高中代数类题解法

吉林教育出版社

高中代数类题解法

方昌武　费显华　张绍春　　编

高中代数类题解法　　方昌武　费显华　张绍春　编

责任编辑：王铁义　　封面设计：任载骊

出版：吉林教育出版社　　787×1092毫米 32开本 13印张　285000字

发行：吉林省新华书店　　1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷

印数：1-4974册　定价：4.00元

印刷：长春市第五印刷厂　　ISBN 7-5383-1405-2/G·1287

前　　言

《高中代数类题解法》一书是以《高中数学教学纲要（草案）较高要求内容》为准，参照1988年出版的高中试验课本《数学》的内容编写的。

编写此书时，我们注意到对已学内容的循环加深和知识间的内在联系，注意将知识的学习和能力的培养结合起来。

书中所选题目均系我们多年教学的结晶以及近几年来国内外一些考试的试题，题目新颖，具有典型性和代表性。我们力求突出重点，培养能力，寓主要知识于各种构思巧妙的习题之中，尽可能地提高学生分析问题和解决问题的能力以及参加各类考试的应试能力。

本书中的习题按现行中学课本知识系统分类，共分六章。每章都有基本知识、例题、习题及习题答案等。

我们热忱地把这本书奉献给即将迎接高考复习的高三同学和在校的其他年级同学以及自学的青年朋友，衷心地希望它能成为你们收益非浅的良师益友。

本书由方昌武组织编写，第一章、第三章由费显华执笔，第二章、第四章和第五章由张绍春执笔，第六章方昌武执笔，最后由方昌武审阅整理成书。

由于水平有限、编写匆忙，有不当之处，请批评指正。

编　者

1990年5月

目　　录

第一章　函　　数

函数是中学数学的重要内容之一，并由于它和生产、生活实践有广泛的联系而占有突出的地位。

在中学阶段，主要研究一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等七类初等函数，在这个基础上，总结出初等函数的一般性质。

在这里，我们着重研究幂函数、指数函数和对数函数及其性质。

§1　幂函数

一、基础知识

1. 定义

一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫幂函数，x 是自变量，α 是常数（在中学只讨论α是有理数的情况）。

2. 图象及其性质

（1）$\alpha>0$；

① 图象都通过点（0，0），（1，1）；

② 在第一象限内，函数值随 x 的值增大而增大；

③ 曲线没有渐近线。

（2）$\alpha<0$；

① 图象都通过点（1，1）；

② 在第一象限内，函数值随 x 的增大而减少；

③ 曲线有渐近线——x 轴与 y 轴。

二、举例与解法

例1 设$f(x)$是定义在区间$(-\infty, +\infty)$上以2为周期的函数，对 $k\in Z$，用I_k表示区间 $(2k-1, 2k+1]$，已知当 $x\in I_0$时，$f(x)=x^2$。

（1）求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式；

（2）对自然数 k，求集合$M_k=\{a\,|$使方程 $f(x)=ax$在I_k上有两个不相等的实根$\}$（1989年全国高考数学试题）。

〔解题方向〕 利用周期函数的定义可求$f(x)$在 I_k 上的解析表达式；考虑用判别式及两根取值范围可求集合M_k。

〔解〕（1）$\because$ $f(x)$是以2为周期的函数，

$\therefore$ 当 $k\in Z$时，$2k$ 是 $f(x)$ 的周期。

又$\because$ 当 $x\in I_k$时，$(x-2k)\in I_0$

$\therefore$ $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$

即对 $k\in Z$，当$x\in I_k$时，$f(x)=(x-2k)^2$

（2）解法一

当 $k\in N$且$x\in I_k$时，利用（1）的结论可得方程$(x-2k)^2=ax$，整理，得

$$x^2-(4k+a)x+4k^2=0$$

它的判别式是

$$\Delta=(4k+a)^2-16k^2=a(a+8k)$$

上述方程在区间I_k上有两个不相等实根的充要条件是a满足

$$\begin{cases} a(a+8k)>0 \\ 2k-1<\frac{1}{2}\left[4k+a-\sqrt{a(a+8k)}\right] \\ 2k+1\geqslant\frac{1}{2}\left[4k+a+\sqrt{a(a+8k)}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a(a+8k)>0 & ① \\ \sqrt{a(a+8k)}<2+a & ② \\ \sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a & ③ \end{cases}$$

由①知，$a>0$，或$a<-8k$。

当 $a>0$ 时：

∵　$2+a>2-a$，故从②、③可得

$\sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a$，即

$$\begin{cases} a(a+8k)\leqslant(2-a)^2 \\ 2-a>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (2k+1)a\leqslant 1 \\ a<2 \end{cases}$$

∴　$0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$

当 $a<-8k$时：

$2+a<2-a$，易知$\sqrt{a(a+8K)}<2+a$ 无解。

综上所述，a 应满足　$0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$。

$\therefore M_k=\left\{a \mid 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\right\}$

（2）解法二　利用根的存在定理

设　$F(x)=f(x)-ax=(x-2k)^2-ax$。则方程 $F(x)=0$ 在区间I_k上有两个不相等实根的充要条件是 a 满足

$$\begin{cases}F(2k+1)\geqslant 0\\F(2k)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2k+1-2k)^2-a(2k+1)\geqslant 0 & ④\\(2k-2k)^2-2ak<0 & ⑤\end{cases}$$

由$x\in I_k$，及$(x-2k)^2=ax$可知　$a>0$。

化简④得　$a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$　⑥

化简⑤得　$a>0$　⑦

由③和④得　$0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$

$\therefore\quad M_k=\left\{a\mid 0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}\right\}$

例2　已知二次函数$f(x)$的二次项系数为正，且对于任意的实数x，都有

$$f(1+x)=f(1-x)$$

求不等式$f\left(\dfrac{1}{4}\arccos x\right)>f\left[\dfrac{1}{4}\arccos(1-x)\right]$的解集。

〔解题方向〕　先求二次函数的对称轴及其单调区间，再利用单调性求不等式的解集。

〔解〕　由已知二次函数满足$f(1+x)=f(1-x)$知，二次函数的对称轴为　$x=1$。

又$\because$　$f(x)$的二次项系数为正，及

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$$

根据题意，$f(x)$在$(-\infty\quad 1]$上是减函数，

$$\therefore\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\-1\leqslant 1-x\leqslant 1\\\dfrac{1}{4}\arccos x<\dfrac{1}{4}\arccos(1-x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 2\\\arccos x<\arccos(1-x)\end{cases}$$

又　$y=\arccos x$ 在其定义域上是减函数，

$$\therefore\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 2\\x>1-x\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<x\leqslant 1$$

故所求解集为 $\left\{x\ \middle|\ \frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$.

〔注意〕此题若先设出 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 再把已知条件代入，求不等式的解集甚繁，读者如有兴趣不妨一试。

例 3　求函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数。

〔解〕（1）当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$-1\leqslant y=x^2-1\leqslant 0$$

$\therefore\quad x=\sqrt{1+y}$

（2）当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$0<y=x^2\leqslant 1$$

$\therefore\quad x=-\sqrt{y}$

于是　$x=\varphi(y)=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0\\-\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 1\end{cases}$

$\therefore$　反函数 $y=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\-\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$

〔注意〕　分段函数的反函数也是分段函数。

例 4　设函数 $y=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}$ 的最大值为M，最小值为 m. 其中 a、b 为常数，且 $a<b$，试证：$M=\sqrt{2}\,m$。

〔证明〕　函数的定义域为 $a \leqslant x \leqslant b$。

$\because \left(\sqrt{x-a}\right)^2+\left(\sqrt{b-x}\right)^2=b-a>0$

$\therefore$　设 $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-a}\cos\theta$

$$\sqrt{b-x}=\sqrt{b-a}\sin\theta,\ \theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

则　$y=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}$

$$=\sqrt{b-a}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)$$

$$=\sqrt{b-a}\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\because$　$\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore$　$y_{\max}=\sqrt{2}\sqrt{b-a}$，仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{a+b}{2}$

时，函数 y 取最大值，即

$$M=\sqrt{2}\sqrt{b-a}$$

同理，$y_{\min}=\sqrt{b-a}$，仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，即 $x=a$ 或 $x=b$ 时，函数 y 取最小值，即

$$m=\sqrt{b-a}$$

$\therefore$　$M=\sqrt{2}\,m$

〔注意〕　一般地，若 $x^2+y^2=R^2$，则可设 $x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$。此题也可用判别式去做，但解法较繁。

例 5　如果系数 a，b，c 全为正数的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根，证明实数根的绝对值小于 $\dfrac{b}{a}$，大于 $\dfrac{c}{b}$。

〔证明〕设 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 之两实根。由韦达定理，有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0\\ x_1x_2=\frac{c}{a}>0\end{cases}$$

∴ 可知$x_1<0$及$x_2<0$。

由$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow|x_1+x_2|=\frac{b}{a}\Rightarrow|x_1|+|x_2|=\frac{b}{a}$

∴ $|x_1|<\frac{b}{a}$，$|x_2|<\frac{b}{a}$

又由 $x_1x_2=\frac{c}{a}$，有

$$|x_1x_2|=\frac{c}{a}$$

$$|x_1||x_2|=\frac{c}{a}$$

$$|x_1|\cdot\frac{b}{a}>\frac{c}{a}$$

∴ $|x_1|>\frac{c}{b}$

同理 $|x_2|>\frac{c}{b}$

例6 已知函数$f(x)$定义在N上，满足

$$f(n)=\begin{cases}n-15 & \text{当 } n>2000\text{时}\\ f[f(n+20)] & \text{当 } n\leqslant 2000\text{时}\end{cases}$$

求$f(1989)$的值。

〔解〕 $f(1989)=f[f(1989+20)]=f[f(2009)]$

$=f(2009-15)$

$=f(1994)$

$=f[f(1994+20)]=f[f(2014)]$

$=f(2014-15)=f(1999)=f[f(1999+20)]$

$=f(2019-15)=f(2004)$

$=2004-15=1989$

〔注意〕 求分段函数的函数值时，要注意函数的定义。

例 7 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，求和

$$f(1)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{1}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+f\left(\frac{2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{2}\right)+\cdots$$

$$+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{100}\right).$$

〔解题方向〕 考虑 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

〔解〕 由已知，有

$$f(1)=f\left(\frac{2}{2}\right)=f\left(\frac{3}{3}\right)=\cdots=f\left(\frac{100}{100}\right)=\frac{1}{2}$$

又由 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，可得

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+1}$$

$$=1$$

即 $f\left(\frac{100}{1}\right)+f\left(\frac{1}{100}\right)=f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{100}{99}\right)$

$$+f\left(\frac{99}{100}\right)=1$$

$\therefore\quad f\left(1\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{100}\right)$

$$+f\left(\frac{2}{100}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{100}\right)$$

$=5000$

〔注意〕 共有100×100项。

例 8 设x，y，$z\in R$，在$\triangle ABC$中，证明：
$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$。

〔解题方向〕 考虑构造一个二次函数$f(x)$，要证$f(x)\geqslant 0$，只需证明$\Delta\leqslant 0$即可（因二次项系数为正）。

〔证明〕 设$f(x)=x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A$
$$-2zx\cos B$$

整理，得

$$f(x)=x^2-2x(y\cos C+z\cos B)+(y^2z^2-2yz\cos A)$$

$\because$ $f(x)$是关于x的二次函数且二次项系数为正，又

$$\Delta=4(y\cos C+z\cos B)^2-4(y^2+z^2-2y+z\cos A)$$
$$=4(y^2\cos^2C+z^2\cos^2B+2yz\cos B\cos C-y^2-z^2$$
$$+2yz\cos A)$$
$$=4[-y^2\sin^2C-z^2\sin^2B+2yz(\cos B\cos C+\cos A)]$$
$$=-4\{y^2\sin^2C+z^2\sin^2B-2yz[\cos B\cos C-\cos(B$$
$$+C)]\}$$
$$=-4(y^2\sin^2C+z^2\sin^2B-2yz\sin C\sin B)$$
$$=-4(y\sin C-z\cos B)^2\leqslant 0$$

$\therefore$ $f(x)\geqslant 0$，即

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$$

例 9　已知集合 $A=\{x\mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求实数$m$取什么值时，$A\cap B=\varnothing$成立。

〔解〕　由已知，集合A可化简为

$$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$$

当$B=\varnothing$时，有

$$m+1>2m-1$$

$\therefore\quad m<2$

当$B\neq\varnothing$时，有

$$\begin{cases}2m-1\geqslant m+1\\ 2m-1<-2\text{或 }m+1>5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 2\\ m<-\dfrac{1}{2}\text{或}m>4\end{cases}$$

$\therefore\quad m>4$

综上所述，当$m<2$或$m>4$时，$A\cap B=\varnothing$成立。

〔注意〕　要分$B=\varnothing$和$B\neq\varnothing$来考虑。

例10　对于$f(x)=x^2+ax+b$，求证：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$至少有一个不小于$\frac{1}{2}$。

〔解题方向〕　对于“至多”、“至少”一类问题可考虑用反证法。

〔证明〕　由已知，有

$$f(1)=a+b+1$$

$$f(2)=2a+b+4$$

$$f(3)=3a+b+9$$

由　$f(1)+f(3)-2f(2)=2$

$\therefore\quad |f(1)+f(3)-2f(2)|=2$

$\therefore\quad |f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geqslant 2$　　①

假设$|f(1)|<\frac{1}{2}$，$|f(2)|<\frac{1}{2}$，$|f(3)|<\frac{1}{2}$，则

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=2 \qquad ②$$

②与前面的①矛盾．

∴ $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$之中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$．

例11 设a，b是两个实数。

$$A=\{(x,\ y)\mid x=n,\ y=na+b,\ n\in z\}$$
$$B=\{(x,\ y)\mid x=m,\ y=3m^2+15,\ m\in z\}$$
$$C=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$$

是平面xoy内的点集合，讨论是否存在a和b，使得

（1）$A\cap B\neq\varnothing$

（2）$(a,\ b)\in C$

同时成立。（1985年全国高考数学试题）

〔解〕如果存在实数a和b使得（1）、（2）同时成立，由于（1）成立，便存在整数m和n，则

$(n,\ na+b)=(m,\ 3m^2+15)$，即

$$\begin{cases} n=m \\ na+b=3m^2+15 \end{cases}$$

由此得出，存在着整数n，使得

$na+b=3n^2+15$，即

$$b=3n^2+15-an \qquad ①$$

由（2）成立，得$a^2+b^2\leqslant 144$ ②

把①代入②，得到关于a的不等式

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+[(3n^2+15)^2-144]\leqslant 0 \qquad ③$$

它的判别式

$$\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]$$
$$=-36(n^2-3)^2$$

$\because$ $n\in Z$，$n^2-3\neq 0$

$\therefore$ $\Delta<0$

又$\because$ $1+n^2>0$

$\therefore$ 不等式③不可能有实数解 a，这就证明了不存在实数 a 和 b，使（1）、（2）同时成立 .

例12 已知 m，$n\in N$，$m>n$，且满足 $m^3+39n=n^3+39m$。设 $a=\log_{\frac{1}{2}}(m+n)$。证明：$-3<a<-2$。

〔证明〕 由 $m^3+39n=n^3+39m$，得

$$m^3-n^3=39(m-n)$$

$$\left.\begin{array}{l} m^2+mn+n^2=39 \\ m、n\in N \\ m>n \end{array}\right\}\Rightarrow m=5,\ n=2$$

$\therefore$ $a=\log_{\frac{1}{2}}(m+n)=\log_{\frac{1}{2}}(5+2)=\log_{\frac{1}{2}}7$

$\because$ $\log_{\frac{1}{2}}8<\log_{\frac{1}{2}}7<\log_{\frac{1}{2}}4$

$\therefore$ $-3<a<-2$

例13 已知 $f(x)=x^2-4ax+2a+30$ 的值总不是负数，求方程 $\dfrac{x}{a+3}=|a-1|+1$ 的解的范围.

〔解〕 由已知，知 a 应满足

$$\begin{cases}16a^2-4(2a+30)\leqslant 0 \\ a+3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a^2-a-15\leqslant 0 \\ a\neq -3\end{cases}$$