高等学校通用教材

工程数学

——复变函数与数学物理方程

杨嘉陵 刘沛清 编著

GONGCHENG SHUXUE

—FUBIANHANSHU YU SHUXUEWULI FANGCHENG

北京航空航天大学出版社

高等学校通用教材

工程数学

——复变函数与数学物理方程

杨嘉陵　刘沛清　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是为理工科院校工科类专业编写的一本小课时《工程数学》教材。主要由两个完全独立的章节构成。第1章为复变函数，内容主要有：复数、复变函数、解析函数、积分、泰勒级数和洛朗级数、留数以及利用留数定理计算积分；第2章为数学物理方程，内容主要有：数学物理方程研究对象与方法论、三类典型的偏微分方程、定解条件与定解问题的提法、定解问题的适定性、二阶线性偏微分方程及其分类、分离变量法、行波法(波动方程的达朗贝尔法)、求解稳态问题的格林函数法以及积分变换法。每章配有一定量的练习题。读者只要具备高等数学的基础知识就可以毫无困难地阅读这本书。本书可供高等院校工科专业作为教材，也可供自学者学习选用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：复变函数与数学物理方程/杨嘉陵等编著.
北京：北京航空航天大学出版社，2004.8
ISBN 7-81077-511-1

Ⅰ.工… Ⅱ.杨… Ⅲ.①复变函数—高等学校—
Ⅳ.0174.5②0175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第051906号

工程数学
——复变函数与数学物理方程

杨嘉陵 刘沛清 编著
责任编辑 刘宝俊

*

北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026
http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net
北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×960 1/16 印张：6.75 字数：156千字
2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷 印数：2 500册
ISBN 7-81077-511-1 定价：10.00元

前言

本书是在北京航空航天大学飞行器设计、工程力学等工科专业使用的《工程数学》讲义基础上修改而成。1997 年以后，开始制定 2000 年新版教学规划。这个规划贯彻了“加强基础、拓宽专业、精简内容、优化课程”的指导思想。在制定新版教学规划的过程中，通过压缩课内学时、增加课外学时，将学习主动权和自主权还给学生，强化学生的自学能力。本书的编写工作正是在这样的教学改革背景下进行的。2000 年以前的工程数学课实际由两门独立的数学课程构成，即复变函数、数学物理方程。每一门课的课内讲授时数都在 40 学时左右。本书在保持原有这两门课完整体系、逻辑主线和内容特色的基础上，将其中最基本、最重要的部分精选，压缩形成这样一本小课时数的《工程数学》教材，课内总讲授时数为 60 学时左右。在编写上，本书强调基本概念与理论，力求简明扼要，通俗易懂，以利于引导学生自学并进一步为深入了解研究生的课程打下基础。

本书共分两章，第 1 章由杨嘉陵编写，第 2 章由刘沛清编写。陈晏清教授审阅了书稿并提出了许多宝贵建议和意见，这里一并表示感谢。

编者

2004 年 4 月

目 录

第 1 章　复变函数

第 2 章 数学物理方程

第 1 章　复变函数

1.1　复　数

1.1.1　复数及其运算

数 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数，其中 x 和 y 是实数，而 i 称为虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$。x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记为：

$$x=\operatorname{Re} z \qquad 或 \qquad y=R(z)$$
$$y=\operatorname{Im} z \qquad 或 \qquad y=I(z)$$

若 $x=0$，$z=\mathrm{i}y$，则称 z 为纯虚数。两复数相等，必须而且只须它们的实部与虚部分别相等。

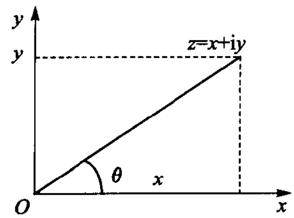

图 1.1

如果将 x，y 看作是平面上点的坐标，如图 1.1 所示，则就将复数 $x=x+\mathrm{i}y$ 和平面上的点 $P(x,y)$ 作成了一对一的对应，这个平面称为复数平面，所说的直角坐标系的 Ox，Oy 轴分别称为实轴与虚轴，而表示数 z 的点 P，通常简称“点 z”。

同样，如果将 x，y 看作是矢量 $x\vec{i}+y\vec{j}$ 在 Ox，Oy 轴上的投影，则就将复数与矢量作成了一一的对应。

采用极坐标 r，θ 来表示点 z 的位置，也就是利用复数矢量的模与该矢量和实轴的正向所夹的角度来确定点 z 的位置。此时由三角公式和欧拉公式，有

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

数 r 称为复数 z 的模，θ 称为辐角，$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为 z 的三角形式，$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为 z 的指数形式，我们常用以下的符号表示模和辐角：

$$r=|z|,\quad \theta=\operatorname{Arg} z$$

易知

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

量 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，它们之间可以相差 2π 的整数倍，由此知两个复数相等，当且仅当其模相等，而辐角相差 2π 的整数倍。通常将辐角在范围 $(-\pi,\pi)$ 中的值，称之为辐角的主值，记以

$\arg z$,即

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi$$

易知 $$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

复数的四则运算按以下规则进行:

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

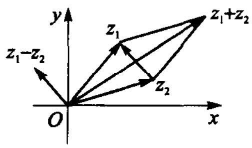

图 1.2

若将复数与矢量对应起来,由矢量加法的定义,易知两个复数相加刚好就是对应矢量的加法运算。又由于复数的模对应于矢量的长度,所以由图 1.2 即可得三角形不等式:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

及 $$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$$

若利用复数的三角形式

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

则乘法运算可写成

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{i}\sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \mathrm{i}\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

而除法运算可写成

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - \mathrm{i}\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - \mathrm{i}\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

由此可以得到

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \tag{1.1.1}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \tag{1.1.2}$$

易知式(1.1.1)还能扩充为

$$|z_1z_2\cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|$$

$$\operatorname{Arg} z_1z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \cdots + \operatorname{Arg} z_n \tag{1.1.3}$$

特别当 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ 时,式(1.1.3)化为

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n\arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

因而得到

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

这个公式称为棣莫弗公式。

满足方程

$$w^n = z$$

的所有的 w 值，称为复数 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$。

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$为 z,w 的三角形式，则有

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

于是

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

且

$$w = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$是 r 的 n 次算术根，由于 k 取 $0,1,\cdots,n-1$ 诸值时即得 w 的 n 个不同的值，而且 w 仅有这 n 个不同的值，因此所求的 n 次方根为

$$w=\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

或

$$w=\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

从几何上来看，$\sqrt[n]{z}$的 n 个值显然可以用一个以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正多边形的顶点来表示。

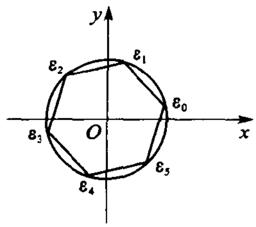

图 1.3

例 1.1　求$\sqrt[6]{1+i}$的 6 个根

解：$1+i$ 化成指数形式：

$$1+i = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

于是

$$\sqrt[6]{1+i} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)/6} \qquad (k=0,1,2,\cdots,5)$$

依次令 $k=0,1,2,\cdots,5$，得到 6 个值为

$$\varepsilon_0 = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{\pi}{24}},\quad \varepsilon_1 = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{9\pi}{24}},\quad \varepsilon_2 = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{17\pi}{24}}$$

$$\varepsilon_3 = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{25\pi}{24}},\quad \varepsilon_4 = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{33\pi}{24}},\quad \varepsilon_5 = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{41\pi}{24}}$$

这 6 个值的位置如图 1.3 所示。

复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 称为是相互共轭的。我们将 $z=x+iy$ 共轭复数记为$\bar{z}$，即 $\bar{z}=x-iy$，可以看到 z 点与 $\bar{z}$ 点关于实轴对称的。设 $z=re^{i\theta}$则有

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = re^{-i\theta}$$

并且容易证明：

$$z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}z$$

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

1.1.2 复数球面

除了将复数表示为平面上的点外，在许多问题中，用另一种几何方法来表示复数也是有益的。今作一球面 S，它与平面 z 相切于原点 O（O 称为球面的南极），过点 O 引垂直于平面 z 的直径 OP（P 点称为球面的北极），如图 1.4 所示。设 z 为 z 平面上的任一点，作直线段连结 z 点与 P 点，此线段与球面交于点 Z'（异于点 P），我们就让 Z' 点与 z 点对应；反之，设 Z' 为球面上的任一点（除北极 P 外），作线段 PZ'，它的延长线交 z 平面于 z 点，我们就让点 z 对应点 Z'。这样，球面 S 上的点（除北极 P 外）与 z 平面上的点之间作成了一对一的对应。因而面上的点（除北极 P 外）也和复数全体组成了一对一的对应。这种对应的方法称为测地投影。直到现在，我们还没有任何一个复数与球面的北极点对应，但是我们也看到，对于复数平面上的点 z，当 $|z|$ 无限增大时，它在球面上所对应的点就无限向点 P（北极）趋近。我们引入一个新的"复数∞"，记为 $z=\infty$，令它与北极 P 点对应，并称它为复数平面上的无穷远点。"数"$z=\infty$ 所起的作用，由几何观点来看与普通的数如 $z=2+5\mathrm{i}$，$z=\mathrm{i}$ 等所起的作用相同。

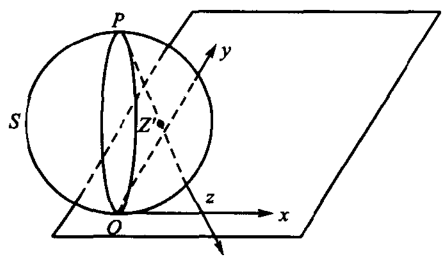

图 1.4

复数平面加上无穷远点称为**扩大复数平面**或**全平面**。如上所说，全平面上的点与球面上的点作成了一对一的对应，这种球面称为**复数球面**。

1.2 复变函数

1.2.1 复变函数

复变量函数论的一些基本概念，如函数、极限、连续概念都是实变函数论中相应概念的推广，因此，在这里我们仅简单地叙述这些概念。

定义 设 D 是复数 z 的一个集合，若按照一定的规律，对于 D 中的每一个 z 值都有一个或多个确定的值 w 与之对应，则称 w 是 z 的函数，记作

$$w = f(z)$$

集合 D 称为该函数的定义集合。对应于 D，函数 w 的值的集合称为函数值集合，记为 G。

若对于 D 中的每一个 z 值只有 G 中的一个 w 值与之对应，则称 $w=f(z)$ 为单值函数；否则，就称它为多值函数。

令 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，给定复数 z 相当与给定两个实数 x 和 y，由 $w=f(z)$ 确定了两个实数 x 和 y 与两个实数 u 和 v 的对应。所以，给定一个复变函数 $w=f(z)$ 就相当与给定两个二元的实变函数：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

例如，若 $w=z^2$，令 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则得到

$$u+\mathrm{i}v=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$$

因而复变函数 $w=z^2$ 相当于两个二元实变函数：

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy$$

若将集合 D 安置在一个复数平面（z 平面）上，集合 G 安置在另一复数平面（w 平面）上，则从几何上来看，函数就确定了 z 平面上点集 D 与 w 平面上点集 G 的点之间的一个对应，亦即函数 $w=f(z)$ 将 z 平面上的点映射到 w 平面上相应的点上去，故我们也称 $w=f(z)$ 为**映射**或**变换**。

例如，设 $w=z^2$，引用极坐标 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$w=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$，则由上式知

$$\rho=r^2\qquad\varphi=2\theta$$

因此经过变换 $w=z^2$ 后，z 平面上的点 (r_0,α) 变到平面上的点 $(r_0^2,2\alpha)$，射线 $\theta=\alpha$ 变为射线 $\varphi=2\alpha$；圆周 $r=r_0$ 变为圆周 $\rho=r_0^2$；圆域 $r\leqslant r_0$ 变为圆域 $\rho\leqslant r_0^2$；上半平面 $0<\theta<\pi$ 变为沿正实轴有一裂缝的 w 平面（如图 1.5 所示）。

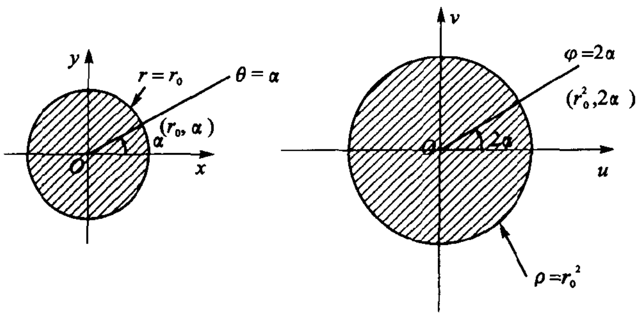

图 1.5

对于 $w=f(z)$，取集合 G 中任意确定的一点 w，我们求得集合 D 中这样的点 z，它（们）被映射为所取的点 w。这样一来，集合 G 的每一个点 w 将对应着集合 D 的一个或多个点 z，按照函数的定义，这就是说，在集合 G 上定义了某一函数 $z=\varphi(w)$，我们称它为关于函数 $w=f(z)$ 的反函数。

1.2.2 极限与连续

与实变函数的极限、连续的定义类似，对于复变函数，有

定义 设 $w=f(z)$ 为单值函数，若对于任意指定的正数 ϵ，恒存在正数 δ，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，不等式

$$|f(z)-w_0|<\epsilon$$

成立，则称 w_0 为函数 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \tag{1.2.1}$$

如图 1.6 所示，若记 $z=x+\mathrm{i}y, w=u+\mathrm{i}v, z_0=x_0+\mathrm{j}y_0, w_0=u_0+\mathrm{i}v_0$，则易知等式(1.2.1)相当于

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0 \tag{1.2.2}$$

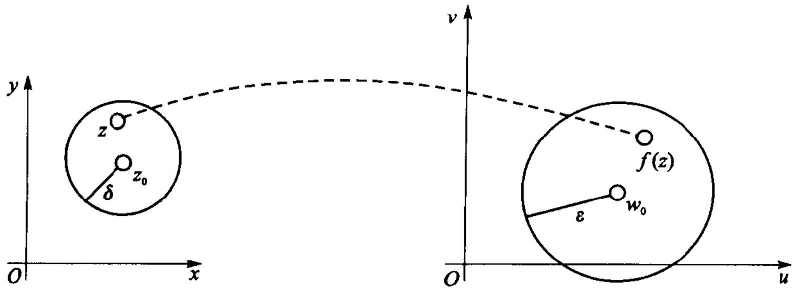

图 1.6

定义 若函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 处成立等式：

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{1.2.3}$$

则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 处连续。

若 $f(z)$ 在区域 D 的每一点处都连续，则称 $f(z)$ 在区域 D 是连续的。

易知等式(1.2.3)相当于等式

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0), \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0) \tag{1.2.4}$$

亦即函数 $f(z)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 的连续性，相当与两个二元实变函数($f(z)$ 的实部和虚部)在点(x_0,y_0)的连续性。

1.2.3 常见的几个复变函数

常见的几个复变函数有：

(1) 正整数幂的幂函数 $w=z^n$ 和多项式 $w=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$

(2) $w=\dfrac{1}{z}$ 和有理分式 $w=\dfrac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}$

(3) 指数函数 $w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$

指数函数有下述性质：

1° 不论 z 是什么复数，$\mathrm{e}^z\neq0$。

这是因为 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|=1$，$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x>0$。因而 $\mathrm{e}^z\neq0$。

又由

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}(y+2\pi)}=\mathrm{e}^x[\cos(y+2\pi)+\mathrm{i}\sin(y+2\pi)]=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=\mathrm{e}^z$$

于是有

2° e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的周期函数。

再由

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}&=\mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1+\mathrm{i}\sin y_1)\cdot\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2+\mathrm{i}\sin y_2)\\&=\mathrm{e}^{x_1+x_2}[(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)+\mathrm{i}(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2)]\\&=\mathrm{e}^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2)+\mathrm{i}(\sin y_1+y_2)]\\&=\mathrm{e}^{z_1+z_2}\end{aligned}$$

即有

3° $\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$

因此有

4° $(\mathrm{e}^z)^m=\mathrm{e}^{mz}$，其中 m 是整数。

1.2.4 三角函数

$$w=\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$

$$w=\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$

我们指出，所有的三角公式在复数范围内都成立，例如

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$$

$$\sin(z+2\pi)=\sin z$$

等等，但请特别注意，在复变数的情况下，我们不能再断言 $|\sin z|\leqslant1$ 与 $|\cos z|\leqslant1$。事实上，例如：

$$\cos\mathrm{i}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^1+\mathrm{e}^{-1})=\cosh 1=1.543\,08\cdots$$

$$\sin\mathrm{i}=\mathrm{i}\sinh 1=(1.175\,20\cdots)\mathrm{i}$$

1.2.5 双曲线函数

$$w=\sinh z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})$$

$$w=\cosh z=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})$$

与三角函数的定义相对照，我们得到

$$\sinh z=-\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z,\quad \cosh z=\cos \mathrm{i}z$$

或
$$\sin \mathrm{i}z=\mathrm{i}\sinh z,\quad \cos \mathrm{i}z=\cosh z$$

这些公式表明，双曲线正弦与双曲线余弦可分别用正弦函数与余弦函数表示出来。与三角函数的公式平行地可以得出一套双曲线函数的公式，例如

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$$

$$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1 \operatorname{conh} z_2+\operatorname{conh} z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z+2\pi \mathrm{i})=\sinh z$$

1.2.6 对数函数

若 $e^{w}=z(z\neq 0)$，则称 w 为 z 的对数函数，记为

$$w=\operatorname{Ln} z$$

记 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$w=u+\mathrm{i}v$，则有

$$re^{\mathrm{i}\theta}=e^{u+\mathrm{i}v}=e^{u}\cdot e^{\mathrm{i}v}\qquad 或\qquad r=e^{u},e^{\mathrm{i}\theta}=e^{\mathrm{i}v}$$

即
$$u=\ln r=\ln|z|,v=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\operatorname{Ln} z=\ln r+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

因而 $\operatorname{Ln} z$ 是一个多值函数。对于每一个 k，上述函数是一个单值函数，称它为 $\operatorname{Ln} z$ 的单值分支。特别称对应于 $k=0$ 的那一支为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值，记为 $\ln z$，即

$$\ln z=\ln r+\mathrm{i}\arg z$$

而
$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi \mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $z=x>0$ 时，有 $\ln z=\ln x$，这说明复对数函数是实对数函数的扩充。

1.2.7 任意复数为指数的幂函数的定义

$$w=z^{\mu}=e^{\mu \operatorname{Ln} z}$$

由于 $\operatorname{Ln} z$ 的多值性，所以一般说来，z^{μ} 也是多值的。以 $\ln z$ 代替 $\operatorname{Ln} z$ 所得到的 w 称为 z^{μ} 的主值。当且仅当 μ 为整数时，$w=z^{\mu}$ 才是单值函数。

下面是一些例子。

例 1.2 $e^{\pi \mathrm{i}}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

例 1.3　$\sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

例 1.4　$\ln(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)=0+\pi i=\pi i$

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ln(-1)+2k\pi i=(2k+1)\pi i \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例 1.5　$i^i=e^{i\mathrm{Ln}i}$，而

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\, i &= \ln|i|+i(2k\pi+\arg i)\\ &= i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

故

$$i^i=e^{-\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

1.3　解析函数

与实变函数的导数类似，对于复变函数，有

定义　设 $w=f(z)$是区域 D 内的单值函数，z 是 D 内一点，如果不论 Δz 按什么方式趋于零时，比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

都趋于同一个极限值，则称这个极限为函数 $f(z)$在 z 点的导数，记为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=f'(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.3.1}$$

如果单值函数 $f(z)$在点 z 的某一邻域内每一点处导数都存在，则称 $f(z)$在点 z 是**解析的**或**正则的**。如果单值函数 $f(z)$在区域 D 的一切点处都解析，则称 $f(z)$在区域 D 内是解析的或正则的。

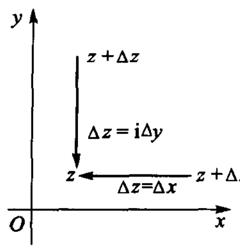

图 1.7

下面我们来研究 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部 $u(x,y)$与虚部 $v(x,y)$应满足哪些条件才能使 $f(z)$在区域 D 内为解析。

若设 $f(z)$在 D 内是解析的。由于极限式(1.3.1)存在，且与 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 趋于零的方式无关，故可特别取 $\Delta z=\Delta x$，即取点 $z+\Delta z$ 沿着平行于 Ox 轴的直线趋于点 z(如图 1.7)，此时得到

$$\begin{aligned}f'(z)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\ &=\lim_{\Delta x\to0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + \mathrm{i}\,\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.3.2)$$

即
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

另外，若选取 $\Delta z = \mathrm{i}\Delta y$，即取点 $z+\Delta z$ 沿着平行于 Oy 轴的直线趋于点 z，得到

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i}\,\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}\right] \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right] \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

即
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

比较式(1.3.2)和式(1.3.3)即得

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \quad (1.3.4)$$

上述联立方程称为柯西-黎曼方程。这就是说，若 $f(z)$ 在 D 内解析，则在 D 内 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 必须满足柯西-黎曼方程。

反之，在 D 内 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 的一阶偏导数都连续，且满足柯西-黎曼方程，则 $f(z)$ 在 D 内解析。

事实上，由二元函数的全增量公式，有

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\rho$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_2\rho$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，当 $\rho \to 0$ 时，$\alpha_1 \to 0$，$\alpha_2 \to 0$。利用上两式求出函数 $f(z)$ 的改变量 $f(z+\Delta z) - f(z)$，于是有

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2)\rho}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

利用柯西-黎曼方程条件式(1.3.4)，上式可改写为：

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} + \frac{\alpha\rho}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

其中 $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$。当 $\rho \to 0$ 时 $\alpha \to 0$ 于是

$$\left|\frac{\alpha\rho}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}\right| = |\alpha|\frac{\rho}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = |\alpha| \to 0 \qquad (当\ \rho \to 0)$$