供中等以上水平学生使用

丛书主编／薛金星

高才生

第二次修订

怎样学好

高二数学（上）

北京教育出版社 北京出版社

高才生

GAOCAI SHENG

◎丛书主编／薛金星

★供中等以上水平学生使用

怎样学好

高二数学

上

北京教育出版社

北京出版社

高才生丛书

怎样学好高二数学(上)

ZENYANGXUEHAOGAOERSHUXUE

薛金星 丛书主编

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版
北 京 出 版 社

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网 址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

各 地 书 店 经 销

北京市昌平兴华印刷厂印刷

*

880×1230毫米 32开本 10.75印张 268千字

2004年5月第3版 2004年5月第1次印刷

ISBN 7—200—02758—8/G·889

定价:14.80元

阅读导引

基础知识导读

大楼建的好，基础最重要，每课的“基础知识导读”为你储备知识奠定基础。

重要问题学法指导

上课时重点问题最担心，总想让老师多讲几遍，“重要问题学法指导”为老师排忧，为学生解惑。

解题方法·技巧·策略

每次做题总像走迷宫，费时又费力。“解题方法、技巧、策略”教你应对各类题型的高招！

高考信息要求

实话：“谁不想考上！”复习时总怕常考知识点漏掉。“高考信息要求”帮你抓住考分！

典型思维误区警示

每课都有困惑之处，总要麻烦老师。“典型思维误区警示”帮你轻松解决问题！

方法技巧归纳

解题方法单一、思路不开阔是学生的通病。“方法技巧归纳”给你总结解题思路、方法和技巧，给你解题金钥匙。

竞赛知识导读

想成为高才生吗？竞赛题一定不放过。“竞赛知识导读”收罗竞赛知识点！让学习更上一层楼。

新·难·活·精题集萃

为什么平时高分，考试时成绩不理想呢？平时题型比较单一保守，考试很难拿到高分数。“新·难·活·精题集萃”，各类题型一应俱全，给你新感觉。考试拿高分。

目 录

第六章

不等式

第一节　不等式的性质

基础知识导读

1. 实数大小的比较

$a,b\in\mathbf{R}$，$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$，这既是比较法的依据，又是证明其他不等式性质的基础.

2. 不等式的性质

①对称性　$a>b\Leftrightarrow b<a$.

②传递性　$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

③可加性　$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.

④可积性　$c>0$ 时，$a>b\Leftrightarrow ac>bc$.

$c<0$ 时，$a>b\Leftrightarrow ac<bc$.

⑤加法法则　$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

⑥乘法法则　$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

⑦乘方法则　$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

⑧开方法则　$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*)$.

对于这些性质，关键是要正确理解和运用，要弄清每一条性质的条件和结论，注意条件的放宽与加强，条件与结论之间的相互联系.

重要问题学法指导

问题 1　不等式的性质与等式性质的主要区别

在乘除法和乘方、开方上差别较大. 在等式两边同乘上一个数，等式仍然成立，但在不等式两边同乘上一个数，就要看这个数的符号，如是正数，不等号不变；如是

负数，不等号要变向；如是零，应将不等号改为等号. 如等式 $a=b\neq0\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$，但对于不等式 $a>b$，就不能简单地得出 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ $\left(\text{或}\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\right)$ 了. 在乘方开方中，要在正数条件下才能确保乘方、开方后的不等式与原不等式同向. 在加减法中，不等式与等式也有所不同，不等式的加减需要注意方向，同向才可相加，异向才相减，而等式是没有方向的.

问题 2　不等式的乘方与开方

不等式在进行乘方与开方运算时，要注意数的正负，如 $a>b>0$ 时，可推出 $a^2>b^2$，但 $0>a>b$ 时，却推出了 $b^2>a^2$，而 $a>0>b$ 时就不能确定 a^2、b^2 的大小了，可见同样是 $a>b$，就有完全不同的结果. 还要注意指数的奇偶，如对于 $a^3>b^3$，只要条件 $a>b$ 就够了，不需要考虑它们的符号，这是由于 $y=x^3$ 是奇函数，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的原因；对于开方的情况也是类似的，只是当根指数为偶数时，被开方数只能为非负数.

问题 3　要注意不等式成立的条件

例如，在应用"若 $ab>0$ 时，$a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质时，既不能弱化条件变成 $a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，也不能强化条件变为 $a>b>0\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

解题方法·技巧·策略

1. 有关不等式的基本性质

例 1　对于实数 a、b、c，判断下列命题的真假.

(1)若 $a>b$，则 $ac<bc$；　　(2)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

(3)若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$；　　(4)若 $a<b<0$，则 $|a|>|b|$；

(5)若 $c>a>b>0$，则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$；　　(6)若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$.

分析：要判断上述命题的真假，依据就是实数集的基本性质及实数运算的符号法则，还有就是不等式的基本性质，经过合理的逻辑推理即可判断.

解：(1)由于 c 的正、负或是否为零未知，因而判断 ac 与 bc 的大小缺乏依据，故该命题是假命题.

(2)由 $ac^2>bc^2$ 知 $c\neq0$，而 $c^2>0$. $\therefore$ $a>b$. 故该命题为真命题.

(3)由 $\left.\begin{array}{l}a<b\\a<0\end{array}\right\}\Rightarrow a^2>ab$，又 $\left.\begin{array}{l}a<b\\b<0\end{array}\right\}\Rightarrow ab>b^2$，$\therefore$ $a^2>ab>b^2$. 故该命题为真命题.

(4)两个负实数，数小的离原点远，绝对值反而大. 故该命题为真命题.

(5) $a>b>0 \Rightarrow -a<-b \Rightarrow c-a<c-b$.

$c>a>b>0 \Rightarrow 0<c-a<c-b \Rightarrow \frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0 \Rightarrow \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

故该命题为真命题.

(6)由已知条件知：

$$\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b>0 \\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0 \Rightarrow \frac{b-a}{ab}>0 \\ \text{又 } a>b, \therefore a>0, b<0. \end{array}\right\} \Rightarrow ab<0,$$

故该命题为真命题.

评注：上述判断真假命题的练习可以让我们熟悉不等式的基本性质，更好地掌握性质定理及其推论的条件和结论. 如问题(1)～(3)主要考查了对定理 4 的理解，这是应用定理 4 最易出错的地方，即在不等式的两边同乘(除)以一个数时，必须能确定该数是正、负、零，否则，结论不确定. 问题(5)、(6)涉及两个已知数的倒数间的关系，由定理 4 可推导出结论.

另外，若要判断的命题是真命题，应说明理由或进行证明，推理过程应紧扣有关定理、性质等；若判断的命题是假命题，只需举一反例.

例 2　下列命题：

①若 $a>b$，且 a、b 同号，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

②若 $\frac{1}{a}>1$，则 $a<1$；

③$a \geqslant b$，且 $ac \geqslant bc \Rightarrow c \geqslant 0$；

④若 $a>b, n \in \mathbf{N} \Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}$.

其中真命题的个数为(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

分析：(1) $\because$ a、b 同号，$\therefore$ $\frac{1}{ab}>0$，由 $a>b$，两边同乘 $\frac{1}{ab}$ 得 $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$，即 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，亦即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，因此①是真命题；

(2)由 $\frac{1}{a}>1$ 可知 $a>0$，在 $\frac{1}{a}>1$ 两边同乘 a 得 $1>a$，综合得 $0<a<1$，因此②是假命题；

(3) $ac \geqslant bc$，即 $c \cdot (a-b) \geqslant 0$，当 $a-b=0$ 时，c 可取任意实数. 因此③是假命题；

(4)由 $a>b$ 可知 a、b、0 之间有三种可能性，即 $a>b \geqslant 0, a \geqslant 0>b, 0>a>b$.

若 $a>b\geqslant 0$，则由定理 4 的推论 2 知 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$；

若 $a\geqslant 0>b$，则 $a^{2n+1}\geqslant 0>b^{2n+1}$；

若 $0>a>b$，则 $(-b)>(-a)>0$，可得 $(-b)^{2n+1}>(-a)^{2n+1}$，即 $-b^{2n+1}>-a^{2n+1}$，即得 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$，因此④是真命题.

故选 B.

2. 实数大小的比较

例 3 已知 $a>b$，试比较 a^3 与 b^3 的大小.

分析：本题考查比较法、配方法以及对差的符号的判断.

解：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]$.

$\because a>b$，$\therefore a-b>0$.

又 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geqslant 0$，当且仅当 $a=b=0$ 时等号成立，但 $a>b$.

$\therefore \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}>0$.

$\therefore a^3>b^3$.

评注：两个实数比较大小，通常用作差法. 作差法的步骤：①作差；②变形（分解因式，配方法等）；③判断差的符号；④结论. 概括为“三步，一结论”，其中“判断差的符号”是目的，“变形”是关键. 常采用配方、因式分解、通分、有理化等恒等变形手段. 此题常犯的错误是由 $a>b$ 直接得出 $a^3>b^3$.

例 4 比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

解：$(x^6+1)-(x^4+x^2)=x^6-x^4-x^2+1=x^4(x^2-1)-(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^4-1)=(x^2-1)(x^2-1)(x^2+1)$

$=(x^2-1)^2(x^2+1)$.

当 $x=\pm1$ 时，$x^6+1=x^4+x^2$；

当 $x\neq\pm1$ 时，$x^6+1>x^4+x^2$.

评注：本题判断差的符号是通过因式分解的方法实现的，最后定号，需进行分类讨论.

例 5 已知 $a\geqslant 1$，试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小.

分析：若直接求差可得 $M-N=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}-2\sqrt{a}$，此式的正负不易判定；若先将 M、N 通过分子（或分母）有理化，然后再求差，就容易多了.

解：$M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$

$=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}<0$.

故 $M<N$.

评注：本题是利用先分子(或分母)有理化再判断差的符号.

例6　已知实数 x、y、z 满足①$y+z=6-4x+3x^2$；②$z-y=4-4x+x^2$. 试确定 x、y、z 间的大小关系.

分析：先两两比较大小，再将三个数进行大小的比较. 事实上，由②易得 z 与 y 的大小关系，由①、②消去 z 可得 y 与 x 的大小关系.

解：$z-y=4-4x+x^2=(2-x)^2\geqslant 0$，$\therefore\ z\geqslant y$；

由①－②，得 $2y=2+2x^2$，即 $y=1+x^2$，

$\therefore\ y-x=1-x+x^2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

$\therefore\ y>x$.

从而有 $z\geqslant y>x$.

评注：三个或三个以上实数的大小关系确定都是化归为两个数大小的比较，构造 y 与 x 的差式是解决本题的关键.

例7　已知 a、$b\in(0,+\infty)$，求证：$a^ab^b\geqslant(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

分析：本题给出的是两个指数形式，可用作商法.

证明：$\because\ \dfrac{a^ab^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{\frac{a-b}{2}}\cdot b^{\frac{b-a}{2}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}$.

若 $a>b>0$，则 $\dfrac{a}{b}>1$，$\dfrac{a-b}{2}>0$，$\therefore\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$；

若 $b>a>0$，则 $0<\dfrac{a}{b}<1$，$\dfrac{a-b}{2}<0$，也有 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$；

若 $a=b>0$，则 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}=1$.

故有 $a^ab^b\geqslant(ab)^{\frac{a-b}{2}}$.

评注：一般地，比较两个正的指数形式的实数大小，常用作商法. 作商法步骤：①作商；②变形；③与“1”比较大小；④结论. 即“三步，一结论”. 此方法常使用于两数(或式子)为正且是指数幂的形式.

3. 倒数问题

例8　已知 $a>b$ 且 $a\cdot b\neq 0$，试比较 $\dfrac{1}{a}$ 与 $\dfrac{1}{b}$ 的大小.

分析：用作差法比较两实数大小.

解：$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$.

$\because\ a>b$，　$\therefore\ b-a<0$.

当 $ab>0$ 时，则 $\frac{b-a}{ab}<0$， 此时有 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$， $\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

当 $ab<0$ 时，则 $\frac{b-a}{ab}>0$， 此时有 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$， $\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

评注：若 $a>b$，且 $a\cdot b>0$ 时，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 这一结论很重要，经常用到. 此结论的两个条件缺一不可，也不能将条件改为 $|a|>|b|$.

例 9 已知 $|a|>|b|(b\neq0)$，试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

分析：要比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小，只要研究 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 是正数、负数或零即可.

解：$\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，又 $|a|>|b|(b\neq0)$.

(1)当 a,b 同号时，

若 $a>b>0$，则 $ab>0$，$b-a<0$，$\frac{b-a}{ab}<0$， $\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

若 $a<b<0$，则 $ab>0$，$b-a>0$，$\frac{b-a}{ab}>0$， $\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(2)当 a,b 异号时，

若 $a>0$，$b<0$，则 $ab<0$，$b-a<0$，$\frac{b-a}{ab}>0$， $\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

若 $a<0$，$b>0$，则 $ab<0$，$b-a>0$，$\frac{b-a}{ab}<0$， $\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

评注：由于本题的已知条件给出的是 $|a|>|b|$，使问题大大复杂化了，所以对可能出现的四种情况都应给以讨论，不能有所偏废. 对于这种情况，一般容易忽视某一方面，因而造成解答错误，请予以注意.

4. 不等式性质的应用——证明问题

例 10 已知 a、b、c 均为正数，且 $b<c$，求证：$ab<ac+bc$.

证法 1：$\because a>0$ 且 $b<c$，$\therefore ab<ac$.

$\because c>0,b>0$，$\therefore bc>0$，$\therefore ab<ac+bc$.

证法 2：$\because a>0,b>0,c>0$，$\therefore 0<a<a+b$.

$\because 0<b<c$，$\therefore ab<c(a+b)=ac+bc$.

即 $ab<ac+bc$.

证法 3：$ab-(ac+bc)=a(b-c)-bc$.

$\because b<c$，$\therefore b-c<0$.

$\because a>0$，$\therefore a(b-c)<0$.

又 $\because b>0,c>0$，$\therefore -bc<0$，$\therefore a(b-c)-bc<0$，

即 $ab-(ac+bc)<0$. ∴ $ab<ac+bc$.

评注：使用不等式的性质时，要注意其条件. 只有牢记不等式的性质，才能正确使用这些性质.

5. 不等式性质的应用——范围问题

例 11　已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的取值范围.

分析：这类问题是学习三角函数内容时经常遇到的，由于当时所学内容所限，往往容易出错. 这里我们在已知的基础上，运用不等式的基本性质得出所要得到的结果.

解：∵ $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，

∴ $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

上面两式相加得 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

∵ $-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，　∴ $-\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$，

∴ $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又知 $\alpha<\beta$，　∴ $\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

评注：求含字母的数(式)的取值范围，一是要注意题设中的条件，充分利用条件，否则易出错. 本例中如果忽略了 $\alpha<\beta$，则 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的范围就求不出正确的结果. 二是变换过程中要注意准确利用不等式的基本性质以及其他与题目有关的性质等.

例 12　已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

分析：将 $f(3)$ 用 $f(1)$ 和 $f(2)$ 来表示.

解：∵ $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，

∴ $a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]$，$c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$.

于是 $f(3)=9a-c=9\times\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]-\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$

$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

∵ $-1\leqslant f(2)\leqslant5$，∴ $-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$.　①

$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$\therefore \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$. ②

由①+②得 $-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{40}{3}+\frac{20}{3}$，

故 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

当 $\begin{cases} f(1)=a-c=-1, \\ f(2)=4a-c=-1. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=0, \\ c=1 \end{cases}$ 时，左端取等号；

当 $\begin{cases} f(1)=a-c=-4, \\ f(2)=4a-c=5. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=3, \\ c=7 \end{cases}$ 时，右端取等号.

评注：解答此类问题常见的错误是：

由已知条件易得：

$$-4\leqslant a-c\leqslant -1, \quad ③$$

$$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5. \quad ④$$

对于③和④实施加减消元，得

$$0\leqslant a\leqslant 3, 1\leqslant c\leqslant 7. \quad ⑤$$

从而依 $f(3)=9a-c$ 使得 $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$.

其中错误的原因在于由③、④得知两式等号成立的条件不同.

例 13 已知 a,b,c 是任意实数，且 $a>b$，则下列各式恒成立的是（　　）.

A. $(a+c)^4>(b+c)^4$　　B. $ac^3>bc^3$

C. $\lg|b+c|<\lg|a+c|$　　D. $(b+c)^{\frac{1}{3}}<(a+c)^{\frac{1}{3}}$

分析：运用不等式的性质逐一判断正误.

解：由 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$，运用不等式的性质，知

当 $a+c<0$ 时，显然 A、C 不会成立；当 $c<0$ 时，显然 B 不能成立；

$\because f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，且 $b+c<a+c$，

$\therefore f(b+c)<f(a+c)$，利用函数的单调性，即 $(b+c)^{\frac{1}{3}}<(a+c)^{\frac{1}{3}}$.

故选 D.

评注：针对不等式“恒成立”，一定要注意其前提条件，必要时应予以分类作答，这是解题的常用手法，值得重视.

6. 不等式与函数

例 14 判定函数 $f(x)=-ax^3+1$，$a\neq 0$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性，并用函数单调性的定义证明.

分析：先判断，再证明.

证明时，由于 $f(x_1)-f(x_2)=a(x_2^3-x_1^3)=a(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

若设 $x_1<x_2$，且 x_1,x_2 为任意实数，则 $x_2-x_1>0$，所以要判断差式的符号，关键是讨论字母 a 的正负以及对 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ 的符号的判定. 由于 x_1、x_2 不能同时为零，所以难点是如何处理 x_1x_2.

解：当 $a>0$ 时，$f(x)=-ax^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数；

当 $a<0$ 时，$f(x)=-ax^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数.

下面进行证明：

在$(-\infty,+\infty)$上任取x_1、x_2且$x_1<x_2$.

则 $f(x_1)-f(x_2)=a(x_2^3-x_1^3)$

$=a(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

$=a(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]$,

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_2-x_1>0$，$\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$，

当$a>0$时，则有$f(x_1)-f(x_2)>0$，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)=-ax^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数.

当$a<0$时，则有$f(x_1)-f(x_2)<0$，$\therefore f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)=-ax^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数.

综上知，当$a>0$时，函数$f(x)=-ax^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数；

当$a<0$时，函数$f(x)=-ax^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数.

评注：此题作为高考的数学论证题，推理手段是代数运算.所要证明的不等式是严格不等式，稍不小心，便可能出错.因此，思维必须周密，基本方法要准确，而且基本运算也要熟练.

例 15　设$a>0$，且$a\neq 1$，试比较$\frac{1}{2}\log_a t$与$\log_a\frac{t+1}{2}$的大小.

分析：比较两个对数的大小，通常作差.利用对数函数的性质，以及不等式的性质，进行变形.这里底数a应分类讨论.

解：$\frac{1}{2}\log_a t-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\sqrt{t}-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\frac{2\sqrt{t}}{t+1}$.

$\because t+1-2\sqrt{t}=(\sqrt{t}-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore t+1\geqslant 2\sqrt{t}$. $\therefore 0<\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\leqslant 1$.

(1)当$0<a<1$时，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\geqslant 0$.

$\therefore$ 有$\frac{1}{2}\log_a t\geqslant\log_a\frac{t+1}{2}$（当且仅当$t=1$时取“$=$”号）；

(2)当$a>1$时，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\leqslant 0$.

$\therefore$ 有$\frac{1}{2}\log_a t\leqslant\log_a\frac{t+1}{2}$（当且仅当$t=1$时取“$=$”号）.

评注：这是一道不等式与对数函数知识的综合应用题，此题集中了多个知识点.因此在平时学习过程中，要注重知识之间的联系和沟通，以及知识的综合应用.

7. 赋值法解不等式问题

例 16 已知$-\frac{1}{2}<a<0$，$A=1+a^2$，$B=1-a^2$，$C=\frac{1}{1+a}$，$D=\frac{1}{1-a}$. 试将 A、B、C、D 按大小顺序排列.

分析：要比较大小的几个数都用 a 表示，题目中已给出了 a 的取值范围，不妨从中取一个值，看一看相应的 A、B、C、D 值的大小，然后用比较法比较即可.

解：$\because -\frac{1}{2}<a<0$，不妨取 $a=-\frac{1}{4}$，

则 $A=\frac{17}{16}$，$B=\frac{15}{16}$，$C=\frac{4}{3}$，$D=\frac{4}{5}$.

由此猜想：$D<B<A<C$.

只需证明 $C-A>0$，$A-B>0$，$B-D>0$ 即可.

$$B-D=(1-a^2)-\frac{1}{1-a}=\frac{a^3-a^2-a}{1-a}=\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}.$$

$\because -\frac{1}{2}<a<0$， $\therefore 1-a>0$，

又$-1<a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{4}<\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<1$，

故$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0$，

$\therefore \frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}>0$， $\therefore B>D$.

$A-B=(1+a^2)-(1-a^2)=2a^2>0$， $\therefore A>B$.

$$C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)=\frac{-a(a^2+a+1)}{1+a}=\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}.$$

$\because 1+a>0$，$-a>0$，$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore \frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}>0$， $\therefore C>A$.

综上可得 A、B、C、D 四个数的大小顺序是：$C>A>B>D$.

评注：该题用比较法将 A、B、C、D 的顺序给出. 比较法判断两个实数大小的步骤是：①作差，②变形，③判断符号，④结论.

该题是一个开放题. 为了探索一个解题方向，我们用了赋值法，即给问题中字

母以一个或一组特殊的数值(允许范围内的值),使抽象的数学式子具体化,要解决的问题明朗化.赋值法是解选择题、开放题、应用题等常用的方法.

例 17 (1995 年上海)当 $0<a<b<1$ 时,下列不等式正确的是( ).

A. $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^{b}$　　B. $(1+a)^{a}>(1+b)^{b}$

C. $(1-a)^{b}>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　D. $(1-a)^{a}>(1-b)^{b}$

解法 1: $\because$ $0<a<b<1$, $\therefore$ $0<1-a<1$.

$\therefore$ $y=(1-a)^{x}$ 是减函数. 又$\because$ $\frac{1}{b}>b>\frac{b}{2}$,故排除 A、C.

$\because$ $0<1+a<1+b$,$\therefore$ $(1+a)^{a}<(1+b)^{a}$,

又$(1+b)^{a}<(1+b)^{b}$,$\therefore$ $(1+a)^{a}<(1+b)^{b}$. 故 B 不正确.

故选 D.

解法 2:(取特殊值)设 $a=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}$.

则 $M=(1-a)^{\frac{1}{b}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$,$N=(1-a)^{b}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\therefore M^{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{4}<N^{2}=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ $M<N$,所以 A 不正确. 同理可排除 B、C.

故选 D.

8. 综合问题

例 18 我们知道,在$\triangle ABC$中,若 $c^{2}=a^{2}+b^{2}$,则$\triangle ABC$是直角三角形. 现在请你研究:若 $c^{n}=a^{n}+b^{n}$($n>2$,且 $n\in\mathbf{N}^{*}$),问$\triangle ABC$为何种三角形? 为什么?

分析:本例条件较为抽象,可先取一些特殊值试探一下.

解:令 $n=3$,$a=1$,$b=1$,则 $c=\sqrt[3]{2}\approx1.26$,画以 1,1,1.26 为边的三角形草图,观察易知是锐角三角形.

上述用特值试验的结论具有一般性,请看如下证明:

$\because$ $c^{n}=a^{n}+b^{n}$($n>2$),$\therefore$ $c>a$,$c>b$.

由 c 是$\triangle ABC$的最大边,所以要证明$\triangle ABC$是锐角三角形,只需证明角 C 为锐角,即证 $\cos C>0$ 即可.

$\because$ $\cos C=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$,$\therefore$ 要证 $\cos C>0$,只要证明 $a^{2}+b^{2}>c^{2}$.

$\because$ $a<c$,$b<c$,$n>2$,

$\therefore$ $a^{2}\cdot a^{n-2}<a^{2}\cdot c^{n-2}$,$b^{2}\cdot b^{n-2}<b^{2}\cdot c^{n-2}$,

$\therefore$ $a^{n}+b^{n}<(a^{2}+b^{2})c^{n-2}$,

又$\because$ $a^{n}+b^{n}=c^{n}$,$\therefore$ $c^{n}<(a^{2}+b^{2})c^{n-2}$,