高等學校教學用書

球面三角學

Ф. Ф. ПАВЛОВ, В. П. МАШКЕВИЧ 著
劉　亞　星　譯

商務印書館

高等學校教學用書

球面三角學

Ф. Ф. 巴甫洛夫，В. П. 馬希克維奇著
劉　亞　星　譯

商務印書館

本書係根據蘇聯煤炭工業出版社(Углетехиздат)出版的巴甫洛夫(Ф. Ф. Павлов)和馬希克維奇(В. П. Машкевич)合著的“球面三角學”(Сферическая тригонометрия) 1951 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等學校鑛山測量專業教學參考書。

球　面　三　角　學

劉亞星譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新　華　書　店　總　經　售

商務印書館北京廠印刷

(51116)

1953 年 10 月初版　　版面字數 82,000

1955 年 1 月 3 版 (7 月第 2 次印) 14,001—15,000

印張 3 5/16　　定價 (7) ¥ 0.44

目　　錄

緒　言

球面三角是數學的一個分科，，研究球面上由大圓弧構成的三角形的解法。

球面三角有重要的理論上和實用上的價值，並且在天文學、高等測量學、製圖學、結晶學、礦山幾何學、儀器學及其他科學各方面有廣泛的應用，只要是需要應用補助球來研究點、線、面在空間中的相互位置時，都必須用到球面三角。

歷史介紹

球面三角出現在古代東方國家並在那裏獲得初步發展。

在古代已有巨大發展的天文學促進了這門科學的發展，由於天文學的發展，三角學首先是以球面三角的形式出現的，以後平面三角始作爲球面三角的特殊情形而出現。

球面和平面三角的創始人一般認爲是希臘學者吉巴爾哈，他於紀元前 180—125 年生活於亞歷山大里亞。

希臘學者在球面三角領域中有貢獻的還有的黎波里的狄奥多西、門涅賴和托勒密。

以後在印度人以及特別在阿剌伯人和中亞細亞人〔阿布-瓦法、納西爾·愛丁以及曾在撒馬爾罕工作過一段時間的阿爾-巴丹(850—920)〕那裏球面三角以及平面三角獲得了新的發展。

納西爾·愛丁在自己的著作"關於四邊形的論文"中作出了關於球

面和平面三角的一般性總結工作。

以後球面三角的發展歸功於勒吉奧蒙旦(1435—1476)、替荷-德-布拉格（1546—1610）、開普勒（1571—1630）等人。

十七世紀初對數的發明及詳細的三角函數及三角函數對數表的出版根本改進了球面三角的計算，而十八世紀數學分析的發展給與球面三角的公式以優美簡單的形式。

歐勒、拉格倫奇和高斯給與球面三角以現代的形式。

俄羅斯科學院院士歐勒（1707—1783）是現代球面三角的創始人，在這方面他有兩種重要著作："球面三角基礎"（1753）和"綜合球面三角學"（1779）。

歐勒球面三角形的特徵在於：1)球面三角形的每個邊和每個角都大於零而小於 π；2)假設球面上三點中的任兩點都不在同一直徑的兩端，則它們確定一個而且只確定一個球面三角形。

馬比阿斯（1846 年）推廣球面三角形邊*和角的界限到 2π，這樣的球面三角形叫做馬比阿斯三角形。

關於球面角的更廣泛的毫無限制的概念是高斯、斯圖第以及特別是天才俄羅斯數學家羅巴契夫斯基（1793—1856）給出的。

Н. И. 羅巴契夫斯基在自己的著作"想像幾何學"(1835—1836)中給出了以下關於球面三角形邊和角的公式。

$$x' = p_x + q,$$

即

$$a = p_a a + q_a$$

$$\alpha' = p_\alpha^a + q_a$$

(對其餘兩邊和兩角有同樣的公式)。

我們知道的俄羅斯第一個球面三角的教程是西門·莫爾德維諾夫船長編著的，出版於 1748 年，在這裏球面三角是"航海全書"的一部分。

* 原書此處作三邊的和，按歐勒球面三角形三邊的和已可到達 2π，故此處當為每邊的界限——譯者。

在序言中著者說了下面的話：

"爲此我有勇氣向親切的航海人員提出航海全書：根本上從幾何學開始，論及有幾何證明的球面和平面三角，論及天體和天文。"

1787 年彼得堡出版了一本不知作者姓名的"球面和平面三角學"。

同一年彼得堡出版了名叫依凡·高爾德也夫的乘艦練習生著的"布格洛夫航海新著作中事物的定義"。

在球面三角部分敍述了下列問題：

第一章"關於球面三角形中邊和角的比例"。

第二章"直角三角形解法"。

第三章"鈍角三角形的計算、等腰三角形、等邊三角形"。

每章都有習題。

以後球面三角在俄羅斯和蘇聯的發展是與天文和航海的進步同時，也是與這些科學傑出代表者的名字分不開的。

列寧格勒採鑛學院首任鑛山測量教研室主任 B. И. 巴吾曼教授和"坑藏幾何"創始人 П. К. 索巴列夫斯基教授注意到球面三角對鑛山測量的價值。他兩人都著有球面三角教科書，巴吾曼的書廣泛地流行於鑛山測量者中間，索巴列夫斯基的小册子以富於創造性著稱。

第一編　球面幾何

在着手研究球面三角以前，首先需要熟悉球面幾何的基本原理，而球面幾何是研究分佈在球面上的圖形的性質的。

§ 1　球面上的圓

在空間中與一個定點 O ——球心(圖 1)——等距離的點的軌跡叫做球面。包圍在球面中的空間叫做球。換句話說球面可以定義為半圓周圍繞它的直徑的旋轉面。連接球心和球面上任意點的線段叫做球的半徑 R, 而連接球面上兩點並且通過球心的線段叫做直徑；很明顯，同一個球的半徑相等，而直徑等於兩個半徑。

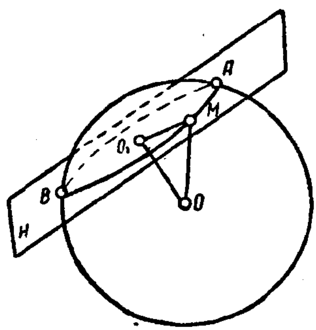

圖 1

在球面幾何的基礎中有以下定理：

定理 1　任意平面和球相截而成的截痕是圓(圖 1)。

假設，曲線 AMB 表示用平面 H 截半徑為 R 的球面所得的截痕。

從球心向平面 H 引垂線 $OO_1=d$ 並且在截線上取任意點 M；把它和 O 點、O_1 點連接起來，我們得到直角三角形 O_1OM；我們用 r 表示 O_1M, 則

$$r=\sqrt{R^2-d^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因為當 M 點沿曲線 AMB 運動時 MO 和 OO_1 的長度不變因而 $MO_1=r$ 也是常數，而曲線上所有的點都在平面 H 上；所以，平面 H 和球面的交線是圓周，這個圓周叫做小圓。小圓可以互相交截，互相平行或互相傾斜。距球心相等的小圓有相等的半徑因而相等。

從等式(1)推出，當 $d=0$ 時截面通過球心 O 並且 $r=R$。在這種場合平面和球面的截痕叫做大圓。

定理 2　大圓分球和球面爲相等的兩部分。

用通過球心的平面截球，此時我們所得的是大圓；把一部分球翻轉，並且把它這樣嵌入第二部分中，使它們的底互相重合，因爲所有球面上的點距離球心都相等；所以一部分球面上所有的點都和第二部分球面上對應的點重合。所以，大圓分球和球面爲相等的兩部分。

定理 3　通過球面上不在同一直徑兩端上的兩個點，能作而僅能作一個大圓(圖2)。

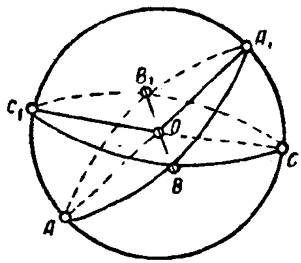

圖 2

取以 O 爲心的球面上的兩個點 A 和 B，這兩點不在同一個直徑的兩端上。因爲任意平面爲不在一條直線上的三個點所確定，所以通過 AOB 三點能作而僅能作一個平面，但因這個平面通過球心 O，所以，很明顯，它和球面的交線是大圓。

定理 4　兩個大圓的平面的交線是它們的直徑並且把它們平分。

因爲大圓 ABA_1 和 CBC_1 的平面通過圓心 O(圖 2)，所以 O 點同時在兩個大圓的平面上因而也在它們的交線上；也就是說直線 BB_1 同時是兩個圓的直徑並且平分圓周。

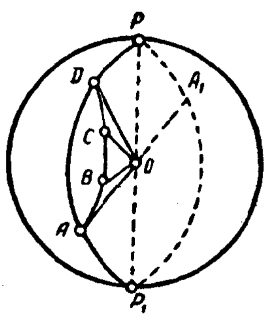

圖 3

定理 5　小於 180° 的大圓弧(圖 3)是球面上兩點間的最短球面距離。

設 A 和 D 爲球面上不在同一直徑兩端的二點，則大圓 APA_1P_1[1] 的兩個圓弧中較短的一個叫做 AD 間的球面距離。

[1] 根據"歐勒約定"。

設 A 和 A_1 在一個直徑的兩端，則 A 和 A_1 間的球面距離等於大圓的一半。

爲了證明球面上兩點間的最短距離是大圓弧，我們通過 A 和 D 作大圓弧和曲線 $ABCD$。以 $B, C\cdots$ 等點分後一曲線爲無窮小的弧 AB, $BC, CD\cdots$,使在極小的誤差範圍內可以認爲它們是大圓弧。把 $ABCD\cdots$ 和球心 O 連接起來,我們得到多面角 $OABCD$。平面角 $\widehat{AOD} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD}\cdots$；用相等的弧代替中心角,我們得到 $\overset{\smile}{AD} < \overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{CD}$ 或 $\overset{\smile}{AD} < A\overset{\smile}{BC}D$；如此,大圓在球面上就像直線在平面上一樣。

還有另一個證明,這個證明是根據下面的定理:大地線是任意曲面上兩點間的最短距離；所謂大地線是指具有這樣性質的曲線,即在這曲線任一點上曲面的法線和在這一點含於密切面內曲線自身的法線（即主法線)重合*。

在球面上（圖 4）取一點 A 並通過它作大圓弧和小圓弧，把 A 點和大圓心 O 連接起來,而 O 點同時也就是球心。

設 O_1 點是小圓心。球半徑 AO 是球面在 A 點的法線同時也是曲線 PAP_1 在 A 點的法線。因爲對大圓弧上任意點都是如此，所以大圓弧是大地線，因而也是球上的最短距離。對於小圓上的點情形就不同了；在這裏球面的法線 AO 不和曲線的主法線 AO_1 重合，所以小圓不是大地線因而也不是球面上兩點間的最短距離。

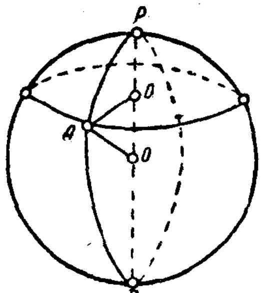

圖　4

§ 2　軸、極、極線、球面角及其度量

垂直於任意已知圓所在平面的球直徑叫做這個圓的軸。軸交球面

---

* 原書誤作"在這曲線任一點上，曲面的含於密切面內的法線，與曲線自身在此點的法線重合"。茲改正之——譯者。

於相反的兩點 P 和 P_1，這兩點叫做極（圖 5）。

任意圓上所有的點，例如 B_1、B_2、B_3、B_4，和這個圓的極 P 的距離都相等，即大圓弧 PB_1、PB_2、PB_3、PB_4 相等。極叫做小圓弧的球面中心。PB_1、PB_2 等弧的長度叫做球面半徑；如果球面半徑等於 $90°$ 則大圓弧叫做 P 和 P_1 點的極線。極是垂直於極線的大圓的交點。假設 A_2, A_3 或其他的點在 P 點的極線上，則 $A_2P=90°$，但 A_2 自己又在 A_1 點的極線 PA_2P_1 上，所以大圓 $PB_2A_2P_1$ 以及 $PB_4A_4P_1$ 等和極線互相垂直。

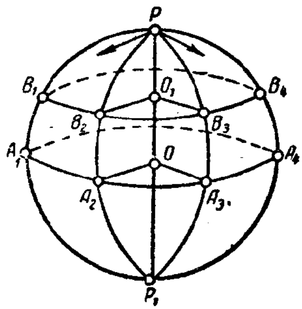

圖 5

球面角　大圓弧相交所成的角 P 和 P_1（圖 5）叫做球面角。圓弧的交點叫做球面角的頂點，而圓弧叫做球面角的邊。設兩個圓弧 A_2P 和 A_3P 在 P 點相交；則角 A_2PA_3 叫做球面角，它的頂點是 P 而邊是 PB_2 和 PB_3。球面角的度量有四種方法：1)用由平面 POA_2 和 POA_3 所構成的二面角來度量，2)用直線角 A_2OA_3 來度量，3)用弧 A_2A_3 來度量，此處 A_2A_3 是頂點 P 的極線，4)用在頂點 P 處切於球面角的邊的切線間的夾角來度量。

球面角，也像平面角一樣，可以是銳角、直角或鈍角並且它的值在從 $0°$ 到 $360°$ 之間。有一個公共邊而除外兩邊是同一個弧的延長線的兩個球面角叫做互補。由於球面角可用直線角 A_2OA_3 來度量，我們有：1)兩個互補球面角的和等於 $180°$，2)有一個公共頂點的所有球面角的和等於 $360°$。

§ 3　球面坐標

球面上點的位置可用任意坐標系確定，但在天文學、測量學、結晶學、實用地質學中最常用的是球面——赤道和水平的坐標系。

a) 赤道坐標系

在球面上取一點 A 並通過 A 作大圓弧。以 A 點爲極作極線。把地球當作一個球，我們這樣轉動球面，使 A 點和地球的極 P 重合（圖 6）。於是通過極的大圓弧 PQP_1Q_1 叫做本初經線，極線 QmQ_1 叫做赤道。

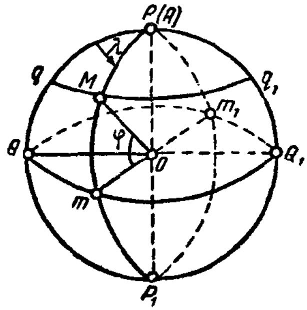

圖 6

爲了確定球面上一點 M 對於赤道 QQ_1 和本初經線 PQP_1Q_1 的位置，通過 M 點和極點 P 作大圓弧。得到的半圓周 PMP_1 叫做 M 點的經線，或經圓。從 M 點沿大圓弧到赤道的距離 mM 叫做 M 點的緯度。緯度用字母 φ 來表示並且從赤道到北極或南極是從 0° 到 90° 變化。從赤道到北極的緯度叫北緯，從赤道到南極的緯度叫南緯。

有時不用緯度而用對應於中心角 MOP 的弧 MP，MP 叫做極距並且用字母 Δ 表示。極距和緯度的和等於 90°，即

$$\varphi+\Delta=90^\circ.$$

在球面上，也像在平面上一樣，一個坐標是不够的；因爲在平行於赤道 QQ_1 的小圓 qMq_1 上，所有的點的緯度都是相同的。

通常把經度取作第二個坐標，經度是用本初經線（對地球來說本初經線就是格林威治經線）所在平面與 M 點的經線所在平面中間的二面角 QPP_1M 來度量的。二面角 QPP_1M 對應於球面角 qPM。經度用 λ[1] 表示並且按時針的方向從 0° 到 360° 變化或者分爲東西兩方面在 0° 和 180° 之間變化（東經和西經）。

假設 M 點有緯度 $\varphi_M=46^\circ$ 和經度 $\lambda_M=82^\circ$，則一般縮寫爲：$M(46^\circ; 82^\circ)$。

[1] 在結晶學中經度用字母 φ 緯度用字母 ν 極距用字母 ρ 來表示。

б）水平坐標系

假設轉動球面使A點和天頂Z重合，則極線SHN在水平面內(圖7)。

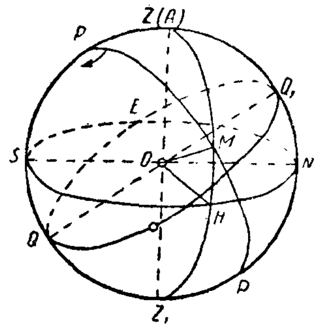

圖 7

球面上任一點M的位置在這種場合用下面兩個坐標確定：第一個是天頂距——就是圓弧ZM或中心角ZOM，第二個是這樣得到的，假設經過Z點Z_1點(底點)和M點作半圓，則第二個坐標就是方位角NH(從N點——北——到H點的圓弧，此處H點是半圓ZMZ_1和水平線$NHSE$的交點)。方位角從N點(北)或S點(南)開始按照時針方向從$0°$變到$360°$。方位角用字母A或a表示。

有時第一個坐標不用天頂距而取M點的傾角α，傾角是用弧HM或中心角HOM度量並且確定M到水平線的距離。同一個點的頂點距離和傾角之間存在一個關係式：

$$Z+\alpha=90°.$$

假設M點有頂點距離$Z_M=60°$和方位角$a_M=30°$，則縮寫成這樣：$M(60°;30°)$。

§4　球在平面上的投影、製圖網

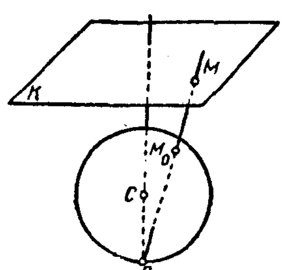

圖 8

設OM_0爲通過投射中心O和被投射點M_0的射線，則投影平面K和OM_0的交點M叫做M_0在K上的投影(透視影)(圖8)。

假設投射中心在球面上，則投影叫做製圖投影(圖9)。

坐標相同的點的軌跡叫做坐標曲線。有一定經度的坐標曲線叫做經線，有一定緯度

的坐標曲線叫做緯線。這兩種坐標曲線的總體叫做球上的坐標網，而在已知投影中它們在平面上的像叫做製圖網。

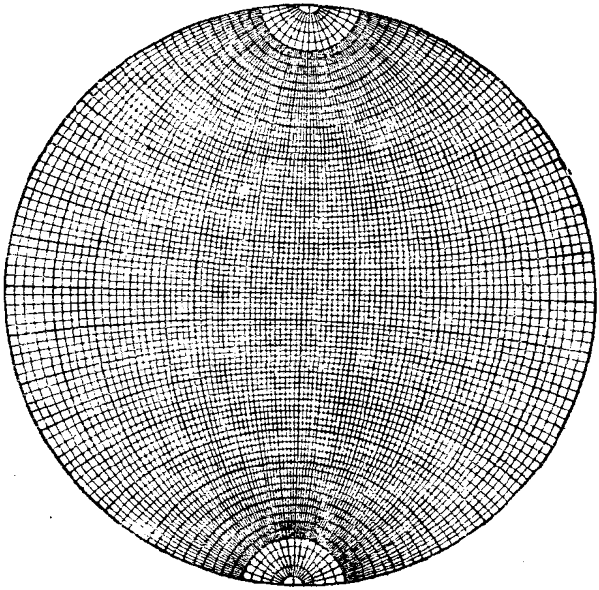

圖 9

設有從 O 點射出的光線照射在以 C 爲中心的薄玻璃球上(圖 10)，而這個球上畫有在 M_0 點相交的經線和緯線。如果這個坐標系的軸 P_0P_0' 正指着光線，則經線在投影平面上的投影成爲從 P 點(軸 P_0P_0' 的投影)射出的射線束，而緯線則投射成爲以 P 爲中心的同心圓。這樣的網叫做規則網。圖 11 表示規則製圖網的一般形式。

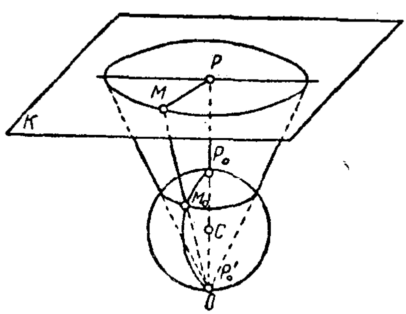

圖 10

假設球軸 P_0P_0' 的位置和中心射線 OZ 垂直(圖 12)，則在球

上得到橫斷坐標系，而在平面K上得到橫斷或等距方位網，在這上面無論經線或緯線都投射成爲圓周。

赤道和中央經線投射成爲互相垂直的直線。

圖 13 表示橫斷製圖網的一般形狀。

還有第三種製圖網——斜製圖網——這是當球軸P_0P_0'對中心光線OC斜放着時得到的。

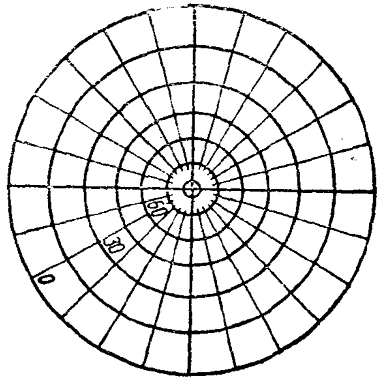

圖 11

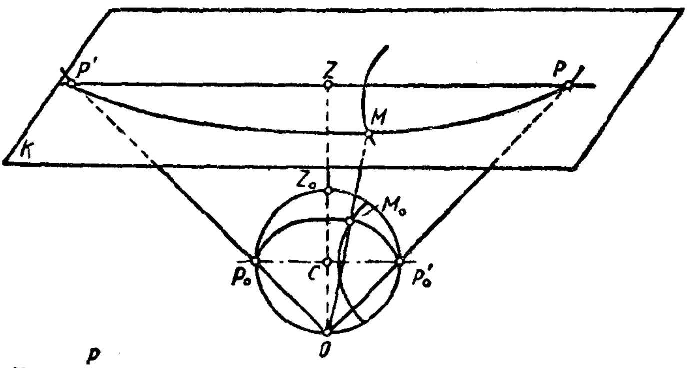

圖 12

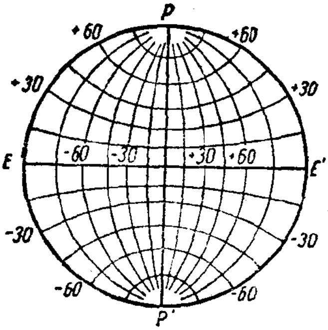

圖 13

製圖網在球面三角中常解作圖問題時有很大的用處，同時在天文學、測量學、結晶學等方面也有很大的用處。這種網保存無限小圖形的相似性，並且僅有這種網具有這種性質，就是把球上的任一圓周還投射成爲圓周[1]。

用作圖的方法很容易得到製圖網。

[1] 橫斷製圖網這個性質的證明牽涉很遠，在製圖教程“高等測量學”中可以見到。

爲此目的用，例如，10 公分長的半徑作圓（圖 14），並且分圓周 $ABCD$ 爲 24 部分。把得到的點和 AB 兩點用直線連接起來。如此，直徑 AB 和 CD 都被分成 12 部分。在互相垂直的直徑上得到一系列的點，我們依次通過每這樣三個點作圓弧，即三個點中有兩個在圓周上一個在直徑上。結果我們得到的圓弧就是在橫斷製圖投影中經線和緯線的像。

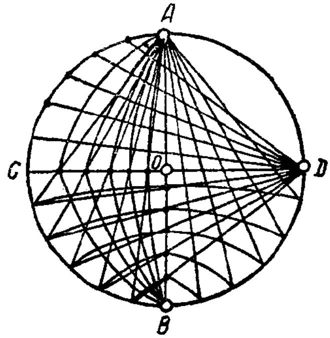

圖 14

兩個直徑的交點 O 乃是網的極點。

在圖 9 上弧中間的間隔是 2°。爲了構造網時圓周的作圖最好用特別柔軟的金屬尺，例如，偉大的俄羅斯學者——結晶學家 E. C. 非達羅維所製的尺。

§ 5　一般評論及製圖網對解球面幾何問題的應用

所有以下問題均解在 12×12 公分大小的透明紙（蠟紙）上，不用作圖器械，只用削尖的硬鉛筆一枝。

在透明蠟紙網上，作符號 $-\oplus-$ 表示極的位置和短線一表示水平直徑的左端；經線認爲是沿赤道按反時針向從 0° 到 360° 或是按順時針向和反時針向各從 0° 到 180°；上半球，即北半球所有的點都用小圓表示，下半球所有的點都用十字表示。用這些約定的符號，我們解幾個預備的例子，這些例子說明製圖網的應用。

問題 1　根據坐標作點（圖 15）。

$$A\,(\varphi=+50°;\ \lambda=280°),$$

$$B\,(\varphi=-40°;\ \lambda=50°).$$

從零點 a 起沿赤道按反時針向計算 280° 並用短線標出點 b。圍繞中心轉動蠟紙使 b 點和水平直徑的一端重合，隨後按水平直徑找 50°