

廻转仪的理论和应用

下 册

R. 格 兰 曼

科 学 出 版 社

DER KREISEL
SEINE THEORIE
UND SEINE ANWENDUNGEN

VON

Dr. R. GRAMMEL

Zweite, neubearbeitete Auflage

Zweiter Band:

Die Anwendungen des Kreisels

1950

迴轉儀的理論和应用

下 册

R. 格蘭曼 著

吳震堯 譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳门大街 117 号)

北京市书刊出版业营业登记证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1959 年 12 月 第 一 版

书号: 2012 字数: 255,000

1959 年 12 月 第一次印刷

开本: 850×1168 1/32

(张): 0001—5,000

印张: 93/4

定价: 1.40 元

作者第二版序¹⁾

本书的下册是研究迴轉儀的应用。迴轉儀的应用极宜分为彼此完全不同的三个种类。第一类是关于装有旋轉部份的机器（包括車輛、船舶和飞机等）所产生的迴轉力矩的有效利用、以及不需要的甚至有害作用的研究。第二类就是迴轉儀仪器。第三类是关于一般造得很强大的、直接的迴轉儀稳定器，这种稳定器在技术发展史和天文学上，都是很有意义的。

我在編列讲述所有这些迴轉儀的应用时，力求實質上，而不是形式上的完全。这譬如說，我們根本不能一一例举各种迴轉儀的构造或設計。我将尽我自己的認識，不放走任何一个有关迴轉儀之应用問題的實質部份（第一版中討論原子中迴轉儀作用之現象的一部份，这一版則已刪去。因为当时对于这个問題的物理解释，現在早已过时，而且現在已經代之以无須迴轉儀力学理論来解释的有关电子自旋的概念）。

有許多討論迴轉儀之应用的書籍，常常引例仪器和机器的外觀图。这并无多大好处，因为这根本不需要解释。我在本書的新版里一般只画切面图，而且經常只画极其精要的簡化图；仅在极少数几个必需的情形里，才作整个的构造图。本書总的目的不在于研究实际构造（例如迴轉儀仪器的构造），而是解释机器和仪器中的迴轉儀的作用，以及說明迴轉儀器的基本思想。因此，我特別注意迴轉儀的扰动及稳定等理論。唯有循着这样的途徑，才能获得这类仪器的完整概念。

格蘭曼 1950 年于斯特各德

1) 本册譯文仍沿用上册所取的術語、名詞——譯者。

目 录

迴轉儀的应用

第一章 具有旋轉部件的机器的迴轉儀效应 (1)

§ 1. 滚动磨机 (1)

1. 碾磨机. 2. 三种改善碾輪的方法. 3. 摆磨机.

§ 2. 轉子的临界轉速 (14)

1. 简单轉軸. 2. 影响系数. 3. 相逆运动的临界轉速. 4. 多圆盘軸. 5. 密靠的多圆盘軸.

§ 3. 車輛及船舶 (40)

1. 双軌鐵道. 2. 高架鐵道. 3. 悬架鐵道. 4. 自动車. 5. 船舶. 6. 船舶振动的迴轉儀約束. 7. 双輪車.

§ 4. 飞机 (65)

1. 迴轉力矩. 2. 航空动力学基础. 3. 产生安定作用的迴轉儀效应. 4. 飞机振动的迴轉儀約束. 5. 飞机的迴旋下降运动. 6. 直升飞机.

第二章 迴轉儀器 (91)

§ 5. 装备罗盘迴轉儀的儀器 (92)

1. 福科迴轉儀. 2. 傾度迴轉儀和拔里迴轉儀. 3. 偏差迴轉儀. 4. 証明地球轉动的迴轉儀試驗. 5. 单自由度的彈性約束.

§ 6. 迴轉儀罗盘 (111)

1. 迴轉儀罗盘的技术发展史. 2. 置于固定基础上的单轉子迴轉儀罗盘. 3. 单轉子迴轉儀罗盘的航向罗差和冲击罗差. 4. 亞靜液力阻尼消振. 5. 側滾罗差. 6. 側滾罗差的消除. 7. 无側滾罗差的迴轉儀罗盘.

§ 7. 装备摆迴轉儀的人工水平儀 (162)

1. 无阻尼的迴轉儀摆. 2. 迴轉儀摆的消振(阻尼)裝置. 3. 装备噴嘴調整器的摆迴轉儀. 4. 装备修正电动机的摆迴轉

仪. 5. 其他构造的摆迴轉仪.	
§ 8. 轉向迴轉仪和位置迴轉仪	(206)
1. 轉向指示器. 2. 航向迴轉仪. 3. 方向迴轉仪. 4. 修正迴轉仪.	
§ 9. 其他的迴轉仪仪器	(229)
1. 微分迴轉仪和积分迴轉仪. 2. 調节迴轉仪.	
第三章 直接稳定器.....	(241)
§ 10. 方向迴轉仪	(242)
1. 地球. 2. 抛射体.	
§ 11. 修正迴轉仪	(262)
1. 装备鉛直迴轉仪的单軌鉄道. 2. 車輛的曲綫行駛和直綫变速行駛. 3. 装备横迴轉仪的单軌鉄道車輛. 4. 魚雷迴轉仪.	
§ 12. 阻振迴轉仪	(280)
1. 受抑制的船舶迴轉仪. 2. 抑制系数和动量矩的最有利数值的选择. 3. 受調节的船舶迴轉仪.	
索引.....	(302)

第一章

具有旋轉部件的機器的迴轉儀效應

一個物體能夠不改變它在空間內的總位置而勻速轉動。旋轉運動的這個特質可以把它與其他各種運動形式區分開，並且，用在有限的空間內，以飛輪動能或機器其他旋轉部件之動能的形式，積蓄相當大的能量。因為物體作旋轉運動時各個部分經過一定的時間間隔後，總要再度經過原來的起始位置，所以所謂迴轉儀機器（汽、氣和水輪機，離心泵，壓縮機，鼓風機，發電機和電動機等）和其他許多發動機（水的和空氣的螺旋槳推進器），也可以充作能量轉換之用。最後，旋轉運動很久以來就一直被用來獲得車輪的平移運動。

在所有這些情形之中，我們總要遇到動量矩經常是很大的迴轉儀問題，並且當機器旋轉部分的轉軸一有迴轉，即轉軸的空間方向一有改變，就要產生通常不需要的、有時甚至是危險的迴轉力矩，僅在某幾個有限的情形里才是有益的。

我們將從在技術上有很有利的迴轉儀表現的所謂碾磨機和擺磨機的情形開始討論。然後研究轉子進入安定旋轉之後的迴轉力矩的作用，特別是這個力矩對於轉子臨界速度的影響，這甚至對它不引起危害結果的情況下，也必須加以計算。最後，我們還要講到車輛、船舶和飛機在運動時所可能發生的迴轉儀現象。

我們在計算中隨時需要用到迴轉力矩 K_p 。對稱迴轉儀的迴轉力矩，上冊 §5 第二段已經算出；非對稱迴轉儀的迴轉力矩，則在上冊 §8 第十一段里也已算好。

§1. 滾動磨機

1. 碾磨機 我們在支持平面上滾轉着的碾磨型或擺磨型的滾

动磨机上, 可以看到很显著的迴轉仪效应。可惜, 这种效应到现在还不是众所周知, 因此, 在滚动磨机的设计上, 一般仍未利用到应有的程度。

碾磨机基本上是由两个装在主轴(m)上并由垂直主动轴(l)传动的圆柱形或微錐形的滚辊(l)所组成(图1和图2), 这样的滚辊称为碾轮。当主动轴转动时, 碾轮就在支板(p)上压着轮子下的待磨料滚动着, 把待磨料压碎、研细。有的磨机只装一个碾轮(图3和图4)。为了使碾轮能压住待磨料中大块坚硬的颗粒, 主轴与主动轴应当装成可以作相对运动。为此可以使用接头(图1和图3之 n)、特制的曲柄(图2之 s)或球铰链(图4之 g)等(这里我们不谈那种主轴固定而支板在碾轮之下转动的构造, 因为那样设计的磨机不会产生迴轉力矩)。

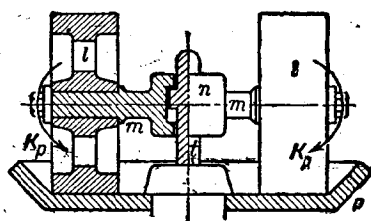


图1. 有接头的双碾轮磨机。

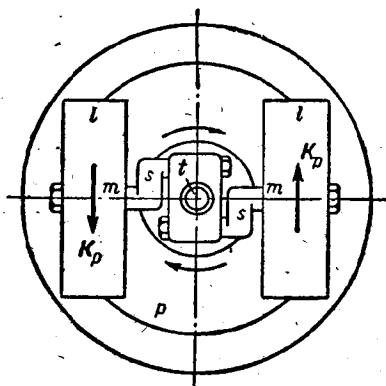


图2. 有曲柄的双碾轮磨机。

碾磨机正是绕垂直主动轴作强迫规则进动之对称迴轉仪的一种技术模型。这种进动是要产生迴轉力矩 K_p 的。根据轉軸的一致平行規則(上册 §5 第二段的定理 I), 就容易知道这个力矩在各种不同碾輪构造里所显示的作用。如果是双碾輪, 而且主轴与主动轴是用接头或曲柄连接的; 那么迴轉力矩要使主轴弯曲, 这就是說, 迴轉力矩表现为設計計算时所必須考虑进去的弯矩。迴轉力矩在用接头連接的单碾輪磨机中的作用特别有害。在这种情形

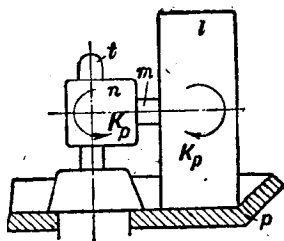


图 2. 有接头的单碾磨机。

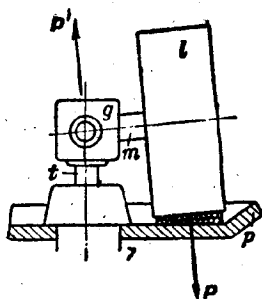


图 4. 有球铰链头的单碾磨机。

中，迴轉力矩不仅要使主軸弯曲，而且还要大大地增加接头軸承处的压力。唯有在主軸与主动軸用球铰链头連接的情形里（图 4），表现为力偶（ P, P' ）形式的迴轉力矩，才能除了对主动軸和其軸承有附加载荷之外，与靜压力比較，会增加碾輪对支鈑的压力，而且在恰当的条件之下可以增加几倍。正是由于这个緣故，使球铰链头的碾輪在实践上成为最有效力和最适用的一种型式。但是这个所以有效的原因，即迴轉力矩 K_p 在这种情形里的有益作用，却曾經長時間地沒有查出¹⁾。

設 A 为碾輪对主軸中心軸的轉动慣量，主軸的中心軸綫現在就是形体軸； B 是对于过主軸与主动兩中心軸綫之交点的軸的轉动慣量（图 5），这軸垂直形体軸； ω_s 为碾輪繞其形体軸的本征角速度，以及 ω_p 为繞主动軸的进动角速度。那么，如以 δ 記一般任意的主軸与主动軸的夹角，則根据上册 §5 第二段的公式(5)，就有下列迴轉力矩的数量公式：

$$K_p = [A\omega_s + (A-B)\omega_p \cos \delta] \omega_p \sin \delta, \quad (1)$$

迴轉力矩以使 δ 角减小者为正值。

一般碾輪的 δ 角等于 90° ，此外，进动角速度 ω_p 恒等于主动軸的工作角速度 ω_s 。碾輪的本征角速度 ω_s 容易用工作角速度 ω_s 表示。我們取碾輪的任一圓切面，例如取过碾輪之重心 S 的切面，

1) 滾动磨机的迴轉儀理論是由作者首先作出的；見 R. Grammel, Z. VDI, 1917, 572 頁。

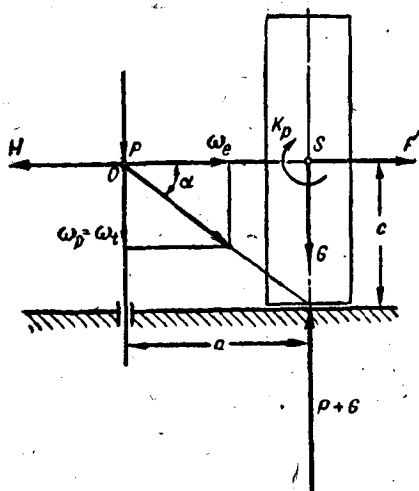


图5. 磨机的运动和示力图。

ω_e 。对于这参考系所立的动平衡方程式，应在已有的碾轮重量 G 、支板反力 $P+G$ 以及球铰链头给碾轮的水平 and 铅直力 H 与 P 之外，再补加两个达仑培尔的虚力，这就是，第一，补加由 ω_e 转动决定的离心力

$$F = \frac{G}{g} a \omega_e^2,$$

式中 $a = OS$ ；第二，补加迴转力矩 K_p 。这样，我们由动静法求得作用在主动轴上的水平载荷为

$$H = \frac{G}{g} a \omega_e^2, \quad (4)$$

作用在支板上决定于迴转力矩的补加压力，则为

$$P = \frac{K_p}{a} = \frac{A}{a} \omega_e^2 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{A}{c} \omega_e^2, \quad (5)$$

式中 c 是碾轮的流动半径。我们通过关系式

$$A = \frac{G}{g} k^2,$$

然后以 α 记 O 点对此切面圆之半径的射角，并假定碾轮在支板上无滑动地滚动，即得

$$\omega_e = \omega_i \operatorname{ctg} \alpha, \quad (2)$$

$$\omega_p = \omega_i.$$

由此可见，对于 $\delta = 90^\circ$ 的情形，有球铰链头之碾轮的迴转力矩为

$$K_p = A \omega_i^2 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3)$$

我们采用以角速度 ω_i 随主动轴旋转的参考系来研究碾轮的运动。在这个参考系中，碾轮只有本征角速度

將慣性半徑引入上式，即得分別由迴轉力矩及碾輪自重所引起的兩個壓力之比

$$\frac{P}{G} = \frac{k^2}{cg} \omega_i^2. \quad (6)$$

以上的計算是在假定主軸與碾輪剛性連結，因之，主軸也參與角速度為 ω_i 之本征轉動的條件下完成的。如果主軸不參與本征轉動，則 A 應僅是碾輪的轉動慣量，公式(6)也應稍有修改，關於這些我們就不談了。

我們舉一個例子。設碾輪的尺寸 $a=0.5$ 米， $c=0.45$ 米，碾輪的自重 $G=1000$ 公斤。假定碾輪的慣性半徑 $k=0.4$ 米，那麼轉動慣量即為 $A=16.3$ 公斤米²¹⁾。因此，當工作速度為 1 轉/秒，即 $\omega=2\pi$ 秒⁻¹ 時，我們有

$$P=1420 \text{ 公斤}, \quad \frac{P}{G}=1.42, \quad H=2000 \text{ 公斤},$$

可見，由迴轉力矩引起的補加壓力，接近比碾輪的自重大半倍。我們如果使用有球鉸鏈頭的碾輪，就能不化代價地得到這些補加的壓力，而且也不會使主動軸的水平載荷有所增加。假如用接頭裝置來代替球鉸鏈頭，迴轉力矩即表現為作用在主軸上的有害的彎矩 $M=aP=710$ 公斤米，並且不會產生任何作用在支鉸上的碾輪的補加壓力。

2. 三種改善碾輪的方法。迴轉力矩 K_p 的普遍公式(1)和特殊公式(3)表明，我們可以通過幾種不同的方法來改善碾輪在磨機中的作用。

在公式(1)中令 $\delta=90^\circ$ ，得

$$K_p = A \omega_i \omega_p, \quad (7)$$

可見，如果將進動角速度 $\omega_p=\omega_i$ 保持不變而增大碾輪的本征角速度 ω_i ，那麼也可以增加迴轉力矩 K_p ，而並不同時增加與 ω_i^2 成正比的離心力。根據公式(2)的第一式，這只要足夠地減小 α 角就行。但

1) 我們以後都採用工程單位制。

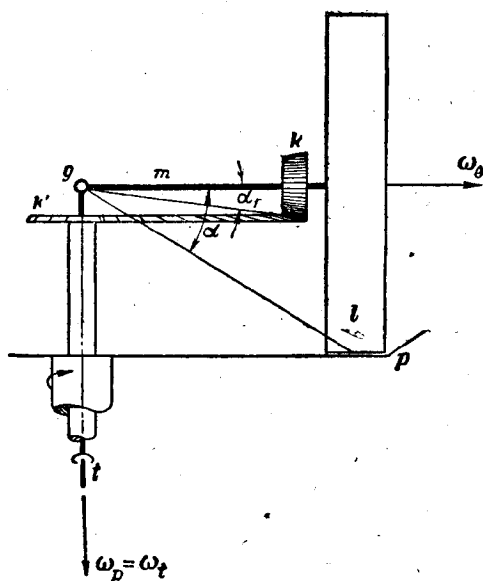


图 6. 有导盘的磨机。

是用这种方法不能得到最好的结果，因为碾轮及支板尺寸的变动范围一般很窄。另一种增加角速度 ω_t 的方法如图 6 所示。这是把支板(p)做成可以旋转，而在主轴上装着一个不大的圆锥齿轮(k)，它在一个水平固定的圆盘(k')上滚动着，并且两者的銜齿之间留有足够的间隙。这样一来，现在就不是支板(p)，而是圆盘(k')起着碾轮

导轨的作用。但因为圆盘(k')与齿轮(k)间留有足够的间隙，所以圆盘没有垂直朝上的压力施加给圆锥齿轮(k)。设 α_1 和 α 为从球铰链头的中心(g)引至圆锥齿轮(k)半径和碾轮半径的射角。我们将公式(2)和(3)中的 α 角以 α_1 角代替，即得为原值之 $\text{ctg } \alpha_1 : \text{ctg } \alpha$ 倍大的迴轉力矩 K_p 的新数值，由迴轉力矩引起的碾轮对于支板的压力也增大同样的倍数；与此同时，工作速度 ω_t ，因而离心力却仍旧保持原值。这样改变结构的结果，并不增加主动轴的载荷，而是把它比较不危险地分配在碾轮与支板之间。这一种附加圆锥齿轮的装置，特别适用于如因安装搅拌器而不得不限用单碾轮的情形。

此外，也有建议采用在碾轮里面安装由电流驱动的高速转子的方法¹⁾，来达到增加本征角速度 ω_t ，而无须提高工作速度 ω_t 的目的。

1) E. Baltz, Mellinands Textilber., 1946, 226 頁。

的。

增大迴轉力矩的另一種方法，如公式(3)所示，在於增加轉動慣量 A 。但为了不致因而使離心力增大，就必須摒棄一般圓筒形狀的碾輪，而找出另一種更加適宜的形狀。

圖 7 上畫着一份(四分之一)碾輪的三个投影圖。碾輪的外形

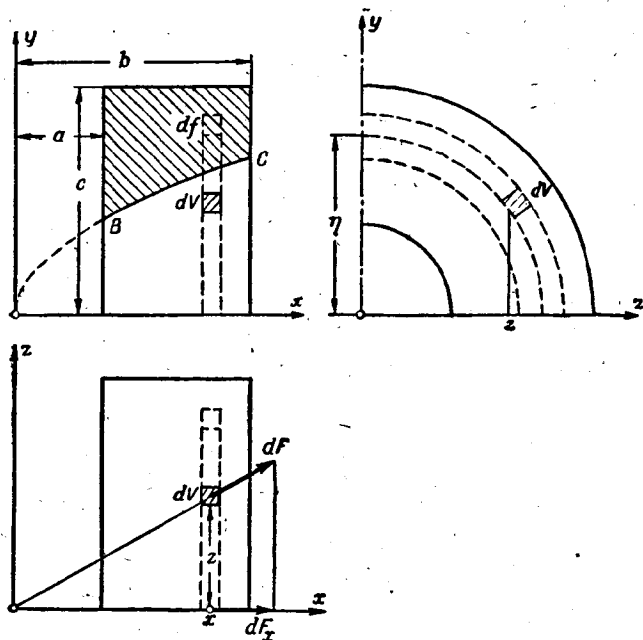


圖 7. 最有利的碾輪断面。

是由兩個離主動軸之距離為 a 和 b 的垂直平面以及中心軸同主動重合半徑為 c 的圓柱面所限定的。因之，碾輪的形狀只能通過內界綫 BC 來改變。圖 7 取主動軸和主動軸為 x 和 y 軸， z 軸垂直 x 和 y 軸而朝水平方向。現在我們的問題是：在給定的離心力 F 數值的條件下，找出使軸轉動慣量 A 最大的函數 $y=y(x)$ 之曲綫 BC 。

設 $df = dx dy$ 為碾輪之環形質量素的斷面積，此環的半徑為 η ；那麼以 γ/g 記碾輪的密度，我們即得轉動慣量 A 為

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2\pi\gamma}{g} \int \eta^3 dt = \frac{2\pi\gamma}{g} \int_a^b dx \int \eta^3 d\eta = \\
 &= \frac{\pi\gamma}{2g} \left[(b-a)c^4 - \int_a^b y^4 dx \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

这个环上离 \$(x, y)\$ 平面 \$z\$ 处的一个体积素 \$dV\$ 的离心力为

$$dF = \frac{\gamma\omega_i^2}{g} \sqrt{x^2 + y^2} dV,$$

此力沿主軸的分量为

$$dF_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} dF = \frac{\gamma\omega_i^2}{g} x dV,$$

求整个碾輪的这些分量之和, 即得全离心力:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{2\pi\gamma\omega_i^2}{g} \int x \eta df = \frac{2\pi\gamma\omega_i^2}{g} \int_a^b x dx \int_y^c \eta d\eta = \\
 &= \frac{\pi\gamma\omega_i^2}{g} \left[\frac{1}{2} (b^2 - a^2) c^2 - \int_a^b xy^2 dx \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

我們为了解决所提的問題, 应当要求(由量綱相等得出的)表达式

$$\omega_i^2 A - \lambda F$$

具有最大值, 式中 \$\lambda\$ 是待定参量, 或归结于要求积分

$$J = \int_a^b (y^4 - 2\lambda xy^2) dx \quad (10)$$

具有最小值。如果我們已經知道使积分式(10)具有所求性质的函数 \$y(x)\$, 那么将函数 \$y(x)\$ 增加一个无限小的增量 \$\Delta y\$, 将不会使 \$J\$ 的数值有显著的改变。因之, 我們仍旧有

$$J = \int_a^b [(y + \Delta y)^4 - 2\lambda x (y + \Delta y)^2] dx,$$

或去掉 \$\Delta y\$ 之高于二次幂的各项后, 得

$$J = \int_a^b [y^4 + 4y^2 \Delta y - 2\lambda x (y^2 + 2y \Delta y)] dx. \quad (11)$$

自等式(11)中减去等式(10), 即得

$$\int_a^b y(y^2 - \lambda x) \Delta y dx = 0, \quad (12)$$

無論增量 Δy 沿子午曲綫 BC 怎样取, 这个等式总是成立。但是这只有当积分式(12)中的被积函数等于零时才可能, 这就是說, 除了一般不适用的解 $y=0$ (圓片) 之外, 我們得到

$$y^2 = \lambda x. \quad (13)$$

这个解指出: 如果不看輪穀和輪輻, 那么碾輪的内部应当挖成頂点在主軸与主动軸两中心軸之交点的旋轉拋物体形状, 此拋物体的参量 λ 由使碾輪之离心力 F 得許可数值的条件决定。

將(13)式的数值代入等式(9), 即得

$$F = -\frac{\pi\gamma\omega_i^2}{g} \left[\frac{1}{2} (b^2 - a^2) c^2 - \frac{1}{3} \lambda (b^3 - a^3) \right],$$

于是找到参量 λ 的数值为

$$\lambda = \frac{3g(F - F_0)}{\pi\gamma\omega_i^2(b^3 - a^3)}, \quad (14)$$

式中

$$F_0 = \frac{\pi\gamma\omega_i^2}{2g} (b^2 - a^2) c^2, \quad (15)$$

这是尺寸为 a 、 b 和 c 的整个不挖空碾輪的离心力。將(13)式的数值代入等式(8), 則得軸轉動慣量 A

$$A = \frac{\pi\gamma}{2g} \left[(b-a) c^4 - \frac{1}{3} \lambda^2 (b^3 - a^3) \right]. \quad (16)$$

我們可以用变分法証明, 这一个 A 值确是对于給定离心力之最大的軸轉動慣量。

最后还有一个改善装有球鉸鏈头的碾輪作用的第三种方法。我們迄今所討論的碾輪, 其主軸与主动軸两中心軸綫的夹角都是 $\delta = 90^\circ$ 。其实, 这并不是一般最适当的角度; 就是說, 在給定的碾輪尺寸和工作速度 ω_i 的条件之下, 使用这样的角度一般不能得到最大的压力 $P+G$, 此处的 P 仍是迴轉力矩所引起的补加压力。要找出 δ 角的最适当的数值, 仍旧要回到普遍公式(1)。設 c 是过碾輪重心 S 之平面上的碾輪圓周的半徑 (图 8), 又假定此圓周是无滑动地沿着半徑为 r 的水平圓周滾动。那么, 我們以 a 記从重

自由矢量，补加作用在 S 点的离心力对 O 点之矩）。

我們在以下确定最有利角度 δ 的推导中，认定除工作速度 ω_t 给定以外， G 、 A 、 B_0 、 c 和 r 的数值，即碾輪的尺寸、质量和碾輪沿其滚动的水平圓周之半徑也都给定。于是，我們由图 8 可以求出

$$a \sin \delta = r + c \cos \delta, \quad \omega_s = \frac{r}{c} \omega_t, \quad \omega_p = \omega_t. \quad (18)$$

利用这些关系式，即可将等式(17)改成下列形式：

$$P \equiv \frac{P}{G} = \frac{c}{r} \cos \delta + \omega_t^2 \left[\frac{A}{cG} \sin \delta + \frac{A - B_0}{2rG} \sin 2\delta - \frac{r}{g} \left(1 + \frac{c}{r} \cos \delta \right)^2 \operatorname{ctg} \delta \right]. \quad (19)$$

我們要确定，压力比 p 对于两軸夹角 $\delta = 90^\circ$ 是否得最大值，可以求上式的偏导数 $\partial p / \partial \delta$ ，并在結果中代入 $\delta = 90^\circ$ 。这样，求得

$$\frac{\partial p}{\partial \delta} = (r^2 - k^2) \frac{\omega_t^2}{rg} - \frac{c}{r}, \quad \text{对于 } \delta = 90^\circ, \quad (20)$$

式中所引入的簡写关系为

$$A - B_0 = \frac{G}{g} k^2. \quad (21)$$

因为絕大多数碾輪总是 $r > k$ ，所以只有当

$$\omega_t^2 = \frac{cg}{r^2 - k^2}$$

的时候， $\delta = 90^\circ$ 的角度才算是主軸与主动軸之两条中心軸綫最有利的夹角。如果工作速度 ω_t 高于上值，最有利角 δ 要大于 90° ；如果 ω_t 低于上值，則 δ 要小于 90° 。

• 我們举个例子。設碾輪的自重 $G = 1000$ 公斤， $A = 18$ 公斤·米秒²， $B_0 = 10$ 公斤米秒²， $r = 1.0$ 米， $c = 0.5$ 米， $\omega_t = 2\pi$ 秒⁻¹。图 9 說明这种碾輪的 p 量与 δ 角間的关系，这是一般碾輪(p, δ)曲綫的典型形状。我們看到，最有利的 δ 角为 103° ，即主軸应較水平綫高出 13° ，同这角度相应的 p 之最大值則为 $p_{\max} = 1.60$ ，比主軸在水平位置的 $p_0 = 1.42$ 大 13% 。这样，由于迴轉力矩的帮助而使碾輪对支鉸之压力增大的数值，从主軸在水平位置时为碾輪自重

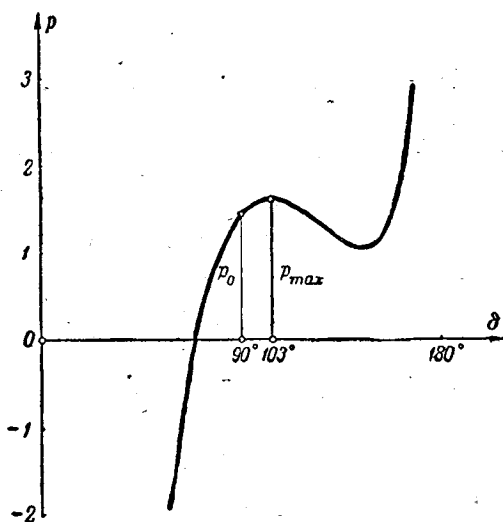


图9. 磨机的 (p, δ) 曲线。

的142%，用斜装主軸的办法就可以提高到碾輪自重的160%，并且，不增加碾輪的离心力载荷，相反的，当 $\delta = 103^\circ$ 时，离心力在給定的工作速度 ω_1 之下甚至要比 $\delta = 90^\circ$ 时小。

如果要把主軸的重量和轉动慣量計算在內，則以上所作的計算都要稍作修正。主軸的重

量約使碾輪对支鉸的压力增加其自重的一半。因为主軸一般不參與碾輪的本征轉动，所以它所产生的离心力之矩

$$K'_p = -(B' - A')\omega_1^2 \sin \delta \cos \delta, \quad (22)$$

是同主軸对过O点之軸的轉动慣量 A' 和 $B'(>A')$ 有关的。 K'_p 矩(装球鉸鏈头的情形)是增加或减小碾輪对支鉸的压力，要看主軸抬高或降低而定。

当然，这一个求主軸与主动軸两中心軸綫之最有利夹角 δ 的問題，还可以改成其他多种不同的提法。例如，我們可以不用 c 和 r 而把 a 和 r 的数值作为給定，因而 α 角(图8)也是給定的；那么在等式(17)中就必须以 a 和 c (或 α)来表出 r 。我們还可以不理 p 的最大值，而专求与最有利角 δ 相应的最大 M 矩，即等式(17)右端的最大值。这样的提法，例如对于支鉸是圓錐形状的情形特别恰当。所有这些情形的計算結果都指出：最有利的 δ 角一般不是 90° ，而是比它稍高一些。

3. 摆磨机 以上所討論的磨机的碾輪，是作外摆綫式的进动