f: X \to Y$，指标集为 Z，$\forall i \in Z$，则有下面的性质：

(1) $\tilde{f}(A)=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing$；

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \tilde{f}(A) \subseteq \tilde{f}(B)$；

(3) $\tilde{f}(\bigcup_{i\in Z}A_i)=\bigcup_{i\in Z}\tilde{f}(A_i)$;

(4) $\tilde{f}(\bigcap_{i\in Z}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in Z}\tilde{f}(A_i)$，当 f 为单射时，等号成立；

(5) $\tilde{f}^{-1}(\varnothing)=\varnothing$;

(6) 若 f 为满射时，则 $\tilde{f}^{-1}(B)=\varnothing\Leftrightarrow B=\varnothing$;

(7) 若 f 为满射时，$\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(B))=B$;

(8) 若 $B_1\subseteq B_2$，则 $\tilde{f}^{-1}(B_1)\subseteq\tilde{f}^{-1}(B_2)$;

(9) $\tilde{f}^{-1}(\bigcup_{i\in Z}B_i)=\bigcup_{i\in Z}\tilde{f}^{-1}(B_i)$;

(10) $\tilde{f}^{-1}(\bigcap_{i\in Z}B_i)=\bigcap_{i\in Z}\tilde{f}^{-1}(B_i)$;

(11) $\tilde{f}^{-1}(B^c)=\tilde{f}^{-1}(B)^c$。

扩展定理是模糊集合中一个很重要的定理，并得到了广泛的应用。如果说分解定理是模糊集与清晰集之间的联系和纽带，那么扩张原理则是把清晰集合中的数学方法扩展到模糊集合中的有力工具。

1.4 模糊关系

在日常生活中，除了如“电源开关与电动机启动按钮都闭合了”，“$A=B$”等清晰概念上的普通逻辑关系以外，还会常遇到一些表达模糊概念的关系语句，例如：“妹妹和妈妈很相像”，“西湖比太湖更优美”等。普通关系只是表示事物(元素)间是否存在关联，而模糊关系是描述事物(元素)间对于某一模糊概念上的关联程度。用普通关系来表示模糊概念上的关联是不可能的，所以，需用模糊关系来表示。

1.4.1 模糊关系的定义及其表示方法

定义 1.4.1 n 元模糊关系 R 是定义在积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的模糊集合，它表示为

$$\begin{aligned}R_{X_1\times X_2\times\cdots\times X_n}&=\{((x_1,x_2,\cdots,x_n),\mu_R(x_1,\cdots,x_n))\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\}\\&=\int_{X_1\times X_2\times\cdots\times X_n}\mu_R(x_1,\cdots,x_n)/(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

通常用得较多的是 $n=2$ 时的模糊关系。

值得指出的是：模糊关系也是模糊集合，所以可用表示模糊集合的方法来表示。此外，当 X,Y 为有限集合时，常常用模糊矩阵来表示。

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 为有限集合，$X\times Y$ 上的模糊关系 R 可用 $n\times m$ 阶矩阵来表示：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mu_R(x_1,y_1)&\mu_R(x_1,y_2)&\cdots&\mu_R(x_1,y_m)\\\mu_R(x_2,y_1)&\mu_R(x_2,y_2)&\cdots&\mu_R(x_2,y_m)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mu_R(x_n,y_1)&\mu_R(x_n,y_2)&\cdots&\mu_R(x_n,y_m)\end{bmatrix}$$

这样的矩阵称为模糊关系矩阵。由于其元素均为隶属函数，因此它们均在[0,1]中取值。

例 1.4.1 设 X 是实数集合，$x,y\in X$，R 表示模糊关系："y 比 x 大得多"，R 的隶属函数可定义为

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}0, & x\geqslant y\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{10}{y-x}\right)^2}, & x<y\end{cases} \tag{1.4.2}$$

例 1.4.2 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{2,3,4\}$，定义模糊关系 R："$x\approx y$"，则 $X\times Y$ 上的模糊关系表示为

$x\backslash y$	2	3	4
1	0.66	0.33	0
2	1	0.66	0.33
3	0.66	1	0.66

对应的模糊矩阵为

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}0.66 & 0.33 & 0\\ 1 & 0.66 & 0.33\\ 0.66 & 1 & 0.66\end{bmatrix}$$

1.4.2 模糊关系的合成

按照模糊关系的定义，模糊关系实质上是乘积空间上的模糊集合，所以，它也遵循一般模糊集合的基本运算和性质，例如：交、并、补运算为

交：$R\cap S\Leftrightarrow\mu_R(x,y)\wedge\mu_S(x,y)$；

并：$R\cup S\Leftrightarrow\mu_R(x,y)\vee\mu_S(x,y)$；

补：$\bar{R}\Leftrightarrow 1-\mu_R(x,y)$。

下面介绍模糊关系的合成运算，它在模糊控制中有着很重要的应用。

定义 1.4.2 设 R 是 $X\times Y$ 中的模糊关系，S 是 $Y\times Z$ 中的模糊关系，定义 R 和 S 的合成 $R\circ S$ 是 $X\times Z$ 中的模糊关系，其隶属函数为

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}[\mu_R(x,y)*\mu_S(y,z)] \tag{1.4.3}$$

式中，$x\in X$；$z\in Z$。显然，$R\circ S$ 是 $X\times Z$ 上的一个模糊集合。

由定义 1.4.2 所定义的模糊关系合成，通常称为 $\vee$-$*$ 合成运算。其中算子 $*$ 可取一般模糊文献中所定义的 T 范的任何一种，但最常用的 $\vee$-$*$ 运算是 $\vee$-$\wedge$ 或 $\vee$-$\cdot$，对应的隶属函数分别为

$$\mu_{R\circ S}(u,w)=\vee_{v\in V}[(\mu_R(u,v)\ \wedge\ \mu_S(v,w))] \tag{1.4.4}$$

$$\mu_{R\circ S}(u,w)=\vee_{v\in V}[\mu_R(u,v)\cdot\mu_S(v,w)] \tag{1.4.5}$$

当 X,Y 和 Z 是离散的有限论域时，$\vee$-$\wedge$，$\vee$-$\cdot$ 可分别用 max-min 和 max-· 来替换。

例 1.4.3 设 R_1 表示西红柿的颜色和成熟程度之间的关系，R_2 表示西红柿的成熟程度和味道之间的关系，并设 $X=\{$green, yellow, red$\}$，$Y=\{$unripe, semi-ripe, ripe$\}$，$Z=\{$sour, sweet-sour, sweet$\}$，则

$R_1(x,y)$	unripe	semi-ripe	ripe
green	1	0.5	0
yellow	0.3	1	0.3
red	0	0.7	1

$R_2(y,z)$	sour	sweet-sour	sweet
unripe	1	0.2	0
semi-ripe	0.7	1	0.3
ripe	0	0.7	1

R_1 和 R_2 的合成表示西红柿的颜色和味道之间的模糊关系。按照模糊关系合成运算 max-min，有

$R(x,z)$	sour	sweet-sour	sweet
green	1	0.5	0.3
yellow	0.7	1	0.4
red	0.2	0.7	1

例 1.4.4 设 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{a,b,c\}$，$Z=\{\alpha,\beta\}$，$X\times Y$ 及 $Y\times Z$ 上的模糊关系 R 与 S 分别用模糊矩阵表示为

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5 & 0\\ 1.0 & 0 & 0\\ 0 & 1.0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.3\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8\\ 0 & 1.0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}$$

按照 max-min 合成规则，得模糊合成关系

$$\mathbf{T}=\mathbf{R}\circ\mathbf{S}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5 & 0\\ 1.0 & 0 & 0\\ 0 & 1.0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.6 & 0.8\\ 0 & 1.0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.7\wedge 0.6)\vee(0.5\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (0.7\wedge 0.8)\vee(0.5\wedge 1.0)\vee(0\wedge 0.9)\\ (1.0\wedge 0.6)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1.0\wedge 0.8)\vee(0\wedge 1.0)\vee(0\wedge 0.9)\\ (0\wedge 0.6)\vee(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (0\wedge 0.8)\vee(1.0\wedge 1.0)\vee(0\wedge 0.9)\\ (0\wedge 0.6)\vee(0.4\wedge 0)\vee(0.3\wedge 0) & (0\wedge 0.8)\vee(0.4\wedge 1.0)\vee(0\wedge 0.9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.6 & 0.8\\ 0 & 1\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}$$

1.5　模糊逻辑与近似推理

1.5.1　模糊语言变量

语言变量是自然语言中的词或句，它的取值不是通常的数，而是用模糊语言表示的模糊集合。例如，若把“年龄”看成是一个模糊语言变量，则它的取值不是具体年岁，而是诸如“年幼”、“年老”、“年轻”等用模糊语言表示的模糊集合。L. A. Zadeh 为语言变量给出了如下的定义：

定义 1.5.1　一个语言变量可用一个五元体$(x,T(x),U,G,M)$来表示，其中 x 为变量名称；$T(x)$为 x 的语言集，即语言 x 取值名称的集合，而且每一个语言取值对应一个在 U 上的模糊集；U 是论域；G 为语言取值的语法规则；M 为解释每个语言 x 取值的语义规则。

例 1.5.1　以控制系统的误差为语言变量 x，论域取为$[-6,+6]$。“误差”这个语言变量的原子单词有“大”、“中”、“小”、“零”，对这些原子单词施加适当的语气算子，就可以构成多个语言值名称，如“很大”、“大”、“较小”等，再考虑误差有正、负的情况，$T(x)$可表示成为

$T(x)=T$(误差)

　　$=$\{负很大，负大，负较大，负中，负小，零，正小，正中，正较大，正大，正很大\}

图 1-6 是以误差为语言变量的五元体示意图，其中语言集合 $T(x)$只画出一部分，而语义规则是指模糊集的隶属函数。

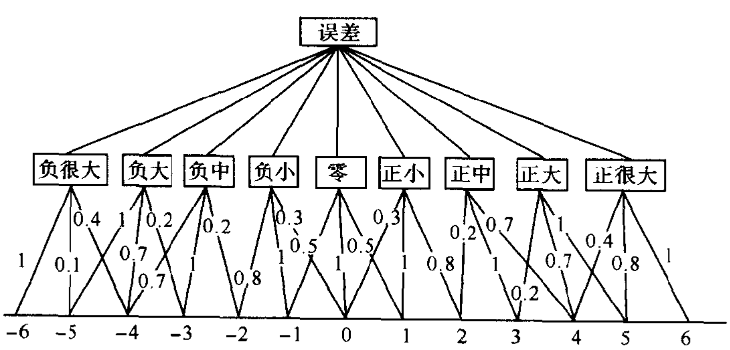

图 1-6　误差语言变量的五元体

上述定义可能会造成一个这样的印象：语言变量是一个很复杂的概念，但实际上并非如此。引入语言变量这个概念的目的是要确切地表明，一个变量是能够用普通语言中的词汇来取值的。下面是语言变量的直观定义。

定义 1.5.2　如果一个变量能够用普通语言中的词（如大、小和快等）来取值，则该变量就定义为语言变量。所用的词常常是模糊集合的标识词。

例 1.5.2　语言变量“速度”可用“慢速”、“中速”和“快速”来取值，而这里“慢速”、“中速”和“快速”则分别对应于图 1-7 中定义的模糊集合；同时，语言变量“速度”也可以取$[0,V]$之间的任意值。由此可见，语言变量是一个很重要的概念，它提供了量化语言描述

的正规途径。

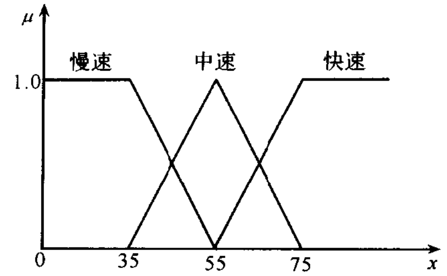

图 1-7　汽车"慢速"、"中速"和"快速"三种模糊集合的隶属函数

如上所述，每个模糊语言变量相当于一个模糊集合，通常在模糊语言前加上"极"、"非"、"相当"、"比较"、"略"、"稍微"这样一类的修饰词，其结果改变了该模糊语言的含义，相应的隶属函数也要改变。例如，设模糊语言为 A，其隶属函数为 μ_A，则通常有

$$\mu_{极A} = \mu_A^4,\qquad \mu_{非常A} = \mu_A^2,\qquad \mu_{相当A} = \mu_A^{1.25}$$

$$\mu_{比较A} = \mu_A^{0.75},\qquad \mu_{略A} = \mu_A^{0.5},\qquad \mu_{稍微A} = \mu_A^{0.25}$$

1.5.2　模糊蕴涵关系

定义 1.5.3　设 A,B 分别是 X 和 Y 上的两个模糊集，则由 $A \to B$ 所表示的模糊蕴涵是 X 到 Y 上的一个模糊关系，即定义在 $X \times Y$ 上的一个二元模糊集。

在模糊逻辑控制中，模糊控制规则实质上是模糊蕴涵关系。由于模糊关系有许多种定义方法，所以，模糊蕴涵关系相应的也有许多种定义方法。在模糊逻辑控制中，常用到如下几种模糊蕴涵关系的运算：

(1) 模糊蕴涵最小运算(Mamdani)

$$R = A \to B = A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)/(x,y) \tag{1.5.1}$$

(2) 模糊蕴涵积运算(Larsen)

$$R = A \to B = A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x)\mu_B(y)/(x,y) \tag{1.5.2}$$

(3) 模糊蕴涵算术运算(Zadeh)

$$\begin{aligned} R = A \to B &= (\bar{A} \times Y) \oplus (X \times B) \\ &= \int_{X \times Y} (1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))/(x,y) \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

(4)模糊蕴涵的最大最小运算(Zadeh)

$$\begin{aligned} R = A \to B &= (A \times B) \cup (\bar{A} \times Y) \\ &= \int_{X \times Y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \vee (1 - \mu_A(x))/(x,y) \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

(5) 模糊蕴涵的布尔运算

$$\begin{aligned} R = A \to B &= (\bar{A} \times Y) \cup (X \times B) \\ &= \int_{X \times Y} (1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))/(x,y) \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

(6) 模糊蕴涵的标准法运算

$$R = A \to B = (A \times Y) \to (X \times B)$$
$$= \int_{X \times Y} (\mu_A(x) > \mu_B(y))/(x,y) \tag{1.5.6}$$

式中

$$\mu_A(x) > \mu_B(y) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y) \\ 0, & \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}$$

(6′) 模糊蕴涵的标准法运算

$$R = A \to B = (A \times Y) \to (X \times B)$$
$$= \int_{X \times Y} (\mu_A(x) \gg \mu_B(y))/(x,y) \tag{1.5.7}$$

式中

$$\mu_A(x) \gg \mu_B(y) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \leqslant \mu_B(y) \\ \dfrac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, & \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}$$

1.5.3 模糊推理及其模型

在形式逻辑中，我们经常使用三段论式的演绎推理，即由大前提、小前提和结论构成的推理。比如，平行四边形两对角线相互平分，矩形是平行四边形，则矩形的两条对角线也相互平分。这种推理可以写成如下模型：

大前提：　如果 X 是 A，则 Y 是 B
小前提：　X 是 A

结　论：　则 Y 是 B

在这种推理过程中，如果大前提中的"A"与小前提的"A"是完全一样的，则结论必然是"B"，这即是二值逻辑的本质。在这种推理过程中，不管"A"与"B"代表什么，推理是普遍适用的。目前的计算机就是基于这种形式逻辑推理进行设计和工作的。如果大前提中的"A"与小前提的"A"不一致，形式逻辑就无法再进行推理，因此计算机也无法进行推理。但是在这种情况下，人是可以进行思维和推理的。比如：健康的人长寿，孔子非常健康，则孔子非常长寿。在这一推理中，大前提中的"A"是"健康"，小前提中的"A"是"非常健康"，大前提与小前提不一致，无法使用形式逻辑进行推理。但人可以得到"相当长寿"的结论，这是根据大前提中的"健康"与小前提中的"非常健康"的"含义"的相似程度得到的。通常用模糊集方法模拟人脑，这样一个思维过程的推理称为模糊推理。又如

大前提：　如果西红柿红了，则熟了
小前提：　这个西红柿有点红

结　论：　这个西红柿差不多熟了

关于模糊推理可以概括成以下几个模型：