

目 录

预 备 知 识

I	字母代数	1
依式	第一节 用字母代表数	1
编	常见公式	1
号	数的运算规律	2
册	“翻译”	4
式	第二节 代数式	6
	代数式的值	6
	化简代数式	7
	第三节 求未知数	10
	小结	13
	有理数	16
	第一节 有理数的意义	16
	正数和负数	16
	数轴	17
	大小的比较	18
	图表	19
	第二节 有理数的加、减法	22
	加法规则	22
	减法规则	24
	第三节 有理数的乘、除法	29
	乘法规则	29
	除法规则	31
算	有理数的乘方	35
	小结	37

基本内容

第一章 整式	4
第一节 代数式	4
一般概念	41
名词解释	44
第二节 整式的加、减法	46
第三节 整式的乘法	51
幂的运算	51
单项式的乘法	54
多项式的乘法	55
小结	58
第二章 一次方程	63
第一节 方程的基本知识	63
第二节 一元一次方程	67
方程的变形	67
解法举例	69
应用举例	73
第三节 二元一次方程组	78
两种基本解法	80
应用举例	85
第四节 解的几何意义	91
平面直角坐标系	91
二元一次方程的图形	95
解的几何意义	97
小结	99
第三章 乘法公式和因式分解	103
第一节 乘法公式	103
第二节 因式分解	110
提公因式法	111
应用公式法	112
叉乘试算法	115
分组分解法	118

第三节 恒等变形	123
小结	128
第四章 分式	134
第一节 基本知识	135
基本性质	135
约分	137
真分式和假分式	138
通分	143
第二节 分式的运算	145
分式的加、减法	145
分式的乘、除法	148
第三节 零指数、负整数指数幂	153
第四节 分式方程	158
分式方程的解法	158
分式方程组	165
小结	170
第五章 根式	176
第一节 开方和方根	176
平方根和立方根	176
开方法	179
实数和近似值	183
第二节 根式的恒等变形	187
算术根	188
根式的变形规则	190
根式的运算和化简	195
第三节 分数指数幂	204
小结	208
第六章 二次方程	216
第一节 一元二次方程	216
配方解法	217
公式解法	219
列方程解应用题	221

第二节 一元二次方程的讨论	225
根的判别式	226
虚数根	227
根和系数的关系	233
根的几何意义	235
第三节 方程的分解因式解法	239
用分解因式法解一元二次方程	240
用求根法分解二次三项式	242
用分解因式法解高次方程	243
第四节 增根问题	245
同解方程和增根的概念	245
分式方程	247
根式方程	249
第五节 二元二次方程组	252
小结	255
第七章 不等式	262
第一节 不等式和它的性质	262
不等式	262
不等式的性质	263
第二节 一元一次不等式	266
第三节 一元一次不等式组	268
第四节 一元二次不等式	272
图象解法	273
分解因式解法	276
小结	281
第八章 对数	284
对数和指数	284
第一节 常用对数	286
常用对数的意义	286
查表求常用对数	288
首数和尾数	289
反对数表	292

第二节 对数的运算规则和应用	295
积、商、幂的对数	296
利用对数简化计算	299
换底公式	303
第三节 自然对数	306
小结	309
总结	315

选 学 内 容

I 行列式	321
第一节 二阶和三阶行列式	321
二阶行列式	321
三阶行列式	324
第二节 三阶行列式的性质	329
第三节 三阶行列式的降阶展开	336
第四节 高阶行列式简介	340
四阶行列式	341
四元线性方程组	343
II 高次方程	350
第一节 综合除法	351
第二节 余数定理和因式定理	354
余数定理	354
因式定理	356
第三节 高次方程的根	360
代数基本定理	360
实系数方程的虚数根	362
III 数列	367
第一节 等差数列	368
第二节 等比数列	373
第三节 其他数列举例	378

IV 排列、组合和二项式定理	384
第一节 排列.....	384
两个简单原理.....	384
全排列.....	385
选排列.....	387
第二节 组合.....	392
第三节 数学归纳法.....	397
第四节 二项式定理.....	401

预 备 知 识

I 字母代数

在算术里,大家学习了整数和分数(包括小数),以及它们的运算,并会用这些知识解决简单的应用问题。在代数里,还要继续学习数和数的运算,以及它们的应用。代数和算术有一个明显的不同,就是将广泛地用 a, b, c, x, y, z 等字母来代表数。为什么用字母代表数呢?这是大家首先会提出的问题。学习代数就从这里开始。

第一节 用字母代表数

常见公式

大家知道,一个长方形房间的长是5米,宽是3米,那么它的地面面积是

$$5 \times 3 = 15(\text{平方米}).$$

一块长方形土地的长是38.5丈,宽是22丈,那么这块土地的面积是

$$38.5 \times 22 = 847(\text{平方丈}).$$

计算其他长方形的面积,也都是用长和宽相乘,写成一般公式,就是

$$\text{长方形的面积} = \text{长} \times \text{宽}. \quad (1)$$

为简便起见,用字母 S 表示“长方形的面积”, a 表示它的“长”, b 表示它的“宽”,公式(1)可以简记为

$$S=ab, * \quad (2)$$

这里的 a 和 b 应取相同的单位, 或都是米, 或都是丈, 等等.

公式(2)简单明白, 它从计算个别的、特殊的长方形面积中, 概括出一般的规律, 表示了长方形的面积和边长之间的普遍关系.

可以举出许多常见公式, 都可以用“字母代数”的方法来表示, 例如:

$$\text{三角形的面积} = (\text{底} \times \text{高}) \text{的一半}, \quad S = \frac{1}{2}bh;$$

$$\text{梯形的面积} = (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高的一半}, \quad S = \frac{1}{2}(a+b)h;$$

$$\text{距离} = \text{速度} \times \text{时间}, \quad s = vt;$$

$$\text{重量} = \text{体积} \times \text{比重}, \quad W = Vd.$$

数的运算规律

算术里讲过, 整数和分数(包括小数)的加法适合交换律. 例如:

$$2+3=3+2,$$

$$\frac{1}{2}+0.8=0.8+\frac{1}{2},$$

等等. 用话来叙述这个普遍规律, 就是“任何两个数相加, 交换加数的位置, 它们的和不变”. 用字母表示, 可以写成

$$a+b=b+a \quad (1)$$

其中 a, b 代表任何整数、分数或小数.

数的加法还适合结合律, 如

* 字母和数, 或字母和字母相乘时, 通常把“ \times ”号记作“ \cdot ”或者省略不写, 如把 $a \times b$ 写成 $a \cdot b$ 或 ab , 把 $2 \times a$ 写成 $2 \cdot a$ 或 $2a$, 把 $a \times 2$ 也写成 $2a$ (不写成 $a2$). 但数和数相乘时, 最好仍写“ \times ”号, 如果把 2×3 写成 $2 \cdot 3$, 容易和小数混淆; 如果写成 23 , 就变成二十三了.

$$(15+0.7)+0.3=15+(0.7+0.3).$$

用话来说,就是“任何三个数相加,无论先加哪两个数,它们的和不变”。用字母表示,可以写成

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad (2)$$

其中 a, b, c 代表任何整数、分数或小数。

同样,数的乘法适合交换律、结合律和分配律,把它们用字母表示,可以写成

$$ab=ba \quad (3)$$

$$(ab)c=a(bc) \quad (4)$$

$$(a+b)c=ac+bc \text{ 或 } c(a+b)=ca+cb \quad (5)$$

这里的 a, b, c 代表任何整数、分数或小数。

上面的(1)–(5)都表示数的运算规律,总称为基本运算定律。

用“字母代数”的方法,还可以表示数的运算规则。例如,同分母分数的加法规则:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

同分母分数的减法规则:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c},$$

分数的乘法和除法规则:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

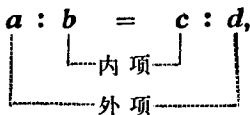
因为零不能做除数,所以分母中的字母都不能是零。

表示两个比相等的式子,如 $1:5=10:50$, 叫做比例。

在比例中, 两外项的积等于两内项的积。这个比例的基本

性质,用字母表示,就是:

如果

$$a : b = c : d,$$


内项

外项

那么

$$ad = bc$$

比例也可以写成分数的形式,如 $2:3=5:7.5$,可以写成 $\frac{2}{3} = \frac{5}{7.5}$,

根据比例的基本性质,就有 $2 \times 7.5 = 3 \times 5$.一般地,用字母表示,

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,就有 $ad = bc$.

实际中,还有很多数量关系是用字母代数的方法来表示的.它的好处是能简单明白地表示数量关系的普遍规律.

“翻译”

看了这个标题,大家可能会问,学外语要翻译,学数学怎么也要翻译呢?其实一点也不奇怪,上面所说的就是数学的“翻译”问题.“长方形的面积等于长乘宽”,写成“ $S = ab$ ”,就是把一句话“翻译”成了数学式子.又如“ $a + b = b + a$ ”,用话来说,就是“任何两个数相加,交换加数的位置,它们的和不变”,这就把数学式子“翻译”成了一句话.这种“话”和数学式子的互相“翻译”,是学习代数的一个基本功.下面再举两个例子.

例1 用字母 x 代表“这个数”,把下面的话写成数学式子:

(1) 这个数的3倍, $3x$;

(2) 这个数的一半, $\frac{1}{2}x$;

(3) 这个数与5的和, $x + 5$;

(4) 这个数的2倍减7, $2x - 7$.

例 2 用语言叙述下面的数学式子:

- (1) $a+3$, a 与 3 的和;
(2) $b-1$, b 与 1 的差;
(3) $2(a+b)$, a 与 b 的和的 2 倍;
(4) $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$, a 的 $\frac{1}{2}$ 与 b 的 $\frac{1}{3}$ 的差.

习 题

1. 写出下列公式:

- (1) 长方形的周长(l)等于长(a)的 2 倍与宽(b)的 2 倍的和;
(2) 长方形的周长(l)等于长(a)与宽(b)的 和的 2 倍.

2. 已知圆的半径 R , 求:

- (1) 圆周长 l , (2) 圆面积 S .

3. 写出火车所走的路程 s (公里)的公式:

- (1) 火车走了 t 小时, 每小时走 60 公里;
(2) 火车走了 2.5 小时, 每小时走 v 公里;
(3) 火车走了 t 小时, 每小时走 v 公里.

4. 用数学式子表示:

- (1) 比 x 大 2 的数,
(2) 比 x 小 $\frac{1}{3}$ 的数.

5. 用语言叙述下列数学式子:

- (1) $2(a-b)$,
(2) $(x+y)(x-y)$.

6. 一块长方形的空地, 长是 a 丈, 宽是 b 丈, 划出它的 $\frac{1}{4}$ 做操场, 这个操场的面积是多少?

7. 面粉每袋重 50 斤, 大米每袋重 100 斤, a 袋面粉和 b 袋大米一共重多少斤?

8. 举出两个实际例子, 说明什么是成正比例的量, 什么是成反比例的量.

第二节 代数式

代数式的值

前面提到的用数和字母表示的数学式子，如 ab , $3x$, $\frac{1}{2}x$, $x+5$, $2x-7$ 等都叫做代数式。单独一个数或一个字母，如 x , $\frac{4}{5}$ 也是代数式。这些代数式是把实际问题中的数量关系，经过“翻译”而来的。

我们用“字母代数”的方法，把长方形的面积和边长的普遍关系总结为公式 $S=ab$ 。这是由特殊到一般。对于不同的长方形，只要把它们的长和宽的具体数值代进代数式 ab 里去，就可以算出它们的面积 S 。这是由一般到特殊。例如：

$$a=7\text{米}, b=12\text{米时}, S=7 \times 12=84 \text{ (平方米);}$$

$a=100\text{毫米}, b=200\text{毫米时}, S=100 \times 200=20000 \text{ (平方毫米)}.$

用数代替代数式里的字母计算出的结果，叫做这个代数式的值。可见，不仅字母可以代表数，由字母组成的代数式，也是代表数的。一个代数式的值是多少，这要根据字母所取的值来确定，字母取的值不同，一般来说，代数式的值也不同。字母取什么值，主要根据字母所代表的意义来定。

例1 x 取下面所给的值，代数式 $2x+3$ 的值各是多少？

$$(1) x = \frac{3}{2},$$

$$(2) x = 0.$$

解：(1) $2 \times \frac{3}{2} + 3 = 6,$

$$(2) 2 \times 0 + 3 = 3.$$

答： $x = \frac{3}{2}$ 时， $2x+3$ 的值是 6； $x=0$ 时， $2x+3$ 的值是 3。

例2 灌溉渠的横断面是一个梯形,如图1. 如果上底是 a 米,下底是 b 米,高是 h 米,全长是 l 米.

- (1) 用代数式表示挖出的土方量(1方土为1立方米);
 (2) 计算上底是5米,下底是3米,高是2.5米,长是1500米的一段渠道的土方量.

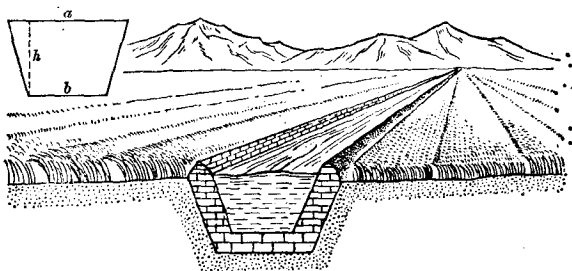


图 1

解: (1) 挖出的土方量等于横断面的面积与长的乘积. 根据梯形面积的计算公式, 表示挖出的土方量的代数式为

$$\frac{1}{2}(a+b)hl.$$

(2) 把 $a=5$, $b=3$, $h=2.5$, $l=1500$, 代入上式:

$$\frac{1}{2}(5+3) \times 2.5 \times 1500 = 15000.$$

答: 1500米长的一段渠道挖出的土方量是15000立方米.

化简代数式

我们从简单的例子说起.

如果用字母 a 表示正方形(图2)一边的长, 那么它的周长等于四条边长的和

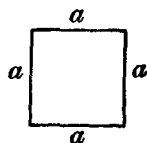


图 2

$$a+a+a+a,$$

(1)

也可以说,它的周长等于一条边长的4倍

$$4a. \quad (2)$$

$$\therefore * \quad a+a+a+a=4a. \quad (3)$$

这就是说,相同的字母相加,可以和数一样,简写成乘积的形式.

因此,等式(3)可以看作是代数式(1)化简为代数式(2).

例1 化简代数式:

$$(1) 4a+7a.$$

$$\begin{array}{r} \boxed{4} a \\ +) \boxed{7} a \\ \hline \boxed{11} a \end{array}$$

$$(2) 8(a+b)+(a+b).$$

$$\begin{array}{r} \boxed{8} \cdot (a+b) \\ +) \boxed{1} \cdot (a+b) \\ \hline \boxed{9} \cdot (a+b) \end{array} \quad \because (a+b)=1 \cdot (a+b).$$

含有相同字母的二式相加,应用乘法分配律就得出了结果,

如 $4a+7a=(4+7)a=11a$.

$$(3) (a+4)+(3a+2).$$

$$\begin{array}{r} a+4 \\ +) 3a+2 \\ \hline 4a+6 \end{array}$$

$$(4) 3ax+2bx.$$

$$3ax+2bx=(3a+2b)x.$$

a 和 b 表示的数可能不同,因而 $3a$ 和 $2b$ 不能合并.

$$(5) ab+ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)ab=3ab.$$

* 符号“ \therefore ”表示“所以”,符号“ \because ”表示“因为”.

$$(6) 8xy - 3xy.$$

$$\begin{array}{r} \boxed{8xy} \\ -) \boxed{3xy} \\ \hline \boxed{5xy} \end{array}$$

$$(7) 4x \cdot 3y.$$

用乘法的交换律和结合律,得

$$4x \cdot 3y = 4 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 12xy.$$

例2 工厂生产一批零件,如图3. 它们的形状相同,但大小不一,

求计算这批零件面积的公式.

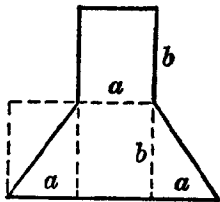


图 3

解: 这批零件的面积有几种算法. 下面举出两种方法:

1. 把图3分成两个长和宽分别是 a 和 b 的长方形,两个底是 a 高是 b 的三角形. 这四个图形的总面积就是零件的面积,即

$$ab + ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab = 3ab. \quad (1)$$

2. 把图3分成一个长方形和一个梯形. 这两个图形面积的和,就是零件的面积,即

$$\begin{aligned} ab + \frac{1}{2}b[a + (a + a + a)] &= ab + \frac{1}{2}b \times 4a \\ &= ab + 2ab = 3ab. \end{aligned} \quad (2)$$

两种算法结果一样. 事实上,如果把右边的三角形移在左边三角形的上面,正好得到三个相等的长方形,所以零件的面积是 $3ab$.

等式(1)和(2)是把代数式

$$ab + ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab \quad (3)$$

和
$$ab + \frac{1}{2}b[a + (a + a + a)] \quad (4)$$

都化简成

$3ab$.

(5)

(3)、(4)、(5)都可以作为这批零件面积的计算公式,但在实际计算时,利用(5)式比用(3)或(4)式要简便得多.

习 题

1. 求 $x = \frac{1}{3}$, $b = 2$ 时,代数式 $3x + b$ 的值.
2. 填写下面的表:

x	1	$1\frac{1}{2}$	0.5	0	a
$x+3$					
$2x+\frac{1}{2}$					

3. 已知长方体的长是 a 米,宽是 b 米,高是 c 米:
 - (1) 写出它的体积 V 的计算公式;
 - (2) 如果有一个库房的长是 20 米,宽是 6 米,高是 4.5 米,试根据上面的公式,计算这个库房的容积.
4. 化简下列各代数式:
 - (1) $7ab + 4ab + 8ab$,
 - (2) $8ax - 2ax + 12ax - 4ax$,
 - (3) $5.3a + 2.6a - 1.7a$,
 - (4) $3(a+b) + n(a+b)$.
5. 设 $a = 7$, $b = 5$, 求下列各代数式的值:
 - (1) $(2a+b)(a-b)$,
 - (2) $2a+b(a-b)$,
 - (3) $(2a+b)a-b$,
 - (4) $2(a+b)(a-b)$.这些代数式,由于括号位置的不同,而有不同的值.
6. (1) 两个数的差是 8,减数是 6,用代数式表示被减数.
(2) 除数是 a ,商是 b ,余数是零,用代数式表示被除数.

第三节 求未知数

作为前面两节知识的初步应用,这里举例说明怎样用字母

代数的方法求未知数的问题。

例1 按铜和锡的比是3:1配制铜锡合金，如果有铜29.7公斤，应取锡多少公斤？

解：题中铜有29.7公斤，铜和锡的比是3:1，这些都是已经知道的数，叫做已知数。

应取锡的重量是一个需要求的数，叫做未知数，可以用字母 x 代表这个数，单位是公斤。

设应取锡 x 公斤，那么29.7和 x 的比应该是3:1。列出比例式：

$$29.7:x=3:1.$$

由比例的基本性质，得

$$3x=29.7.$$

上式表示3和 x 的积等于29.7。这是已知两数的积和一个乘数，求另一个乘数的问题。用除法，

$$x=\frac{29.7}{3},$$

$$x=9.9.$$

检验：

$$\frac{29.7}{9.9}=\frac{297}{99}=\frac{3}{1}.$$

答：应取锡9.9公斤。

例2 求未知数 x ：

$$(1) \frac{x}{7}=16,$$

$$(2) 2x+1=15.$$

解：(1) $\frac{x}{7}=16.$

这个等式表示 x 除以7的商是16，要求 x ，用乘法，

$$x=16 \times 7.$$