目　　录

预　备　知　识

基 本 内 容

选　学　内　容

预 备 知 识

I 字母代数

在算术里，大家学习了整数和分数（包括小数），以及它们的运算，并会用这些知识解决简单的应用问题．在代数里，还要继续学习数和数的运算，以及它们的应用．代数和算术有一个明显的不同，就是将广泛地用 a、b、c、x、y、z 等字母来代表数．为什么要用字母代表数呢？这是大家首先会提出的问题．学习代数就从这里开始．

第一节 用字母代表数

常 见 公 式

大家知道，一个长方形房间的长是 5 米，宽是 3 米，那么它的地面面积是

$$5\times3=15(\text{平方米}).$$

一块长方形土地的长是 38.5 丈，宽是 22丈，那么这块土地的面积是

$$38.5\times22=847(\text{平方丈}).$$

计算其他长方形的面积，也都是用长和宽相乘，写成一般公式，就是

$$\text{长方形的面积}=\text{长}\times\text{宽}. \tag{1}$$

为简便起见，用字母 S 表示“长方形的面积”，a 表示它的“长”，b 表示它的“宽”，公式(1)可以简记为

$$S=ab,^{*} \tag{2}$$

这里的 a 和 b 应取相同的单位，或都是米，或都是丈，等等.

公式(2)简单明白，它从计算个别的、特殊的长方形面积中，概括出一般的规律，表示了长方形的面积和边长之间的普遍关系.

可以举出许多常见公式，都可以用“字母代数”的方法来表示，例如：

三角形的面积＝(底×高)的一半，　　$S=\frac{1}{2}bh$;

梯形的面积＝(上底＋下底)×高的一半，　　$S=\frac{1}{2}(a+b)h$;

距离＝速度×时间，　　$s=vt$;

重量＝体积×比重，　　$W=Vd$.

数的运算规律

算术里讲过，整数和分数(包括小数)的加法适合交换律. 例如：

$$2+3=3+2,$$

$$\frac{1}{2}+0.8=0.8+\frac{1}{2},$$

等等. 用话来叙述这个普遍规律，就是“任何两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变”. 用字母表示，可以写成

$$a+b=b+a \tag{1}$$

其中 a、b 代表任何整数、分数或小数.

数的加法还适合结合律，如

---

* 字母和数，或字母和字母相乘时，通常把“×”号记作“·”或者省略不写，如把 $a\times b$ 写成 $a\cdot b$ 或 ab，把 $2\times a$ 写成 $2\cdot a$ 或 $2a$，把 $a\times 2$ 也写成 $2a$(不写成 $a2$). 但数和数相乘时，最好仍写“×”号，如果把 2×3 写成 $2\cdot 3$，容易和小数混淆；如果写成 23，就变成二十三了.

$$(15+0.7)+0.3=15+(0.7+0.3).$$

用话来说，就是"任何三个数相加，无论先加哪两个数，它们的和不变"．用字母表示，可以写成

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{2}$$

其中 a、b、c 代表任何整数、分数或小数．

同样，数的乘法适合交换律、结合律和分配律，把它们用字母表示，可以写成

$$ab=ba \tag{3}$$

$$(ab)c=a(bc) \tag{4}$$

$$(a+b)c=ac+bc \quad 或 \quad c(a+b)=ca+cb \tag{5}$$

这里的 a、b、c 代表任何整数、分数或小数．

上面的(1)—(5)都表示数的运算规律，总称为基本运算定律．

用"字母代数"的方法，还可以表示数的运算规则．例如，同分母分数的加法规则：

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},$$

同分母分数的减法规则：

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},$$

分数的乘法和除法规则：

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

因为零不能做除数，所以分母中的字母都不能是零．

表示两个比相等的式子，如 1:5=10:50，叫做比例．

在比例中，两外项的积等于两内项的积．这个比例的基本

性质，用字母表示，就是：

如果 $$\underbrace{a:\underbrace{b=c}_{\text{内项}}:d}_{\text{外项}},$$

那么 $$ad=bc$$

比例也可以写成分数的形式，如 $2:3=5:7.5$，可以写成 $\frac{2}{3}=\frac{5}{7.5}$，根据比例的基本性质，就有 $2\times7.5=3\times5$. 一般地，用字母表示，如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，就有 $ad=bc$.

实际中，还有很多数量关系是用字母代数的方法来表示的。它的好处是能简单明白地表示数量关系的普遍规律.

“翻　译”

看了这个标题，大家可能会问，学外语要翻译，学数学怎么也要翻译呢？其实一点也不奇怪，上面所说的就是数学的“翻译”问题．“长方形的面积等于长乘宽”，写成“$S=ab$”，就是把一句话“翻译”成了数学式子．又如“$a+b=b+a$”，用话来说，就是“任何两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变”，这就把数学式子“翻译”成了一句话．这种“话”和数学式子的互相“翻译”，是学习代数的一个基本功．下面再举两个例子.

例 1　用字母 x 代表“这个数”，把下面的话写成数学式子：

(1) 这个数的 3 倍，　　$3x$；

(2) 这个数的一半，　　$\frac{1}{2}x$；

(3) 这个数与 5 的和，　　$x+5$；

(4) 这个数的 2 倍减 7，　　$2x-7$.

例2 用语言叙述下面的数学式子:

(1) $a+3$,　　　　a与3的和;

(2) $b-1$,　　　　b与1的差;

(3) $2(a+b)$,　　　　a与b的和的2倍;

(4) $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$,　　　　a的$\frac{1}{2}$与b的$\frac{1}{3}$的差.

习　　题

1. 写出下列公式:

(1) 长方形的周长(l)等于长(a)的2倍与宽(b)的2倍的和;

(2) 长方形的周长(l)等于长(a)与宽(b)的和的2倍.

2. 已知圆的半径R,求:

(1) 圆周长l,　　(2) 圆面积S.

3. 写出火车所走的路程s(公里)的公式:

(1) 火车走了t小时,每小时走60公里;

(2) 火车走了2.5小时,每小时走v公里;

(3) 火车走了t小时,每小时走v公里.

4. 用数学式子表示:

(1) 比x大2的数,

(2) 比x小$\frac{1}{3}$的数.

5. 用语言叙述下列数学式子:

(1) $2(a-b)$,

(2) $(x+y)(x-y)$.

6. 一块长方形的空地,长是a丈,宽是b丈,划出它的$\frac{1}{4}$做操场,这个操场的面积是多少?

7. 面粉每袋重50斤,大米每袋重100斤,a袋面粉和b袋大米一共重多少斤?

8. 举出两个实际例子,说明什么是成正比例的量,什么是成反比例的量.

第二节　代数式

代数式的值

前面提到的用数和字母表示的数学式子，如 ab，$3x$，$\frac{1}{2}x$，$x+5$，$2x-7$ 等都叫做代数式．单独一个数或一个字母，如 x，$\frac{4}{5}$ 也是代数式．这些代数式是把实际问题中的数量关系，经过“翻译”而来的．

我们用“字母代数”的方法，把长方形的面积和边长的普遍关系总结为公式 $S=ab$．这是由特殊到一般．对于不同的长方形，只要把它们的长和宽的具体数值代进代数式 ab 里去，就可以算出它们的面积 S．这是由一般到特殊．例如：

$a=7$米，$b=12$米时，$S=7\times12=84$（平方米）；

$a=100$ 毫米，$b=200$ 毫米时，$S=100\times200=20000$（平方毫米）．

用数代替代数式里的字母计算出的结果，叫做这个代数式的值．可见，不仅字母可以代表数，由字母组成的代数式，也是代表数的．一个代数式的值是多少，这要根据字母所取的值来确定，字母取的值不同，一般来说，代数式的值也不同．字母取什么值，主要根据字母所代表的意义来定．

例1　x 取下面所给的值，代数式 $2x+3$ 的值各是多少？

(1) $x=\frac{3}{2}$，　　(2) $x=0$．

解：(1) $2\times\frac{3}{2}+3=6$，　　(2) $2\times0+3=3$．

答：$x=\frac{3}{2}$时，$2x+3$ 的值是 6；$x=0$ 时，$2x+3$ 的值是 3．

例 2　灌溉渠的横断面是一个梯形，如图 1．如果上底是 a 米，下底是 b 米，高是 h 米，全长是 l 米．

（1）用代数式表示挖出的土方量（1 方土为 1 立方米）；

（2）计算上底是 5 米，下底是 3 米，高是 2.5 米，长是 1500 米的一段渠道的土方量．

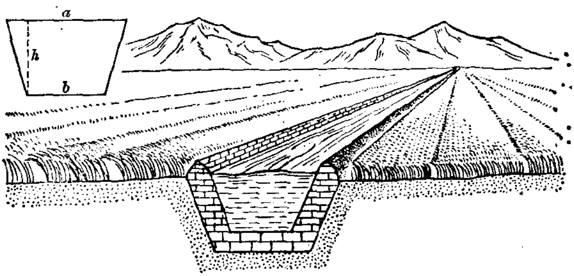

图　1

解：（1）挖出的土方量等于横断面的面积与长的乘积．根据梯形面积的计算公式，表示挖出的土方量的代数式为

$$\frac{1}{2}(a+b)hl.$$

（2）把 $a=5$, $b=3$, $h=2.5$, $l=1500$，代入上式：

$$\frac{1}{2}(5+3)\times 2.5\times 1500=15000.$$

答：1500 米长的一段渠道挖出的土方量是 15000 立方米．

化简代数式

我们从简单的例子说起．

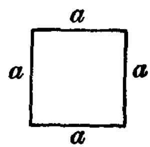

图　2

如果用字母 a 表示正方形（图 2）一边的长，那么它的周长等于四条边长的和

$$a+a+a+a, \tag{1}$$

也可以说，它的周长等于一条边长的 4 倍

$$4a. \tag{2}$$

$$\therefore^{*} \quad a+a+a+a=4a. \tag{3}$$

这就是说，相同的字母相加，可以和数一样，简写成乘积的形式。因此，等式(3)可以看作是把代数式(1)化简为代数式(2)。

例 1 化简代数式：

(1) $4a+7a$.

$$\begin{array}{r|c|l} & 4 & a \\ +) & 7 & a \\ \hline & 11 & a \end{array}$$

(2) $8(a+b)+(a+b)$.

$$\begin{array}{r|c|l} & 8\cdot & (a+b) \\ +) & 1\cdot & (a+b) \\ \hline & 9\cdot & (a+b) \end{array} \qquad \because (a+b)=1\cdot(a+b).$$

含有相同字母的二式相加，应用乘法分配律就得出了结果，如 $4a+7a=(4+7)a=11a$.

(3) $(a+4)+(3a+2)$.

$$\begin{array}{rr} & a+4 \\ +) & 3a+2 \\ \hline & 4a+6 \end{array}$$

(4) $3ax+2bx$.

$3ax+2bx=(3a+2b)x$.

a 和 b 表示的数可能不同，因而 $3a$ 和 $2b$ 不能合并。

(5) $ab+ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)ab=3ab$.

---

* 符号"∴"表示"所以"，符号"∵"表示"因为"。

(6) $8xy-3xy$.

$$\begin{array}{rll} & 8 & xy \\ -) & 3 & xy \\ \hline & 5 & xy \end{array}$$

(7) $4x\cdot3y$.

用乘法的交换律和结合律，得

$$4x\cdot3y=4\cdot3\cdot x\cdot y=12xy.$$

例2 工厂生产一批零件，如图3. 它们的形状相同，但大小不一，求计算这批零件面积的公式.

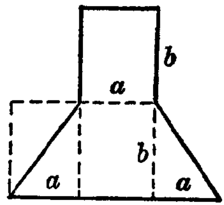

图 3

解：这批零件的面积有几种算法. 下面举出两种方法：

1. 把图3分成两个长和宽分别是 a 和 b 的长方形，两个底边是 a 高是 b 的三角形. 这四个图形的总面积就是零件的面积，即

$$ab+ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=3ab. \tag{1}$$

2. 把图3分成一个长方形和一个梯形. 这两个图形面积的和，就是零件的面积，即

$$\begin{aligned}ab+\frac{1}{2}b[a+(a+a+a)]&=ab+\frac{1}{2}b\times4a\\&=ab+2ab=3ab.\end{aligned} \tag{2}$$

两种算法结果一样. 事实上，如果把右边的三角形移在左边三角形的上面，正好得到三个相等的长方形，所以零件的面积是 $3ab$.

等式(1)和(2)是把代数式

$$ab+ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab \tag{3}$$

和

$$ab+\frac{1}{2}b[a+(a+a+a)] \tag{4}$$

都化简成　　　　　$3ab$.　　　　　　　　　　　　(5)

(3)、(4)、(5)都可以作为这批零件面积的计算公式，但在实际计算时，利用(5)式比用(3)或(4)式要简便得多.

习　题

1. 求 $x=\frac{1}{3}, b=2$ 时，代数式 $3x+b$ 的值.

2. 填写下面的表：

x	1	$1\frac{1}{2}$	0.5	0	a
$x+3$					
$2x+\frac{1}{2}$					

3. 已知长方体的长是 a 米，宽是 b 米，高是 c 米：

   (1) 写出它的体积 V 的计算公式；

   (2) 如果有一个库房的长是 20 米，宽是 6 米，高是 4.5 米，试根据上面的公式，计算这个库房的容积.

4. 化简下列各代数式：

   (1) $7ab+4ab+8ab$,　　　　(2) $8ax-2ax+12ax-4ax$,

   (3) $5.3a+2.6a-1.7a$,　　　(4) $3(a+b)+n(a+b)$.

5. 设 $a=7$, $b=5$, 求下列各代数式的值：

   (1) $(2a+b)(a-b)$,　　　　(2) $2a+b(a-b)$,

   (3) $(2a+b)a-b$,　　　　　(4) $2(a+b)(a-b)$.

   这些代数式，由于括号位置的不同，而有不同的值.

6. (1) 两个数的差是 8，减数是 6，用代数式表示被减数.

   (2) 除数是 a，商是 b，余数是零，用代数式表示被除数.

第三节　求未知数

作为前面两节知识的初步应用，这里举例说明怎样用字母

代数的方法求未知数的问题.

例 1 按铜和锡的比是 3:1 配制铜锡合金, 如果有铜 29.7 公斤, 应取锡多少公斤?

解: 题中铜有 29.7 公斤, 铜和锡的比是 3:1, 这些都是已经知道的数, 叫做已知数.

应取锡的重量是一个需要求的数, 叫做未知数, 可以用字母 x 代表这个数, 单位是公斤.

设应取锡 x 公斤, 那么 29.7 和 x 的比应该是 3:1. 列出比例式:

$$29.7 : x = 3 : 1.$$

由比例的基本性质, 得

$$3x = 29.7.$$

上式表示 3 和 x 的积等于 29.7. 这是已知两数的积和一个乘数, 求另一个乘数的问题. 用除法,

$$x = \frac{29.7}{3},$$

$$x = 9.9.$$

检验: $$\frac{29.7}{9.9} = \frac{297}{99} = \frac{3}{1}.$$

答: 应取锡 9.9 公斤.

例 2 求未知数 x:

(1) $\frac{x}{7} = 16$, (2) $2x + 1 = 15$.

解: (1) $\frac{x}{7} = 16$.

这个等式表示 x 除以 7 的商是 16, 要求 x, 用乘法,

$$x = 16 \times 7.$$