依据新教学大纲编写

高中数理化导学丛书

高二数学（新教材）导学

丛书主编 门树慧 李国岚 李新黔

ax^2+bx+c

集名师经验

汇高考精华

0101101010101010101

金盾出版社
JINDUN CHUBANSHE

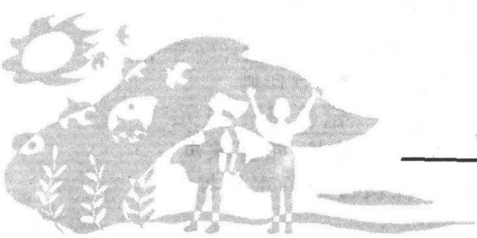
高中数理化导学丛书

高二数学（新教材）

导学

丛书主编　门树慧　李国岚
　　　　　李新黔

本书编著　门树慧　何怡生
　　　　　傅崇武　宋小华



金盾出版社

内容提要

本书包括：不等式，直线和圆的方程，圆锥曲线，直线、平面、简单多面体，排列、组合和概率，共五章。每章包括以下五部分：学习要求，知识要点，学习导引，相关高考题选，解题训练与检测。书中还有第一、第二学期期末综合练习以及全书练习题的答案与提示。本书是高二学生的学习指导书，同时供高三学生高考复习使用，也可供高中数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高中数理化导学丛书．高二数学(新教材)导学/门树慧等编著．—北京：金盾出版社，2004.6
ISBN 7-5082-2913-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．门…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 014368 号

金盾出版社出版、总发行
北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)
邮政编码：100036　电话：68214039　66882412
传真：68276683　电挂：0234
封面印刷：北京精美彩印有限公司
正文印刷：北京天宝印刷厂
各地新华书店经销

开本：787×1092 1/16　印张：16　字数：506 千字
2004 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
印数：1—13000 册　定价：18.00 元

序

为了强化素质教育，培养学生的创新精神和实践能力，体现课程改革的新思想、新观念，国家教育部修订了全日制中学九种学科教学大纲，人民教育出版社编写了教材(试验本)，并经试验修订后已在全国推广使用。

为配合新教学大纲和新教材的使用，我们精心策划编写了"高中数理化导学丛书"。本丛书包括数学、物理、化学三科共九册。各册分章编写，与教学同步。2003年已出版高一数理化三科共三册，2004年陆续出版《高二数学(新教材)导学》、《高二物理(新教材)导学》、《高二化学(新教材)导学》共三册。

本丛书突出一个"新"字。以新大纲新教材为依据，体现教改的新思想，并具有以下特点：

1. 导学部分，系统总结单元知识，突出重点，突破难点，解决疑点；例题部分，内容全面，题型多样，每题均有详尽的分析和解答，意在启迪思维，传授方法，点拨技巧，使学生掌握知识，学习技能。

2. 每章均配有解题训练与检测，每册书末有期末综合练习。编写中力求做到精讲精练，讲练结合，以提高学生解决实际问题的能力。

3. 每章设相关高考题选，并对试题进行解

析，意在使学生理解学科系统知识的连贯性和高考取样的全面性，启发学生循序渐进学好各单元知识，提高分析问题和解决问题的能力。这是高考“应试”的根基所在。

本丛书由北京教育学院和海淀教师进修学校的学科教学法教授、教学研究员，以及北京四中、师大附中、人大附中等重点中学特级教师、高级教师编写。

希望这套丛书能成为广大中学生的良师益友，同时献给中学教师作教学参考。书中不妥之处，请读者批评指正。

丛书编委会

2004年2月

前言

2002年，中华人民共和国教育部颁布了最新的《全日制普通高级中学数学教学大纲》，人民教育出版社编写的最新教材(试验修订本)在全国使用。新大纲和新教材强调引导学生积极主动地学习，突出基本数学概念和知识的教学，激发学生的创新意识和学习科学研究的方法，全面提高学生素质。

金盾出版社已于2003年6月出版了《高一数学(新教材)导学》，在此基础上，我们编写了《高二数学(新教材)导学》。本书以新大纲新教材为依据，分章编写。每章包括五部分：学习要求、知识要点、学习导引、相关高考题选、解题训练与检测。其中"学习导引"部分，突出本章知识重点，解答疑难，帮助学生掌握好数学概念和公式法则，为提高素质打下良好的知识基础，并选择典型例题，点拨解题思路，帮助学生理解和巩固所学知识，培养学生发现问题的能力，激发学生的创新意识。"相关高考题选"部分，分析了近年来高考的考点和热点，并选择与本章有关的高考题作详尽分析，启发学生懂得只有学好基础知识，才是应试的根基所在。"解题训练与检测"部分，选择本章练习题，内容新颖，不落窠臼，紧密联系实际。

由于高二数学下学期分为高二下A和高二

下 B(在高二下 B 中引入了空间向量)，供不同地区的学校根据自己的教学情况选用，所以本书也相应地将第九章分为第九章(A)和第九章(B)两部分。另外，新教材中增加了不少近代数学的内容和方法，如向量、概率等，所以本书导学中也注意了分析在现代科技中应用较多的数学内容和方法，如在“线性规划”中，介绍了如何应用数学知识解决实际问题等。

本书末配有练习题的参考答案和提示，供学生作自我检测和评价。

本书是普通高中二年级学生的学习指导用书，同时可供高三学生高考复习使用，也可供高中数学教师参考。

参加本书编写的还有刘绮、尹志锦、任如芬、李正、周玉芹、牛佳耘、毋艾、王屹威等。

我们相信本书必将以它的新特色赢得广大中学生和家长、教师的喜爱。书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

作者

2004 年 1 月

目 录

第六章
不 等 式

一、学习要求

1. 理解不等式的性质及其证明.
2. 掌握两个(或三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,并会简单的应用.
3. 掌握用分析法、综合法和比较法证明简单的不等式.
4. 掌握某些简单不等式的解法.
5. 理解不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

二、知识要点

本章的主要内容是不等式的性质,不等式的证明和一些不等式的解法.

(一) 不等式的性质

1. 不等式的概念

(1) 不等式的解集:使$f(x)>0$(或$f(x)<0$)成立的x的集合叫做不等式$f(x)>0$(或$f(x)<0$)的解集.

(2) 同解不等式:若不等式$f(x)>0$与$g(x)>0$(或$g(x)<0$)的解集相等,则$f(x)>0$与$g(x)>0$(或$g(x)<0$)叫做同解不等式,可记作$f(x)>0\Leftrightarrow g(x)>0$(或$g(x)<0$).

2. 不等式的性质

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性).

(2) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性).

(3) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$(加法保序性).

推论:$a+c>b\Rightarrow a>b-c$.

推论:$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(4) $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$(乘正数保序性);

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

推论:$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

推论:$a>b,ab>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(5) $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0$($n\in\mathbf{N}$,且$n>1$).

(6) $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N}$,且$n>1$).

(7) $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a(a>0)$;

$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a(a>0)$.

(8) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

推论:$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

这些性质是推导不等式其他性质的基础,也是证明不等式的依据.

(二) 不等式的证明

1. 证明不等式的主要依据

(1) $a-b>0\Leftrightarrow a>b$,

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

（2）不等式的性质．

（3）几个重要的不等式：

$a^2 \geqslant 0(a \in \mathbf{R})$；

$a^2+b^2 \geqslant 2ab(a,b \in \mathbf{R})$；

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}(a,b \in \mathbf{R}$，且 $a>0,b>0)$；

$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc(a,b,c \in \mathbf{R}$，且 $a>0,b>0,c>0)$；

$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}(a,b,c \in \mathbf{R}$，且 $a>0,b>0,c>0)$．

2. 证明不等式的常用方法

（1）比较法：比较法是一种最重要、最基本的方法，它又分为求差比较法和求商比较法．

（2）综合法：综合法是由因导果，即从已知条件或已知的真命题出发，一步步推出结论成立．

（3）分析法：分析法是执果索因，即从结论开始，一步步寻求上一步成立的充分条件，直至得出一个真命题为止．

此外，还有换元法，配方法，判别式法，函数法，放缩法等．

（三）不等式的解法

1. 一元不等式的分类

- 代数不等式
  - 有理不等式
    - 整式不等式
      - 一次不等式
      - 二次不等式
      - n 次不等式$(n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 3)$
    - 分式不等式
  - 无理不等式
- 超越不等式
  - 指数不等式
  - 对数不等式
  - 三角不等式
  - 反三角不等式

2. 解不等式的原则

利用同解变形，将各类不等式最终转化为一元一次不等式（组）或一元二次不等式（组）．将超越不等式转化为代数不等式；将代数不等式转化为一元一次不等式或一元二次不等式；将绝对值不等式转化为不含绝对值的不等式．

（四）不等式的一些应用

1. 用平均值不等式求函数的最大值与最小值

已知两个正变数的积是一个常数，那么当且仅当这两个数相等时，它们的和取最小值；已知两个正变数的和是一个常数，那么当且仅当这两个数相等时，它们的积取最大值．

2. 利用不等式讨论方程实根的个数与性质

三、学习导引

本章重点：

不等式的证明；

不等式的解法．

本章难点：

不等式的性质及其证明；

不等式的证明．

（一）不等式的性质

1. 不等式的基本性质

对于任意的实数 a,b，有 $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$. 这三条基本性质是推导不等式

性质的依据，也是证明不等式的基本思路．

2. 不等式性质的两种类型

不等式的性质包括“单向性”和“双向性”两个方面．

单向性：

(1) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

(2) $a>b,c>d>0\Rightarrow a+c>b+d$.

(3) $a>b>0,c>d\Rightarrow ac>bd$.

(4) $a>b>0,\alpha>0\Rightarrow a^{\alpha}>b^{\alpha}$.

双向性：

(1) $a-b>0\Leftrightarrow a>b;a-b=0\Leftrightarrow a=b;a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(2) $a>b\Leftrightarrow b<a$.

(3) $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.

(4) $a>b,c>0\Leftrightarrow ac>bc$.

(5) $a>b,c<0\Leftrightarrow ac<bc$.

在具有单向性的性质中，条件只是结论的充分条件，它可以作为证明不等式的依据，但不能作为解不等式的依据．具有双向性的性质中，条件和结论可以互相推出，它是解不等式的依据，也可用于证明不等式．

3. 不等式性质成立的条件

在运用不等式的性质解答问题时，要注意不等式性质成立的条件，否则将会出现错误．例如，性质“$a>b,c>0\Leftrightarrow ac>bc$”，如果去掉“$c>0$”这个条件，取 $a=5,b=2,c=-2$，就会出现“$5\times(-2)>2\times(-2)$”即“$-10>-4$”的错误结论．

4. 不等式的解集

使不等式 $f(x)>0$ 成立的所有的 x 构成的集合叫做不等式的解集．如果当且仅当 $a<x<b$ 时，有 $f(x)>0$，那么不等式 $f(x)>0$ 的解集有三种表示方法：$a<x<b$；$\{x|a<x<b\}$；区间 (a,b)．

【例 1】 用符号“$\subseteq,\subsetneqq,=$”连结下列各组集合．

(1) $x>3\Rightarrow x^2>9$，即 $\{x|x>3\}$____$\{x|x^2>9\}$；

(2) $x>5\Leftrightarrow\sqrt{x}>\sqrt{5}$，即 $\{x|x>5\}$____$\{x|\sqrt{x}>\sqrt{5}\}$；

(3) $x<2\Rightarrow x^3<a^3\,(a\geqslant2)$，即 $\{x|x<2\}$____$\{x|x^3<a^3\}\,(a\geqslant2)$．

解： (1) $\subsetneqq$. $\because\{x|x^2>9\}=\{x|x<-3$ 或 $x>3\}$.

(2) $=$.

(3) $\subseteq$. $\because\{x|x^3<a^3\}=\{x|x<a\}\,(a\geqslant2)$.

【例 2】 已知 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $|a|<|b|$，试确定 $a-b$ 的符号．

分析： 可先根据已知条件 $|a|<|b|$，讨论数轴上点 a,b 与原点 O 的位置关系，然后判定 a,b 的大小关系．

解： 由已知 $|a|<|b|$，即数轴上点 a 到原点的距离小于点 b 到原点的距离，可得到点 a,b 与原点 O 的六种位置关系，如图 6-1：

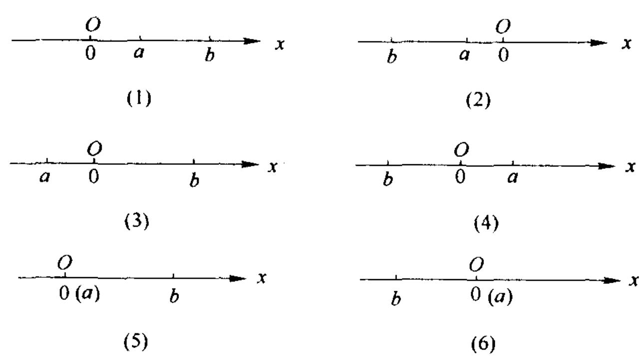


图 6-1

由图 6-1(1),(3),(5)可知,当 $0<a<b$ 或 $a<0<b$ 且 $|a|<|b|$,或 $a=0<b$ 时,有 $a-b<0$;由图 6-1(2),(4),(6)可知,当 $b<a<0$,或 $b<0<a$ 且 $|a|<|b|$,或 $b<0=a$ 时,$a-b>0$.

注意:讨论点 a,b 在数轴上的位置时,可分三种情况:点 a,b 在原点的同侧;点 a,b 在原点的异侧;点 a 与原点重合.不要遗漏 $a=0$ 的情形.

【例 3】 已知 α,β 满足 $1<\alpha<3$,$-4<\beta<2$,求 $\alpha-|\beta|$ 的取值范围.

解:$-4<\beta<2\Rightarrow 0\leqslant|\beta|<4\Rightarrow -4<-|\beta|\leqslant 0$.

$$\begin{cases}-4<-|\beta|\leqslant 0,\\ 1<\alpha<3,\end{cases}\Rightarrow -3<\alpha-|\beta|<3.$$

因此,$\alpha-|\beta|$ 的取值范围是 $(-3,3)$.

【例 4】 已知 $x>0$,求证 $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}$.

分析:本题是两个无理式的比较大小的问题,可利用化归原则将其逐步简化.先将其等价变形为不带分母的无理不等式,再等价变形为整式不等式.

解:由 $x>0$,从而有 $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}>0$,$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}>0$,

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x}>\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1} \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \quad ②$$

$\because$ $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}>0$,$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}>0$,

$$② \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})^2>(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(x+2)(x+1)}>2x+3+2\sqrt{x(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}>\sqrt{x^2+3x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2>x^2+3x$$

$$\Leftrightarrow 2>0.$$

$\therefore$ $2>0$ 成立,所以

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}.$$

注意:如果将①式两边直接平方,将有

$$① \Leftrightarrow 2x+2-2\sqrt{x^2+2x}>2x+4-2\sqrt{x^2+4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+2x}>1.$$

再往下证,还需将不等号两边作两次平方运算,这种证法虽可行,但不如正文中的证法简单.

【例 5】 已知 $0<a<b$,且 $a\neq 1$,$b\neq 1$,试比较 $\log_a b$ 与 $\log_b a$ 的大小.

分析:可利用换底公式将 $\log_a b$ 与 $\log_b a$ 化为两个常用对数值的比,以便利用已知条件 $0<a<b$ 与对数函数 $\lg x$ 的单调性对两个比值作比较.

解:$\because$ $\log_a b=\dfrac{\lg b}{\lg a}$,$\log_b a=\dfrac{\lg a}{\lg b}$,只需比较 $\dfrac{\lg b}{\lg a}$ 与 $\dfrac{\lg a}{\lg b}$ 的大小.

(1) 当 $1<a<b$ 时,$0<\lg a<\lg b$,

$\therefore$ $\dfrac{\lg b}{\lg a}>1>\dfrac{\lg a}{\lg b}$,即 $\log_a b>\log_b a$.

(2) 当 $0<a<b<1$ 时,$\lg a<\lg b<0$,

$\dfrac{\lg b}{\lg a}<1<\dfrac{\lg a}{\lg b}$,即 $\log_a b<\log_b a$.

(3) 当 $0<a<1<b$ 时,$\lg a<0<\lg b$.

当 $b>\dfrac{1}{a}$ 时,$\dfrac{\lg b}{\lg a}=\dfrac{\lg b}{\left(-\lg\dfrac{1}{a}\right)}$

$\because b>\frac{1}{a}>1$，$\therefore \lg b>\lg\frac{1}{a}>0$，$\frac{\lg b}{\lg\frac{1}{a}}>1$，从而$-\frac{\lg b}{\lg\frac{1}{a}}<-1$，即$\frac{\lg b}{\lg a}<-1$；

由上式可知，$\frac{\lg a}{\lg b}=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{-1}>-1$.

$\therefore \frac{\lg b}{\lg a}<\frac{\lg a}{\lg b}$，即 $\log_a b<\log_b a$.

当 $b=\frac{1}{a}$时，$\frac{\lg b}{\lg a}=\frac{\lg b}{\left(-\lg\frac{1}{a}\right)}=-1$，$\frac{\lg a}{\lg b}=-1$，$\therefore \frac{\lg b}{\lg a}=\frac{\lg a}{\lg b}$，即 $\log_a b=\log_b a$.

当 $1<b<\frac{1}{a}$时，同理可证，$\log_a b>\log_b a$.

综上，当 $1<a<b$，或 $1<b<\frac{1}{a}$时，$\log_a b>\log_b a$；当 $0<a<b<1$，或 $b>\frac{1}{a}>1$ 时，$\log_a b<\log_b a$；当 $b=\frac{1}{a}$时，$\log_a b=\log_b a$.

注意：本题利用换底公式将两个对数式比较大小的问题转化为下面的简单分式比较大小的问题：已知 $x,y\in\mathbf{R}$，$x<y$ 且 $xy\neq0$，试比较$\frac{x}{y}$与$\frac{y}{x}$的大小.

(二) 不等式的证明

1. 比较法

比较法是证明不等式的基本方法．比较法可以采用差值比较法(简称作差法)或比值判别法(简称作商法).

(1) 作差法：要证 $a>b$，只需证 $a-b>0$.

一般步骤是：作差→变形→判断符号．

常见形式：将原式进行因式分解，利用各因式的符号作判断；进行配方，利用非负数的性质作判断．

(2) 作商法：若 a,b 都是正数，则

$a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$；$a=b\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$；$a<b\Leftrightarrow\frac{a}{b}<1$.

一般步骤：作商→变形→与 1 比较大小．

【例 6】 已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证$\frac{1}{ac-bc}<\frac{1}{ad-bd}$．

证明：可用作差法证明 $ac-bc>ad-bd$.

$$\because ac-bc-(ad-bd)=c(a-b)-d(a-b)=(a-b)(c-d)>0,$$

$\therefore ac-bc>ad-bd$.

又因 $ad-bd>0$，并根据 $A>B>0\Leftrightarrow\frac{1}{A}<\frac{1}{B}$，所以$\frac{1}{ac-bc}<\frac{1}{ad-bd}$.

【例 7】 已知 a,b,c 为$\triangle ABC$ 的三条边，求证 $a^2+b^2+c^2+2ab>2(ac+bc)$.

证明：可用作差法进行比较．

$$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=(a+b-c)^2.$$

由三角形的边长性质可知，$a+b>c$，从而有$(a+b-c)^2>0$.

因此，$a^2+b^2+c^2+2ab>2(ac+bc)$.

注意：已知条件"a,b,c 为三角形的三条边"中，隐含了"三角形两边之和大于第三边"这一结论，证题时要注意发掘．

【例 8】 已知 $a>b>c$，求证$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$．

证明：$\because a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$，$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$

$\Leftrightarrow\dfrac{(b-c)(a-c)+(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\geqslant\dfrac{4(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

$\Leftrightarrow(b-c)(a-c)+(a-b)(a-c)\geqslant4(a-b)(b-c)$.

$\because\ \ (b-c)(a-c)+(a-b)(a-c)-4(a-b)(b-c)$

$=(b-c)[(a-b)+(b-c)]+(a-b)[(a-b)+(b-c)]-4(a-b)(b-c)$

$=(b-c)^2-2(a-b)(b-c)+(a-b)^2$

$=[(b-c)-(a-b)]^2\geqslant0$,

因此$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geqslant\dfrac{4}{a-c}$（当且仅当 $a-b=b-c$ 时取等号）.

【例 9】 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，求证 $a^2+b^2\geqslant ab$.

证法一：可用作差法证．

$\because\ \ a^2+b^2-ab$

$=\left[a^2-2a\cdot\left(\dfrac{b}{2}\right)+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2\right]+\dfrac{3}{4}b^2$

$=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqslant0$,

所以，$a^2+b^2\geqslant ab$（当且仅当 $a=b=0$ 时取等号）.

证法二：(1) 当 $ab\geqslant0$ 时，

$\because a^2+b^2\geqslant2ab$，且 $2ab\geqslant ab$，$\therefore a^2+b^2\geqslant ab$；

(2) 当 $ab<0$ 时，$a^2+b^2\geqslant0>ab$.

综上可知，$a^2+b^2\geqslant ab$.

注意：当 $ab<0$ 时，$2ab\geqslant ab$ 不成立，这时不能由 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 得出求证的结论．

【例 10】 已知 $a>0$，试比较$\sqrt{a}$与 $a^{\frac{1}{a+1}}$ 的大小．

分析：由于$\sqrt{a}$与 $a^{\frac{1}{a+1}}$ 都是以正数 a 为底的幂，可以尝试用作商法证明结论，即比较$\dfrac{\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{a+1}}}$与 1 的大小．

解：$\dfrac{\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{a+1}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}}=a^{\frac{a-1}{2(a+1)}}$.

当 $a>1$ 时，$a-1>0$，根据指数函数的性质有 $a^{\frac{a-1}{2(a+1)}}>1$；

当 $a=1$ 时，$a-1=0$，$a^{\frac{a-1}{2(a+1)}}=a^0=1$；

当 $0<a<1$ 时，$a-1<0$，根据指数函数的性质有 $a^{\frac{a-1}{2(a+1)}}>1$.

综上，有 $a^{\frac{a-1}{2(a+1)}}\geqslant1$，因此，$\sqrt{a}\geqslant a^{\frac{1}{a+1}}$.

2. 综合法

利用某些已经证明过的不等式作为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式，这种证明方法叫做综合法．综合法的思路是由因导果，也就是从一个（一组）已知的不等式出发，不断地用必要条件来代替前面的不等式，直至推导出所要求证的不等式，其推理方向是“$\Rightarrow$”.

证明时常用的一些重要不等式有：

$$a^2\geqslant0(a\in\mathbf{R});$$

$$a^2+b^2\geqslant2ab(a,b\in\mathbf{R});\qquad ①$$

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in\mathbf{R}^+);\qquad ②$$

$$a^3+b^3+c^3\geqslant3abc(a,b,c\in\mathbf{R}^+);\qquad ③$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}(a,b,c\in\mathbf{R}^+).\qquad ④$$

不等式①，②，③，④叫做平均值不等式．

平均值不等式具有将“和式”转化为“积式”与将“积式”转化为“和式”的放缩功能．

平均值不等式表明，当两个（或三个）正数的和为常数时，它们的积有最大值；当两个（或三个）正数的积

为常数时，它们的和有最小值．这两个结论常常用于求解最值问题．在具体应用时，要注意“一正，二定，三相等”，即

① 各项或因式均为正数；

② 和或积为定值；

③ 各项或各因式都能取得相等的值．

【例 11】 下列函数中，y 的最小值为 4 的是(　　)．

A. $y=x+\dfrac{4}{x}$　　B. $y=2(3^x+3^{-x})$

C. $y=\dfrac{2(x^2+5)}{\sqrt{x^2+4}}$　　D. $y=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

解：A. $y\geqslant 4$ 或 $y\leqslant -4$，y 没有最小值；

B. $y\geqslant 2\times 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=4$，当且仅当 $3^x=3^{-x}$，即 $x=0$ 时取等号，∴ y 的最小值为 4；

C. $y=\dfrac{2(x^2+5)}{\sqrt{x^2+4}}=2\left(\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)\geqslant 4$，当且仅当 $\sqrt{x^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 时取等号，而 $\sqrt{x^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 无实数解；

D. $y=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{\cos x\cdot\dfrac{4}{\cos x}}=4$，当且仅当 $\cos x=\dfrac{4}{\cos x}$ 时取等号，而 $\cos x=\dfrac{4}{\cos x}$ 不成立．

故选 B.

【例 12】 (1) 已知 $x>0, y>0$，且 $3x+4y=1$，求证：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 7+4\sqrt{3}$.

(2) 试从第(1)小题中受到启发，从而求出，当 $ax+by=1$(a,b 为正常数)时，$\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}$($m$、$n$ 为正常数)的最小值．

解：(1) 为求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值，可把条件 $3x+4y=1$ 代入 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$，将其化为一个便于使用平均值不等式的形式．为此，可将 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 中的 1 用 $3x+4y$ 代替．

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{3x+4y}{x}+\frac{3x+4y}{y}\\&=7+\frac{4y}{x}+\frac{3x}{y}\\&\geqslant 7+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}=7+4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases}3x+4y=1,\\ \dfrac{4y}{x}=\dfrac{3x}{y},\end{cases}$ 即 $x=\dfrac{2}{6+4\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$ 时，上式取等号．

(2)
$$\begin{aligned}\frac{m(ax+by)}{x}+\frac{n(ax+by)}{y}&=\frac{max+mby}{x}+\frac{nax+nby}{y}\\&=ma+nb+\frac{mby}{x}+\frac{nax}{y}\\&\geqslant ma+nb+2\sqrt{abmn}\\&=(\sqrt{ma}+\sqrt{nb})^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases}ax+by=1,\\ \dfrac{mby}{x}=\dfrac{nax}{y}\end{cases}$ 时，即 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{m}}{a\sqrt{m}+\sqrt{nab}},\\ y=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{mab}+b\sqrt{n}}\end{cases}$ 时，上式取等号，即所求的最小值为 $(\sqrt{ma}+\sqrt{nb})^2$.

【例 13】 已知 $x\in\mathbf{R}$，求证 $2x-x^2\leqslant 1$.

证法一：设 $f(x)=2x-x^2$，$x\in\mathbf{R}$.

根据二次函数的性质可知：当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant 0$；

当 $0<x<2$ 时，$x>0$，$2-x>0$，

$f(x)=2x-x^2=x(2-x)\leqslant\left[\dfrac{x+(2-x)}{2}\right]^2=1$；

当且仅当 $x=2-x$，即 $x=1$ 时，上式取等号.

所以，$f(x)=2x-x^2\leqslant 1$，$x\in\mathbf{R}$.

证法二：$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1\leqslant 1$，

当且仅当 $x=1$ 时上式取等号.

【例 14】 证明：不等式 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立的充要条件是 $x>0$.

证明：(1) 当 $x>0$ 时，由平均值不等式，有

$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，

当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，上式的等号成立.

所以 $x>0$ 是 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立的充分条件.

(2) 下面用反证法证明，$x>0$ 是 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立的必要条件，即证明：如果 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，那么 $x>0$.

假设当 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立时，$x>0$ 不成立，则 $x\leqslant 0$.

当 $x=0$ 时，$x+\dfrac{1}{x}$ 不存在，这与已知 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 矛盾；

当 $x<0$ 时，$x+\dfrac{1}{x}<0$. 这与 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立相矛盾.

所以，$x>0$ 是 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立的必要条件.

综上所述，$x>0$ 是 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 成立的充要条件.

说明：(1) 由本题(2)的证明过程可以看出，用反证法证明不等式的一般步骤是：①否定结论；②推理论证；③导出矛盾；④肯定结论.

(2) $f(x)\geqslant 0$ 的否定形式为 $f(x)<0$；$f(x)\leqslant 0$ 的否定形式为 $f(x)>0$；$f(x)>0$（$f(x)<0$）的否定形式为 $f(x)\leqslant 0$（$f(x)\geqslant 0$）.

【例 15】 证明函数 $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}$ 的值域是 $\left[0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup[1,+\infty)$.

证明：函数 $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}$ 的定义域是 $\left(\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[0,+\infty)$.

当 $x>0$ 时，$y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{x^2+3x+1}{x}}}=\sqrt{\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+3}}\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{2+3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

当且仅当 $x=1$ 时上式取等号.

当 $x=0$ 时，$y=0$.

当 $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 时，

$y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+3}}=\sqrt{\dfrac{1}{3-\left(|x|+\dfrac{1}{|x|}\right)}}$，