高等代數 ABC

下　冊

施敏驤編　王剛森校

世界書局印行

高等代數學ＡＢＣ（下）

每冊定價銀五角

（外埠酌加郵費匯費）

著作者　施毓臚

校訂者　王剛森

出版者　ＡＢＣ叢書社

印刷者　世界書局

發行者　世界書局

發行所　上海各省　世界書局

中華民國二十二年一月初版
中華民國二十四年三月再版

下 册 目 次

第七章　級數……………………………………………1

第八章　連分數…………………………………………39

第九章　行列式…………………………………………57

第十章　方程式的普通性質……………………………95

第十一章　數字方程式…………………………………117

高等代數ABC

下册

第七章　級數

1.無限級數 Infinite series 爲級數的一種，項數大於任何有限數。

如將分母除$\frac{1}{1-x}$的分子，得級數$1+x+x^2+x^3+\cdots$。這個級數就是無限級數。

2.收斂級數 Convergent series. 當n無限增加，首n項和有一有限數爲極限，那麼無限級數是一個收斂級數。如

倘$x<1$，級數$1+x+x^2+x^3+\cdots$變成降級無限等比級數，且

$$S=\frac{1}{1-x}。$$

就是當n無限增大，級數n項有一極限$\frac{1}{1-x}$，

所以級數收斂。

有限級數都是收斂級數。

3.發散級數 Divergent seires. 當 n 無限增加，首 n 項和可大於任何有限數，那麼無限級數是一個發散級數。如

倘 $x=1$ 或 $x>1$，級數 $1+x+x^2+x^3+\cdots$ 當然可以發散。

4.不定級數 Oscillating series. 當 n 增加時，首 n 項和幾近於幾個有限數，那麼無限級數是一個不定級數。如

倘 $x=-1$，級數 $1+x+x^2+x^3+\cdots$ 變成 $1-1+1-1+\cdots$。取偶數項，和等於 0；奇數項，和等於1。所以 $x=-1$ 時，上級數是一個不定級數。

5.級數剩餘。無限級數和和當 n 無限增大時的首 n 項和的相差叫做級數的剩餘 Residue of the series.

設 S 代表級數和，S_n 代表首 n 項和，

R_n 代表首 n 項後的剩餘。

用餘剩的定義，得 $S-S_n=R_n$。

6.倘無限級數是收斂，他的剩餘等於無窮小。

因　$S-S_n=R_n$

由假定級數是收斂，$S=S_n$的極限

$\therefore S-S_n$是一個無窮小。

$\therefore R_n$是一個無窮小。

7.倘無限級數是收斂，當 n 無限增加，第 n 項是一個無窮小。

因　$S-S_{n-1}$是一個無窮小，

$S-S_n$是一個無窮小，

$S-S_{n-1}-(S-S_n)$ 是一個無窮小，

或　S_n-S_{n-1}是一個無窮小，

但　$S_n-S_{n-1}=u_n$。

$\therefore$　u_n是一個無窮小。

8.倘無限級數是收斂，不論 p 如何，m 可增大至使起自第 (m+1) 項的連續 p 項和是一個無窮小。

設　S＝級數的和，

$S_m=$首m項的和，

$S_{m+p}=$首 m+p 項的和。

於是，$S-S_m=$第 m 項後各項的和，

$S-S_{m+p}=$ 第 m+p 項後各項的和。

$$S-S_m-(S-S_{m+p})=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p},$$

或 $S_{m+p}-S_m=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}$。 (1)

命 $m+p=n$。 (2)

於是(1)即可變成 $S_n-S_m=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n$。 (3)

現在設 p 無限增加。

於是，由(2) n 也必無限增加。$\lim S_n=S$。

(3)可改成

$$S-S_m=\lim_{p\doteq\infty}(u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots)。 \quad (4)$$

現在設m無限增加。

於是，$S-S_m$ 一定是一個無窮小。

所以，$\lim\limits_{p \doteq \infty}(u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots)$是一個無窮小。

當m極大時，可使

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots\cdots+u_{m+p}$$

成一無窮小，不論p如何。

9.不論p如何，倘無限級數起自第(m+1)項的連續p項和是無窮小，那麼級數一定可以收斂。

設e代一小至任意所欲的正數。

由假定$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots+u_{m+p}$ (1)

是一個無窮小，於是

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots+u_{m+p}<e。$$

但 $u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots+u_{m+p}=S_{m+p}-S_m$。$\therefore S_{m+p}-S_m<e$。 (2)

命 $m+p=n$。 (3)

於是(2)變成 $S_n-S_m<e$。 (4)

現在設p無限增大。

由(3)，n也必無限增大，$\lim S_n=S$。

(4)可改成 $S-S_m<e$。 (5)

由(5)$S-S_m$是一個無窮小，$S=\lim S_m$

所以級數是收斂。

10.倘一無限級數祇有正項，不論n如何增大，S_n總小於一有限量M，那麼級數一定可以收斂。

因爲，倘級數可以發散，

$$\lim_{n\doteq\infty} S_n=\infty,$$

當n增大時，S_n可以大於有限量M，和原設不符。

所以級數一定收斂。

11.倘無限級數 $v_1+v_2+v_3+\cdots$ 祇有正項且能收斂，則自一定項向上直進 $u_n=v_n$ 或 $u_n<v_n$，級數$u_1+u_2+u_3+\cdots$ 也能收斂。

設 $V_n=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$，

又 $U_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$，

由假定知道第一級數收斂，可使m大至使

$$v_{m+1}+v_{m+2}+v_{m+3}+\cdots+v_{m+p}<e,$$

不論 p 如何。

但 $u_{m+1} \not> v_{m+1}$，$u_{m+2} \not> v_{m+2}$，…，$u_{m+p} \not> v_{m+p}$。

$$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}<\theta。$$

所以，級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 可以收斂。

12.倘無限級數 $v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots+v_n$ 項祇有正項且能發散，則自一定項向上直進 $u_n=v_n$ 或 $u_n>v_n$，級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 也能發散。

因爲，倘 u 級數能收斂，但假定 $v_n \not> u_n$，v 級數能收斂，和原設不符。

所以級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 可以發散。

13.倘無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 祇有正項，倘自第 n 項起向上直進，$\frac{u_{n+1}}{u_3} \not> k<1$，k 對於 n 爲獨立的常數，則級數可以收斂。

由假定，第 n 項後任何值 n，$\frac{u_{n+1}}{u_n} \not> k$。

就是任何值 n，　$u_{n+1} \not> ku_n$。

所以我們可以做成一表：

$$
\begin{aligned}
&u_m && = u_m, \\
&u_{m+1} && \not> u_m k, \\
&u_{m+2} \not> u_{m+1}k && \not> u_m k^2, \\
&u_{m+3} \not> u_{m+2}k && \not> u_m k^3,
\end{aligned}
$$

級數的每一項

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots \qquad (1)$$

不小於下級數的相當項

$$u_m + u_m k + umk^2 + u_m k^3 + \cdots \qquad (2)$$

但(2)是等比級數，他的公比是 k，但假定$k<1$，所以級數是遞降等比級數，當然可以收斂。

於是級數(1)是收斂。

所以級數 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ 是收斂。

14.倘無限級數 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ 祇有正項，倘自第n項起向上直進，$\frac{u_{n+1}}{u_n} \not< 1$， 則級數可以發散。

任何m值大於 n，$u_{m+1} \not< u_m$。

所以我們可以排成一表：

$$u_m \qquad\qquad = u_m,$$

$$u_{m+1} \qquad\qquad \not< u_m,$$

$$u_{m+2} \not< u_{m+1} \qquad \not< u_m,$$

$$u_{m+3} \not< u_{m+2} \qquad \not< u_m,$$

現在級數 $u_m+u_m+u_m+u_m$ 是發散。

於是級數 $u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ 也是發散。

所以級數 $u_1+u_2+\cdots+u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ 也能發散。

15. 倘無限級數含有各項的絕對值的是收斂，那麼含有正負項的無限級數是收斂。

設已知級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n, \tag{1}$$

又 $$S_{m+p}-S_m=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}。 \tag{2}$$

將 $|u_n|$ 代表 u_n 的絕對值，並設

$$\Sigma=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots \tag{3}$$

於是，由假定級數(3)是收斂，

$$\Sigma_{m+p}-\Sigma_m=|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots+|u_{m+p}| < \epsilon。 \tag{4}$$

設 $u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots+u_{r+v}$ (5)

爲級數(2)中所有正項，

設 $u_{s+1}+u_{s+2}+u_{s+3}+\cdots+u_{s+w}$ (6)

爲級數(2)中所有負項的絕對值。

(5)僅含有(4)各項的一部，

$$u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots+u_{r+v}<e。\qquad (7)$$

(6)僅含有(4)各項的一部，

$$u_{s+1}+u_{s+2}+u_{s+3}+\cdots+u_{s+w}<e。\qquad (8)$$

$$u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots+u_{r+v}-(u_{s+1}+u_{s+2}+\cdots+u_{s+w})<e，\qquad (9)$$

或，$u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots+u_{r+v}-u_{s+1}-u_{s+2}-\cdots-u_{s+w}<e$， (10)

(10)含有(2)的各項，

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots+u_{m+p}<e。$$

所以，$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ 是收斂級數。

倘級數各項的絕對值成一收斂級數，那麼原級數是絕對收斂 Absolutely convergent.

例 1.決定無限級數 $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$是否收斂。

倘級數 $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}$是收斂，則原級數一定可以收斂。

$$u_n=\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\text{；}\qquad u_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{。}$$

$$\therefore\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\times\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}=\frac{x^2}{2n(2n+1)}\text{。}$$

當 $2n(2n+1)>x^2$ 時，級數收斂，所以原級數也能收斂。

例 2.無限級數 $\frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots$，

試證 $r>1$，級數是斂級數。

$r\leqq1$，級數是發級數。

證(1)，$r>1$，級數的前項一定大於後項，所以有下面的關係：

$$\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}<\frac{2}{2^r}\text{，}$$

$$\frac{1}{4^r}+\frac{1}{5^r}+\frac{1}{6^r}+\frac{1}{7^r}<\frac{4}{4^r},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{2^{rn}}+\frac{1}{(2^n+1)^r}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^r}<\frac{2^n}{2^{nr}}。$$

所以全級數小於 $\frac{1}{1^r}+\frac{2}{2^r}+\frac{4}{4^r}+\cdots+\frac{2^n}{2^{nr}}+\cdots$。

就是小於 $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^{r-1}}+\frac{1}{2^2(r-1)}+\cdots+\frac{1}{2^i(r-1)}+\cdots$。

後面的級數r>1，就是公比 $\frac{1}{2^{r-1}}<1$， 所以原級數是斂級數。

(2)r=1，原級數成 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$，排成下形：

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\cdots$$
$$+\left[\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right]+\cdots。$$

括弧內的數值，都大於 $\frac{1}{2}$。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ ;$$

…………………………………………

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}。$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{1}{2}+\text{ 至 }n+1$$

項。所以$r=1$，原級數$>1+\frac{1}{2}n$。

令n爲無限，$1+\frac{1}{2}n$當然無限，所以級數是發級數。

(3) $r<1$，原級數的各項大於

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$的相當項。

於是，$\frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\cdots>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$。

但$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$是發級數，所以原級數是發

級數。

因數式二項定理。

16.因數符號。當 r 是正整數時，$n!^r$ 表下面各式的乘積，

$$1\times n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+2)\times(n-r+1),$$

r 是級的指數，n 是質因數。倘質因數和級的指數相等，則右角一字取去。如

$n!^n$常寫$n!$。

寫因數時，第一項單位總不寫。

$$n!^r\equiv n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),$$

又 $n!\equiv n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$。

$$n!^{-r}\equiv\frac{1}{(n+1)(u+2)\cdots(n+r)}。$$

如，$6!^3=6\times5\times4=120$；$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$。

17.證明$\dfrac{n!^r}{r!}+\dfrac{n!^{r-1}}{(r-1)!}=\dfrac{(n+1)!^r}{r!}$。