

科学技术成果报告

科学技术文献出版社

一九七五年六月

0.377
9.8

科学技术成果报告

圆柱曲板侧压稳定性研究

(只限国内发行)

编辑者: 中国科学技术情报研究所

出版者: 科学技术文献出版社

印刷者: 中国科学技术情报研究所印刷厂

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

开本 $787 \times 1092 \cdot \frac{1}{16}$ 6印张 115.2 千字

统一书号: 15176 · 73 定价: 0.20元

1975年6月出版

毛主席语录

认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。认识的能动作用，不但表现于从感性的认识到理性的认识之能动的飞跃，更重要的还须表现于从理性的认识到革命的实践这一个飞跃。

目 录

弹性圆柱曲板的屈曲.....	(1)
前言.....	(1)
符号.....	(3)
(一) 逐级摄动法.....	(4)
(二) 摄动参数的选择方法.....	(7)
(三) 线性一致理论与薄膜理论的提法.....	(11)
(四) 周边滑动简支曲板的侧压屈曲.....	(12)
参考文献.....	(19)
圆柱曲板在侧压作用下的屈曲实验.....	(21)
引言.....	(21)
(一) 试件与实验装置.....	(21)
(二) 测量系统简述.....	(23)
(三) 实验方法和过程.....	(23)
(四) 实验结果与讨论.....	(26)
参考文献.....	(27)
超临界变形及屈曲稳定性理论.....	(28)
引言.....	(28)
(一) 分枝屈曲的超临界变形.....	(29)
(二) 分枝屈曲超临界变形的稳定性.....	(32)
(三) 极值屈曲的超临界变形.....	(42)
(四) 极值屈曲超临界变形的稳定性.....	(44)
(五) 原始缺陷理论.....	(48)
参考文献.....	(67)
简支曲板侧压大挠度分析.....	(68)
引言.....	(68)
(一) 主要符号.....	(68)
(二) 基本方程.....	(69)
(三) 极值屈曲的临界载荷计算公式.....	(71)
(四) 分枝屈曲的临界载荷.....	(79)
(五) 计算结果、理论与实验比较.....	(84)
参考文献.....	(86)
直边顶住简支曲板的侧压屈曲实验.....	(87)
引言.....	(87)
(一) 试件和实验装置.....	(87)
(二) 实验步骤.....	(89)
(三) 实验现象.....	(90)
(四) 实验结果与讨论.....	(92)
参考文献.....	(94)

圆柱曲板侧压稳定性研究

中国科学院力学研究所第十二研究室

弹性圆柱曲板的屈曲

前 言

弹性圆柱曲板的屈曲,就其力学特性而言,是属于薄壳屈曲的问题范畴。但从几何形状上看,圆柱曲板又是块壳,比整体薄壳多了两个直边的边界条件;处理这类问题,一般来说,要比整体薄壳复杂些。与球块壳相比,在外压下球块壳屈曲前一般是轴对称变形,屈曲方程也可用分离变量的办法化为求解非线性常微分方程;而在曲板中则需解决非线性的偏微分方程。

在壳体屈曲的问题中,为了克服经典理论(即屈曲前假定为薄膜受力状态,屈曲方程也为线性的)与实验之间所存在的差距,为了理解与说明屈曲的现象,从四十年代至今已做了大量工作,主要是:

1. 理论方面:

(1) 分析结构曲率的影响,说明屈曲时的非线性“跳跃”现象。

Kármán、钱学森等^{[1]、[2]}指出:无曲率结构屈曲后载荷可以继续上升,而有曲率的则往往下降。以有非线性弹簧支承的压杆为例,他们说明了在载荷一位移图上有上下临界值。如试件是几何理想的,则结构在达到上临界点时才屈曲并有“跳跃”现象。在有几何原始缺陷时则临界载荷将大大下降。他们还首先解释了外压球块壳与轴压圆柱壳的屈曲。

(2) 建立弹性平衡的稳定性与结构对原始缺陷的敏感程度之间的渐近关系。

Koiter 以及随后的一些作者^{[3]~[5]}研究了结构在临界点附近的平衡性后指出,屈曲后如有载荷继续上升的趋向则为稳定的平衡,反之如有下降的趋向则称不稳定的。对于具有与结构分叉屈曲形态相似的几何缺陷,即初挠度,他们给出一个渐近关系式,说明具有稳定型屈曲的结构(如压杆、受压平板)对初挠度的影响不敏感,反之(如球壳、轴压圆柱壳)则敏感。同时也可说明为什么有的结构在一定的参数区域内敏感,而在另一些范围内又不敏感(如侧压或全压圆柱壳)^[6]。

(3) 分析屈曲时壳平面内边界条件的影响。

Hoff、Singer等^{〔7〕-〔8〕}按壳或曲板边缘上法向平面力、切向平面力、法向平面位移、切向平面位移为零的四种组合，分析了求解屈曲方程时不同的边界条件对壳体临界载荷的影响；从而说明实验夹具夹持情况的不理想性，即实际情况与计算时所使用的边界条件的不一致性也是形成计算值与实验值之间差距的原因之一。

（4）分析屈曲前预变形的影响。

按经典理论求解临界载荷时假定了屈曲前是薄膜受力状态，也即预变形挠度被设为常量。由此往往导致屈曲前与屈曲时所满足的边界条件互不一致。为此，Stein^{〔9〕}提出考虑屈曲前预变形的“一致理论”，使前后满足的边界条件一致起来。方法是将整个解分为屈曲前的与屈曲中的两部分的迭加。

2. 实验方面：

由于近代加工技术、测试条件的发展，从六十年代起，在一系列接近理想的模型试件上进行了实验。结果证实了以上理论的说明与改进，并促使人们认识到初挠度是形成以往理论值与实验值之间的差距的主要原因。这方面工作可参见^{〔9〕}中所引用的有关参考文献。

3. 计算方面：

目前求解非线性微分方程的主要途径有两个^{〔10〕-〔11〕}。一是通过有限元法使问题离散化为非线性代数方程组或在建立微分方程式后利用差分法使其代数化，以后再用叠代法等求解代数方程组。这一方法适用于求解边界条件、载荷分布或结构形状比较复杂的情况，但求解非线性代数方程组比较困难。另一途径是通过摄动或叠代先将非线性微分方程线性化，然后求解。这一方法适合于做典型问题分析。以上两种途径各有利弊，可以互相补充。

有关壳体屈曲的研究与发展的评述还可以参见〔12〕—〔14〕。

综上所述可见：在静力加载条件下，由满足静力平衡及适当边界条件的非零解所求取的壳体临界载荷，除主要受初挠度的影响外，是可靠的。我们研究曲板的屈曲时也将采用以上原则。

以下提出用逐级摄动法求解曲板临界载荷的方法。由此计算周边滑动简支、受侧压的圆柱曲板的临界载荷及初挠度的影响，结果与实

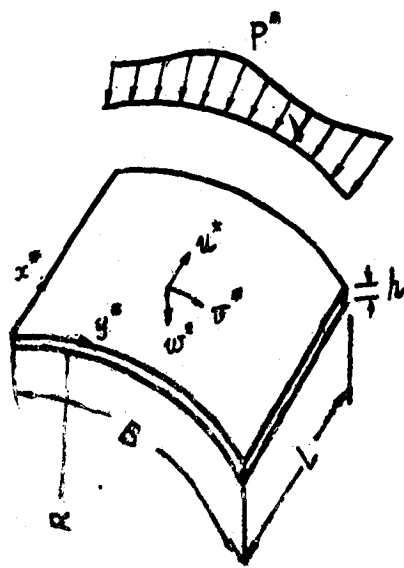


图 1

验相比,符合良好。

符 号

$x=x^*/L, y=y^*/B,$

$w=w^*/h=\bar{w}+\delta$ 挠度,

$\phi=\phi^*/D=\varphi+f$ 应力函数,

D 弯曲刚度, ν 波柔系数,

$\mu=12(1-\nu^2),$

$P=P^*B^4/Dh=(\lambda+1)P$ 横向载荷,

$w_1=w_1^*/h=e\omega$ 初挠度 (其中 e 为初挠度波峰绝对值, ω 为波型),

$\beta=B/L$ 边长比,

$K=B^2/Rh$ 曲率参数,

$$\nabla^4 = \left(\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2,$$

$$L(,)=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

r 振动的级数,

ε 屈曲前振动参数,

ξ 屈曲及屈曲后振动参数,

t 以 ε 、 ξ 或 λ 作参数时的振动次数,

$N=(\lambda+1)n$ 边缘载荷,

s 以 e 作参数时的振动次数,

$M(\dots)$ 线性运算符, 可以是对括号内变量求积、取特定值等等,

X_m 对变量 X 取最大值,

m, n x, y 方向的波数,

m_0, n_0 初挠度在 x, y 方向的波数,

P_M 薄膜解临界压力,

P_L 线性解临界压力,

P_C 逐级振动解临界压力,

P_E 实测临界压力,

P_S 有初挠度时临界压力,

$b = A_{(2)}/P_c$ 敏感系数 ($A_{(2)}$ 的求法见 (4-9))

(一) 逐 级 摄 动 法

由沃耳密耳所著“柔勒板与柔勒壳”^[15]中 (5.44) (5.45) 式, 经无量纲化后, 可以得到具有初挠度的圆柱曲板的平衡方程与协调方程为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 w - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + L(\phi, W) + L(\phi, w_1) \right] &= P \\ \nabla^4 \phi + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(W, W) + L(W, w_1) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (1-1)$$

逐级摄动法的要点是将 (1-1) 的解分为两部分的迭加, 然后再对每一部分的方程做摄动展开使之线性化。即令

$$\left. \begin{aligned} W &= w + \delta \\ \phi &= \varphi + f \\ P &= (\lambda + A) P \end{aligned} \right\} (1-2)$$

代入 (1-1) 后可归结为两组方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 w - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + L(\varphi, w) + L(\varphi, w_1) \right] &= \lambda \cdot P \\ \nabla^4 \varphi + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) + L(w, w_1) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (1-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + L(\varphi, \delta) + L(w, f) + L(f, w_1) + L(f, \delta) \right] &= A \cdot P \\ \nabla^4 f + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + L(w, \delta) + L(\delta, w_1) + \frac{1}{2} L(\delta, \delta) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (1-4)$$

这样分解是完全严格的, 没有简化, 也不损失任何解。(1-3)、(1-4) 式中下划横线之项都是非线性的。但这样分解后提供了逐级近似求解屈曲前变形、临界载荷及初始屈曲后效的方法。

在屈曲前, 令

$$\begin{pmatrix} w \\ \varphi \\ \lambda \\ \delta \\ f \\ A \end{pmatrix} = \sum_{t=1} \begin{pmatrix} w_{(t)} \\ \varphi_{(t)} \\ \lambda_{(t)} \\ \delta_{(t)} \\ f_{(t)} \\ A_{(t)} \end{pmatrix} \varepsilon^t \quad (1-5)$$

代入 (1-3)、(1-4) 式可以得到各次摄动的结果:

($t=1$)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W_{(1)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 \varphi_{(1)}}{\partial x^2} + L(\varphi_{(1)}, w_{(1)}) \right] &= \lambda_{(1)} \cdot p \\ \nabla^4 \varphi_{(1)} + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial x^2} + L(w_{(1)}, w_{(1)}) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

($t=2, 3 \dots$)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 w_{(t)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 \varphi_{(t)}}{\partial x^2} + L(\varphi_{(t)}, w_{(t)}) \right] &= \lambda_{(t)} \cdot p + \beta^2 \sum_{k=1}^{t-1} L(\varphi_{(k)}, w_{(t-k)}) \\ \nabla^4 \varphi_{(t)} + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 w_{(t)}}{\partial x^2} + L(w_{(t)}, w_{(t)}) \right] &= -\frac{\beta^2 \mu}{2} \sum_{k=1}^{t-1} L(w_{(k)}, w_{(t-k)}) \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

及 ($t=1$)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta_{(1)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 f_{(1)}}{\partial x^2} + L(\varphi, \delta_{(1)}) + L(w + w_1, f_{(1)}) \right] &= A_{(1)} \cdot p \\ \nabla^4 f_{(1)} + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 \delta_{(1)}}{\partial x^2} + L(w + w_1, \delta_{(1)}) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

($t=2, 3 \dots$)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta_{(t)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 f_{(t)}}{\partial x^2} + L(\varphi, \delta_{(t)}) + L(w + w_1, f_{(t)}) \right] &= A_{(t)} \cdot p + \\ &+ \beta^2 \sum_{k=1}^{t-1} L(f_{(k)}, \delta_{(t-k)}) \\ \nabla^4 f_{(t)} + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 \delta_{(t)}}{\partial x^2} + L(w + w_1, \delta_{(t)}) \right] &= \\ &= -\frac{\beta^2 \mu}{2} \sum_{k=1}^{t-1} L(\delta_{(k)}, \delta_{(t-k)}) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

至此，已将非线性方程 (1-3)、(1-4) 全部线性化。将 (1-5) 代入给定边界条件 (包括可能的边缘载荷) 即可得到相应 (1-6) ~ (1-9) 各次摄动方程所必须的“实”边界条件。又根据摄动展开的性质，还可以确定为求得各项待定系数 $\lambda_{(t)}$ 、 $A_{(t)}$ 所必须的“虚”边界条件。既然

$$w = w_{(1)} \varepsilon + w_{(2)} \varepsilon^2 + \dots,$$

$$\varphi = \varphi_{(1)} \varepsilon + \varphi_{(2)} \varepsilon^2 + \dots,$$

故 $M(w, \varphi) = M(w_{(1)}, \varphi_{(1)})\varepsilon + M(w_{(2)}, \varphi_{(2)})\varepsilon^2 + \dots$

又因选取摄动参数时是使

$$\varepsilon = M(w, \varphi)$$

所以应有“虚”边界条件

$$M(w_{(t)}, \varphi_{(t)}) = \begin{cases} 1 & (t=1) \\ 0 & (t \neq 1) \end{cases} \quad (1-10)$$

求解屈曲前变形的步骤是：设 w, φ 为载荷 λ —挠度 w 曲线上第一级的解，它可以由 (1-6)、(1-7) 式及相应的“实”、“虚”边界条件求得。图 2 的 1 点是第一级的末点

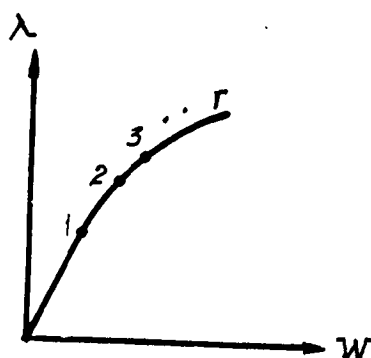


图 2

(也即由 (1-5) 式判断有关各量均为收敛的末点)，然后再以 1 点的 w, φ 值为已知函数代入 (1-8)、(1-9)，从而可以得到第二级的解，依此类推。总之，在利用 (1-8)、(1-9) 求解第 r 级的解时，可以将第 $(r-1)$ 点的 w, φ 代入，依此逐级向前。类似的方法用在迭代法中称之为“改进的增量法”^[11]。

采用逐级摄动求屈曲前变形的优点在于克服由渐近展开的发散性所带来的局限性，这在以后还要讲到。下面再谈如何求解临界载荷及初始屈曲后效。

$$\left. \begin{aligned} \text{令 } w &= w_c + \delta \\ \varphi &= \varphi_c + f \\ P &= (\lambda_c + \lambda)P \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

又

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta \\ f \\ \lambda \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \delta_{(i)} \\ f_{(i)} \\ \lambda_{(i)} \end{array} \right\} \xi^i \quad (1-12)$$

其中 $w_c, \varphi_c, \lambda_c$ 为屈曲前的解，已由前面求得。将 (1-11)、(1-12) 代入 (1-1)，扣除屈曲前的方程 (形式同于 (1-3))，预定 $\lambda_{(1)} = 0$ ，可得：

$$(t=1)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta_{(1)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 f_{(1)}}{\partial x^2} + L(\varphi_c, \delta_{(1)}) + L(w_c + w_i, f_{(1)}) \right] &= \lambda_{(1)} \cdot P = 0 \\ \nabla^4 f_{(1)} + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 \delta_{(1)}}{\partial x^2} + L(w_c + w_i, \delta_{(1)}) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

(t=2, 3...)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta_{(t)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{(t)} + L(\varphi_c, \delta_{(t)}) + L(W_c + W_t, f_{(t)}) \right] &= A_{(t)} \cdot P + \beta^2 \sum_{k=1}^{t-1} L(f_{(k)}, \delta_{(t-k)}) \\ \nabla^4 f_{(t)} + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_{(t)} + L(W_c + W_t, \delta_{(t)}) \right] &= -\frac{\beta^2 \mu}{2} \sum_{k=1}^{t-1} (\delta_{(k)}, \delta_{(t-k)}) \end{aligned} \right\} (1-14)$$

其中 (1—13) 是屈曲方程, 已化为熟知的求特征值问题。(1—14) 为求解屈曲后效的方程, $A_{(t)}$ 可由“虚”边界条件确定。

以下可证明, 从逐级摄动的观念出发, 采用 (1—6) ~ (1—9) 及相应边界条件求解屈曲前变形时, $A_{(1)}=0$ 。

从现有结构屈曲现象及理论出发, 我们可以归结到: 当载荷达到载荷参数—摄动参数曲线上某一点时, 除了原有解而外, 还有另外的线性无关的解, 即产生多值问题时, 那么, 这一点就叫做临界点, 相应的载荷称做临界载荷。

既然如此, 比较 (1—8)、(1—13) 可见, 除非线性方程及边界条件中 (当有边界载荷存在时) 的 $A_{(1)}=0$, 否则由 (1—13) 及边界条件就不能得到不同于由 (1—8) 式所得的线性无关的另外解。即为所证。

这里我们采用“另外的解”这一提法而不用“另外任意微小的解”这种经典的说法, 这是由于在使用大挠度方程求解屈曲问题时 (包括用摄动法线性化后), 屈曲后挠度与载荷的关系是确定的, 而不象小挠度理论中是任意不定的。

以上用逐级摄动法所导出的考虑屈曲前变形的屈曲方程与 Stein^[9] 所提出的方程及用量法^{[16]、[17]} 所求得的结果完全一致 (证明从略)。

需要说明, 求解 (1—13) 式时, 一般虽仍可化为求解线性代数方程组的特征值问题, 但因 W_c 、 φ_c 与摄动参数 ϵ 之间可以不是线性关系, 于是特征多项式的次数将高于由代数方程组的系数所组成的方阵的阶数。

(二) 摄动参数的选择方法

摄动法是具有渐近展开性质的, 也是半收敛性的。这就是说, 在展开项的前面表现为逐渐收敛的性质, 而当项数增加到一定程度以后又是发散的。但这并不妨碍在实际问题中的使用, 因为在收敛部分中的余项和是小于被忽略的第一项。因此, 为提高摄动计算精度, 原则上需要摄动 t 次, 使其与第 $(t-1)$ 次的结果之差是在需要的计算精度之内 (图 3)。以

上论述可参见〔18〕〔19〕。

但摄动次数过多以后，会使求解愈来愈困难，而且从实际计算的经验表明，随着次数的增加有时解会出现反复摆动，不易判断其收敛与否。

为解决这一矛盾可以有两个办法。一是如前所述采取逐级摄动的方法，也就是用减少摄动次数，而增加摄动级数来解决。因为正象用幂级数展开一个函数时那样，当所要求的收敛半径愈大，则需要展开的项数也愈多；那么在摄动展开的收敛部分也至少会要求如此，何况当摄动参数的范围或称摄动半径过大时还会出现发散的现象；所以分级是必要的。由此每一级的末点就成为下一级摄动的源点，从而减小了每一级的摄动半径，降低每一级摄动的次数。

另一个办法是合理选择摄动参数。在圆板大挠度问题〔20〕、球壳的稳定计算〔21〕中都有这样的经验。目前虽不能证明在什么条件下选用什么参数为合理，但可以提供为合理选择参数而创造条件。

这就是摄动参数的倒置展开法。

在圆板大挠度问题中有过这样的经验〔20〕，选择载荷作参数时，运算较简便，但收敛很慢；于是钱伟长改用挠度作参数，收敛很快。但用挠度作参数时，由于根据展开的性质需要引进一个“虚”边界条件，因此计算要比前者复杂。以后胡海昌又建议〔22〕用倒置展开的方法，可以兼得两种展开方法的优点。即先用载荷做参数计算得到：

$$\left\{ \begin{matrix} W \\ \varphi \end{matrix} \right\} = \sum_t \left\{ \begin{matrix} W_{(t)}^* \\ \varphi_{(t)}^* \end{matrix} \right\} \lambda^t \quad t=1, 2, 3, \dots \quad (2-1)$$

再取参数

$$\varepsilon = M(W, \varphi) = \sum_t M(W_{(t)}^*, \varphi_{(t)}^*) \lambda^t = \sum_t \varepsilon_{(t)} \lambda^t \quad (2-2)$$

由于对渐近展开级数也可以做如对收敛级数的一些运算法则（见〔18〕中§65）因此可以将（2-2）代入（1-5）中第三式，归并 λ 的同次项，再比较等号两边同幂次项的系数，可得

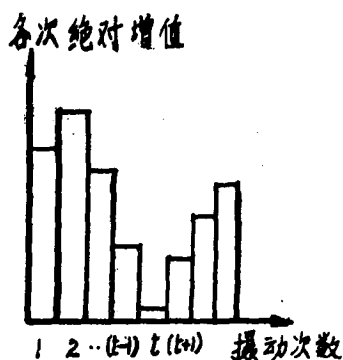


图 8

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{(1)} &= \frac{1}{\varepsilon_{(1)}} \\
 \lambda_{(2)} &= -\frac{\varepsilon_{(2)}}{\varepsilon_{(1)}^3} \\
 \lambda_{(3)} &= \frac{2\varepsilon_{(2)}^2 - \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(3)}}{\varepsilon_{(1)}^5} \\
 \lambda_{(4)} &= \frac{5\varepsilon_{(2)}(\varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(3)} - \varepsilon_{(2)}^2) - \varepsilon_{(1)}^2\varepsilon_{(4)}}{\varepsilon_{(1)}^7} \\
 \lambda_{(5)} &= \frac{7\varepsilon_{(2)}^2(2\varepsilon_{(2)}^2 - 3\varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(3)}) + 3\varepsilon_{(1)}^2(2\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(4)} + \varepsilon_{(3)}^2) - \varepsilon_{(1)}^3\varepsilon_{(5)}}{\varepsilon_{(1)}^9} \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (2-3)$$

又将 (1—5) 中前三式代入 (2—1), 归并、比较后可得:

$$\left. \begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} W_{(1)} \\ \varphi_{(1)} \end{matrix} \right\} &= \lambda_{(1)} \left\{ \begin{matrix} W_{(1)}^* \\ \varphi_{(1)}^* \end{matrix} \right\} \\
 \left\{ \begin{matrix} W_{(2)} \\ \varphi_{(2)} \end{matrix} \right\} &= \lambda_{(1)}^2 \left\{ \begin{matrix} W_{(2)}^* \\ \varphi_{(2)}^* \end{matrix} \right\} + \lambda_{(2)} \left\{ \begin{matrix} W_{(1)}^* \\ \varphi_{(1)}^* \end{matrix} \right\} \\
 \left\{ \begin{matrix} W_{(3)} \\ \varphi_{(3)} \end{matrix} \right\} &= \lambda_{(1)}^3 \left\{ \begin{matrix} W_{(3)}^* \\ \varphi_{(3)}^* \end{matrix} \right\} + 2\lambda_{(1)}\lambda_{(2)} \left\{ \begin{matrix} W_{(2)}^* \\ \varphi_{(2)}^* \end{matrix} \right\} + \lambda_{(3)} \left\{ \begin{matrix} W_{(1)}^* \\ \varphi_{(1)}^* \end{matrix} \right\} \\
 \left\{ \begin{matrix} W_{(4)} \\ \varphi_{(4)} \end{matrix} \right\} &= \lambda_{(1)}^4 \left\{ \begin{matrix} W_{(4)}^* \\ \varphi_{(4)}^* \end{matrix} \right\} + 3\lambda_{(1)}^2\lambda_{(2)} \left\{ \begin{matrix} W_{(3)}^* \\ \varphi_{(3)}^* \end{matrix} \right\} + (\lambda_{(2)}^2 + 2\lambda_{(1)}\lambda_{(3)}) \left\{ \begin{matrix} W_{(2)}^* \\ \varphi_{(2)}^* \end{matrix} \right\} + \\
 &\quad + \lambda_{(4)} \left\{ \begin{matrix} W_{(1)}^* \\ \varphi_{(1)}^* \end{matrix} \right\} \\
 \left\{ \begin{matrix} W_{(5)} \\ \varphi_{(5)} \end{matrix} \right\} &= \lambda_{(1)}^5 \left\{ \begin{matrix} W_{(5)}^* \\ \varphi_{(5)}^* \end{matrix} \right\} + 4\lambda_{(1)}^3\lambda_{(2)} \left\{ \begin{matrix} W_{(4)}^* \\ \varphi_{(4)}^* \end{matrix} \right\} + 3(\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}^2 + \lambda_{(1)}^2\lambda_{(3)}) \left\{ \begin{matrix} W_{(3)}^* \\ \varphi_{(3)}^* \end{matrix} \right\} + \\
 &\quad + 2(\lambda_{(3)}\lambda_{(4)} + \lambda_{(2)}\lambda_{(3)}) \left\{ \begin{matrix} W_{(2)}^* \\ \varphi_{(2)}^* \end{matrix} \right\} + \lambda_{(5)} \left\{ \begin{matrix} W_{(1)}^* \\ \varphi_{(1)}^* \end{matrix} \right\} \\
 &\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (2-4)$$

这样, 经过 (2—3)、(2—4) 两式的运算, 就可以把用载荷做参数的结果转换为用 ε 做参数时所应有的结果。这种转换的等价性也可以用以下方式证实。

将 (2—1) 代入 (1—3), 得到

$$\left. \begin{aligned}
 (t=1) \\
 \nabla^4 W_{(1)}^* - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 \varphi_{(1)}^*}{\partial x^2} + L(\varphi_{(1)}^*, W_{(1)}) \right] &= p \\
 \nabla^4 \varphi_{(1)}^* + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 W_{(1)}^*}{\partial x^2} + L(W_{(1)}^*, W_{(1)}) \right] &= 0
 \end{aligned} \right\} (2-5)$$

(t=2, 3...)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W_{(t)}^* - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 \varphi_{(t)}^*}{\partial x^2} + L(\varphi_{(t)}^*, W_t) \right] &= \beta^2 \sum_{k=1}^{t-1} L(\varphi_{(k)}^*, W_{(t-k)}^*) \\ \nabla^4 \varphi_{(t)}^* + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 W_{(t)}^*}{\partial x^2} + L(W_{(t)}^*, W_t) \right] &= -\frac{\beta^2 \mu}{2} \sum_{k=1}^{t-1} L(W_{(k)}^*, W_{(t-k)}^*) \end{aligned} \right\} (2-6)$$

与(1-6) (1-7)相比较由于在等号左边有未知量部分的式子完全相似, 又线性方程的解是可以迭加的, 于是经过适当的组合就可建立(1-6)、(1-7)的解与(2-5)、(2-6)的解之间的关系。

$$\text{令} \quad \begin{Bmatrix} W_{(t)} \\ \varphi_{(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (W_{(t)})_1 + (W_{(t)})_2 \\ (\varphi_{(t)})_1 + (\varphi_{(t)})_2 \end{Bmatrix} \quad t=2, 3... \quad (2-7)$$

代入(1-7), 并使两部分解分别满足

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 (W_{(t)})_1 - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 (\varphi_{(t)})_1}{\partial x^2} + L((\varphi_{(t)})_1, W_t) \right] &= \beta^2 \sum_{k=1}^{t-1} L(\varphi_{(k)}, W_{(t-k)}) \\ \nabla^4 (\varphi_{(t)})_1 + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 (W_{(t)})_1}{\partial x^2} + L((W_{(t)})_1, W_t) \right] &= -\frac{\beta^2 \mu}{2} \sum_{k=1}^{t-1} L(W_{(k)}, W_{(t-k)}) \end{aligned} \right\} (2-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 (W_{(t)})_2 - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 (\varphi_{(t)})_2}{\partial x^2} + L((\varphi_{(t)})_2, W_t) \right] &= \lambda_{(1)} \cdot p \\ \nabla^4 (\varphi_{(t)})_2 + \beta^2 \mu \left[K \frac{\partial^2 (W_{(t)})_2}{\partial x^2} + L((W_{(t)})_2, W_t) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} (2-9)$$

比较(1-6)与(2-5)可以得到(2-4)式中第一式的关系[注1], 于是由(2-2)可知:

$$M(W_{(1)}, \varphi_{(1)}) = \lambda_{(1)} M(W_{(1)}^*, \varphi_{(1)}^*) = \lambda_{(1)} \varepsilon_{(1)}$$

又由“虚”边界条件(1-10)应有

$$M(W_{(1)}, \varphi_{(1)}) = 1$$

故(2-3)式中第一式成立。

在t=2时, 比较(2-6)、(2-8)并利用(2-3)第一式的结果可见:

$$\begin{Bmatrix} (W_{(2)})_1 \\ (\varphi_{(2)})_1 \end{Bmatrix} = \lambda_{(1)}^2 \begin{Bmatrix} W_{(2)}^* \\ \varphi_{(2)}^* \end{Bmatrix}$$

[注1]: 即使边界上有边界载荷时也应成立, 因此时两种边界条件也相差一个 $\lambda_{(1)}$ 倍。以下证明中也类同, 不再注明。

再比较 (2-9) 与 (2-5) 可得:

$$\begin{Bmatrix} [w_{(2)}]_2 \\ [\varphi_{(2)}]_2 \end{Bmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{Bmatrix} w_{(1)}^* \\ \varphi_{(1)}^* \end{Bmatrix}$$

将以上结果按 (2-7) 式相加即证实 (2-4) 式中第二式的成立, 那么由 (2-2) 可知

$$\begin{aligned} M(w_{(2)}, \varphi_{(2)}) &= \lambda_{(1)}^2 M(w_{(2)}^*, \varphi_{(2)}^*) + \lambda_{(2)} M(w_{(1)}^*, \varphi_{(1)}^*) \\ &= \frac{\varepsilon_{(2)}}{\varepsilon_{(1)}} + \lambda_{(2)} \varepsilon_{(1)} \end{aligned}$$

又由“虚”边界条件 (1-10) 应有

$$M(w_{(2)}, \varphi_{(2)}) = 0$$

故 (2-3) 第二式成立。

依此类推, 还可以证实 $t=3, 4, 5, \dots$ 时 (2-3)、(2-4) 中各式均成立。

以上以第一级振动为例, 从 (1-6)、(1-7) 两式证实了两种振动的关系。同样由 (1-8)、(1-9) 也可证实在 $r=2, 3, \dots$ 各级振动中 (2-3)、(2-4) 式的关系也成立, 因为 (1-6) ~ (1-9) 各式均为线性方程。

这样就给我们提出一种方便, 即先用载荷参数 λ (或 A) 展开求解, 然后再转换为各种可能选用的 ε 参数的结果, 以求收敛快、计算精度高的效果, 而不必因改变参数去重新求解。

(三) 綫性一致理論与薄膜理論的提法

(1) 假设屈曲前载荷与挠度之间呈现近似的线性关系, 但挠度分布仍是变化的, 此时可按綫性一致理論 (以下简称綫性理論) 简化。令

$$\begin{aligned} w_c &= w_{(1)}^* \lambda + 0(\lambda^2) \\ \varphi_c &= \varphi_{(1)}^* \lambda + 0(\lambda^2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} w_c \\ \varphi_c \end{aligned}} \right\} (3-1)$$

其中 $w_{(1)}^*$ 、 $\varphi_{(1)}^*$ 可由 (2-5) 解得, 并代入 (1-13) 屈曲方程。如前所述, 求解 (1-13) 时通常化为求解綫性代数方程组的特征值问题。

由于在 (3-1) 式中已忽略了 $0(\lambda^2)$ 项, 因此在代数方程组中也应划去各项系数中高于 λ 一次的二次项, 使特征多项式的次数与代数方程组的系数所组成的方阵的阶数成为一致。

这就是綫性理論的提法的要点。

这一提法并不等于事先从 (1-13) 式中消去平衡方程的 $L(w_c + w_i, f_{(1)})$ 项或从协调方程中消去 $L(w_c + w_i, \delta_{(1)})$ 项。因 w_c 的分布是变化的, 这两项一般是存在的。所以屈曲

方程仍然是 (1-13) 式, 只是在求解的过程中进一步消除二次项。这一理论的结果只能做为 (1-1) 式解的线性部分这一意义去理解。

(2) 假设屈曲前曲板呈薄膜受力状态, 于是 $w_c + w_i$ 可取为常量, 因此 (1-13) 式可化简为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 \delta_{(1)} - \beta^2 \left[K \frac{\partial^2 f_{(1)}}{\partial x^2} + L(\varphi_c, \delta_{(1)}) \right] &= 0 \\ \nabla^4 f_{(1)} + \beta^2 \mu K \frac{\partial^2 \delta_{(1)}}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

这就是薄膜理论的屈曲方程。

(四) 周边滑动简支曲板的侧压屈曲

周边滑动简支曲板的边界条件及其解法可参见 (23)。设横向载荷为均匀分布的侧压。

1. 理论解:

(1) 第一级摄动解:

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad W_t &= e\omega \\ W_{(t,s)}^* &= \sum_s W_{(t,s)} e^s \quad t=1, 2, 3\cdots \\ \varphi_{(t,s)}^* &= \sum_s \varphi_{(t,s)} e^s \quad s=0, 1, 2\cdots \\ \text{又} \quad W_{(t,s)} &= \sum_{mn} A_{mn}^{(t,s)} \sin m\pi x \sin n\pi y \\ \varphi_{(t,s)} &= \sum_{mn} B_{mn}^{(t,s)} \sin m\pi x \sin n\pi y \\ \omega &= \sum_{mn} \Omega_{mn} \sin m\pi t \sin n\pi y \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

代入 (2-5)、(2-6) 式, 按 s 、 t 的同次项归并后可得到 $s=0, t=1; s=1, 2\cdots, t=1; s=0, t=2, 3\cdots; s=1, 2\cdots, t=2, 3\cdots$ 时的各组方程。这些方程组已从变系数的化简为常系数的。再用 (4-1) 中所给定的 $W_{(t,s)}$ 、 $\varphi_{(t,s)}$ 、 ω 解的形式即可求得以载荷为摄动参数时的解。

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}^{(1,0)} &= \frac{16}{mn\pi^2} \frac{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^4 + \frac{\beta^4 \mu K^2 m^4}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2}}{\beta^4 \mu K^2 m^4} \quad (m, n=1, 3, 5\cdots) \\ B_{mn}^{(1,0)} &= \frac{\beta^2 \mu K m^2}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^2} A_{mn}^{(1,0)} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}^{(t,0)} &= \beta^2 \frac{D_{mn}^{(t,0)} + \frac{\beta^2 \mu K m^2}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^2} C_{mn}^{(t,0)}}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^4 + \frac{\beta^4 \mu K^2 m^4}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2}} \quad \left(\begin{array}{l} t=2,3\cdots \\ m,n=1,3,5\cdots \end{array} \right) \\ B_{mn}^{(t,0)} &= \beta^2 \mu \frac{K m^2 \pi^2 A_{mn}^{(t,0)} - C_{mn}^{(t,0)}}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^4} \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

$$\text{其中 } C_{mn}^{(t,0)} = 2\pi^2 \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{(t-1)} \sum_{k=1}^{(t-1)} A_{i_1, j_1}^{(k,0)} A_{i_2, j_2}^{(t-k,0)} D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn}$$

$$D_{mn}^{(t,0)} = 4\pi^2 \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{(t-1)} \sum_{k=1}^{(t-1)} B_{i_1, j_1}^{(k,0)} A_{i_2, j_2}^{(t-k,0)} D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn}$$

$$D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} = \begin{cases} \frac{8i_1 j_1 i_2 j_2 m n (2(i_1^2 j_2^2 + i_2^2 j_1^2) - (m^2 - i_1^2 - i_2^2)(n^2 - j_1^2 - j_2^2))}{(m^2 - (i_1 + i_2)^2)(m^2 - (i_1 - i_2)^2)(n^2 - (j_1 + j_2)^2)(n^2 - (j_1 - j_2)^2)} \\ \quad (\text{当 } i_1 j_1, i_2 j_2, m, n \text{ 均为奇数}) \\ 0 \quad (\text{其他情况}) \end{cases}$$

$$\text{且 } D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} = D_{i_2, j_2, i_1, j_1}^{mn} = D_{m n, i_2, j_2}^{i_1, j_1} = D_{i_2, j_2, m n}^{i_1, j_1} = D_{m n, i_1, j_1}^{i_2, j_2} = D_{i_1, j_1, m n}^{i_2, j_2}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}^{(t,s)} &= \beta^2 \frac{D_{mn}^{(t,s)} + \frac{\beta^2 \mu K m^2}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^2} C_{mn}^{(t,s)}}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^4 + \frac{\beta^4 \mu K^2 m^4}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2}} \quad \left(\begin{array}{l} t, s, m, n \text{ 可为} \\ 1, 2, 3, \cdots \end{array} \right) \\ B_{mn}^{(t,s)} &= \beta^2 \mu \frac{K m^2 \pi^2 A_{mn}^{(t,s)} - C_{mn}^{(t,s)}}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2 \pi^4} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

$$\text{其中 } C_{mn}^{(t,s)} = 2\pi^2 \left[\sum_{i_1, j_1, i_2, j_2} \sum_{i=0}^s \sum_{k=1}^{i-1} A_{i_1, j_1}^{(k,i)} A_{i_2, j_2}^{(s-k, s-1)} D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2} A_{i_1, j_1}^{(i, s-1)} \Omega_{i_2, j_2} D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} \right]$$

$$D_{mn}^{(t,s)} = 4\pi^2 \left[\sum_{i_1, j_1, i_2, j_2} \sum_{i=0}^s \sum_{k=1}^{i-1} B_{i_1, j_1}^{(k,i)} A_{i_2, j_2}^{(s-k, s-1)} D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} + \right. \\ \left. + \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2} B_{i_1, j_1}^{(i, s-1)} \Omega_{i_2, j_2} D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} \right]$$

$$D_{i_1, j_1, i_2, j_2}^{mn} = \begin{cases} \text{同上 (当 } (i_1 + i_2 + m) \text{ 及 } (j_1 + j_2 + n) \text{ 均为奇数时)} \\ 0 \quad (\text{其他情况}) \end{cases}$$

(2) 第 r 级振动解: $r=2, 3\cdots$

由第 $(r-1)$ 级, 可归并为以下形式的解

$$\left. \begin{aligned} W + W_1 &= \sum_{i_1, j_1} W_{i_1, j_1} \sin i_1 \pi x \sin j_1 \pi y \\ \varphi &= \sum_{i_1, j_1} \varphi_{i_1, j_1} \sin i_1 \pi x \sin j_1 \pi y \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$