488例题解析

电工电路

下

全套书共1161例题

〔日〕山口胜也 井上文弘 佐藤和雅 西田允之 著
秦晓平 译
聂凤仁 校

科学出版社
www.sciencep.com

488例题解析

电工电路

（下）

〔日〕山口胜也　井上文弘　佐藤和雅　西田允之　著

秦晓平　译

聂凤仁　校

科学出版社

北京

图字：01-2004-0886 号

内 容 简 介

本书共分上中下三册。本册作为下册，以例题详解的方式，结合相关的图示，通俗易懂、由浅入深地介绍非正弦周期电流电路、分布参数电路及拉普拉斯变换，并在书末给出综合例题。上册主要直流电路及交流电路等，中册则主要介绍电路网络及多相交流等。

本书的特点是通过丰富的例题讲解相关的内容，不仅内容充实且例题丰富，全书共11章、例题1161个；本书的内容循序渐进、例题的编排由浅入深，可以满足不同层次的读者；各章均先简明扼要地归纳本章内容重点，然后给出从简单到复杂的例题，便于读者可以有针对性、有选择地学习。

本书可作为大专院校电工、电子、通信等专业的参考用书，或相关专业的工程技术人员及工程硕士的参考用书；特别是对报考电工、电子、通信等专业研究生的学生来说，是一本难得的好书。

图书在版编目(CIP)数据

488例题解析电工电路(下)/(日)山口胜也等著；秦晓平译；聂风仁校. 北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-013523-7

Ⅰ.4… Ⅱ.①山… ②秦… ③聂… Ⅲ.电路-高等学校-解题 Ⅳ.TM13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第060647号

责任编辑：王 炜 崔炳哲/责任制作：魏 谨

责任印制：刘士平/封面设计：李 力

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

北京东方科龙图文有限公司 制作

http://www.okbook.com.cn

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年9月第 一 版 开本：A5(890×1240)

2004年9月第一次印刷 印张：12 5/8

印数：1—4 000 字数：358 000

定 价：25.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

序　言

本册继《电工电路》之上、中册之后，同样收集了相关的丰富例题，适用于4年制大学电工、电子、通信工程专业的学生，也适用于短期大学或高等专科学校中相关专业的学生。此外，本书对电工、无线通讯、无线电技师国家等级考试等应试者来说，也是一本难得的好书。

本书介绍非正弦交流电路、分布参数电路、拉普拉斯变换的习题和涵盖全3册内容的综合例题。在各章的开篇都简要地叙述了该章的要点。为了使初学者充分理解每个例题，在解题过程中尽量保留完整的数学推导步骤，避免逻辑思维的跳跃，使读者能够顺利地理解解题的要领。

所谓“会”是指能解决实际的问题。我们的目的是使读者通过学习本书达到彻底掌握解决问题的方法。

本书引用了电气学会大学讲座《电路理论》中各章末习题，感谢电气学会通信教育会的巽良知先生对此慷慨应允；同时本书出版还得到CORONA出版社的尽力支持。在此谨向有关各位人士深表谢意。

山口胜也

目　　录

第1章　非正弦周期电流电路

第2章　分布参数电路

第3章　拉普拉斯变换

第1章 非正弦周期电流电路

1.1 傅里叶级数展开

以 x 为自变量的函数 y 具有 2π 的周期，即当 $y=f(x)$ 时，有

$$f(x)=f(x+2\pi)$$

则可以对 y 进行级数展开：

$$\begin{aligned}
y = f(x) &= a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \cdots \\
&\quad + b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + b_3\cos 3x + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx
\end{aligned} \tag{1.1}$$

称为傅里叶级数展开。

1.2 傅里叶系数

式(1.1)中的三角函数(正弦函数和余弦函数)的系数 a_n，b_n，b_0 的求法如下。

(1) **a_n 的求法** a_n 可由

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

求出。

(2) **b_0 的求法** b_0 可由

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

求出。

(3) **b_n 的求法** b_n 可由

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

求出。

1.3 非正弦周期函数

如果 $f(t)$是以 T 为周期的非正弦函数(参见图 1.1),即

$$f(t+T)=f(t)$$

所以

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\,\omega t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\,\omega t \tag{1.5}$$

式中 $T=\frac{1}{f}$, $\omega=2\pi f$。

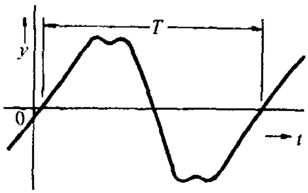

图 1.1

则式(1.5)中三角函数的系数为:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t \tag{1.6}$$

$$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.7}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\,\omega t\,\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

b_0 也称为非正弦周期函数的平均值。

频率最低的正弦波叫做基波,频率为基波频率整数倍的正弦波叫做谐波。

当 $f(t)$ 为奇函数时,即 $f(t) = -f(-t)$ 时

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_n &= 0 \\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

当 $f(t)$ 为偶函数时,即 $f(t) = f(-t)$ 时

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\,\omega t\,\mathrm{d}t \\ b_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

设非正弦周期电压的有效值$|E|$的直流分量为E_0，各次谐波的有效值分别为$|E_1|,|E_2|,\cdots,|E_n|\cdots$，则可用

$$|E|=\sqrt{E_0{}^2+|E_1|^2+|E_2|^2+|E_3|^2+\cdots+|E_n|^2+\cdots} \tag{1.11}$$

表示。电流的情况也相同，可表示为

$$|I|=\sqrt{I_0{}^2+|I_1|^2+|I_2|^2+|I_3|^2+\cdots+|I_n|^2+\cdots} \tag{1.12}$$

非正弦周期电压的直流分量和电流的直流分量分别为E_0和I_0；各次谐波的电压及电流分别为E_i和I_i；功率因数为$\cos\varphi_i$，则有功功率P_a可表示为：

$$P_a = E_0 I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} |E_i||I_i|\cos\varphi_i \tag{1.13}$$

非正弦周期电流电路的视在功率P为：

$$\begin{aligned} P &= |E|\cdot|I| \\ &=\sqrt{(E_0{}^2+|E_1|^2+|E_2|^2+\cdots)(I_0{}^2+|I_1|^2+|I_2|^2+\cdots)} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\text{非正弦周期函数的波形因数}=\frac{\text{有效值}}{\text{平均值}} \tag{1.15}$$

$$\text{非正弦周期函数的波峰因数}=\frac{\text{最大值}}{\text{有效值}} \tag{1.16}$$

$$\text{非正弦周期函数的畸变因数}=\frac{\text{全部谐波的有效值}}{\text{基波的有效值}} \tag{1.17}$$

三相交流电路中非正弦周期函数的谐波的次数为$N(n=0,1,2,\cdots)$，则有

(1) 当$N=3n$时，各相同相（为零序分量）。

(2) 当$N=3n+1$时，为正序分量。

(3) 当$N=3n+2$时，为负序分量。

三相非正弦周期电流电路的有功功率 P_a 为：

$$P_a = \sqrt{3}|E_1||I_1|\cos\varphi_1 + \sqrt{3}|E_3||I_3|\cos\varphi_3 + \sqrt{3}|E_5||I_5|\cos\varphi_5 + \cdots \tag{1.18}$$

例 题

【1.1】 对图 1.2(a)和(b)的波形进行傅里叶级数展开。

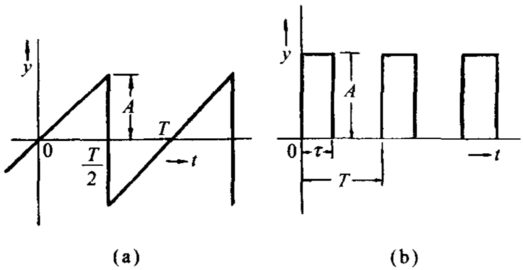

图 1.2

[解] (1)如图(a)所示

$$f(t) = -f(-t), \quad f\left(t+\frac{t}{2}\right) = -f(t)$$

所以

$$b_n = b_0 = 0, f(t) = 2At/T$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\,\omega t\,dt = \frac{8A}{T^2}\int_0^{T/2} t\cdot\sin n\,\omega t\,dt$$

$$= \frac{8A}{T^2}\left[t\cdot\frac{-\cos n\,\omega t}{n\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{8A}{T^2}\int_0^{T/2}\frac{-\cos n\,\omega t}{n\omega}dt$$

$$= -\frac{8A}{T^2}\cdot\frac{T}{2}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{n}\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \quad \left(其中, \omega = 2\pi\frac{1}{T}\right)$$

所以

$$f(t) = \sum_{n=1} a_n \sin n\,\omega t$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(\sin\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sin 4\omega t}{4} + \cdots\right)$$

(2) 如图(b) 所示

$0 \leqslant t \leqslant \tau$ 时，　$f(t) = A$

$\tau < t \leqslant T$ 时，　$f(t) = 0$

所以

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin n\,\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^\tau A \cdot \sin n\,\omega t\,dt$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n\,\omega}\Big[-\cos n\,\omega t\Big]_0^\tau = \frac{A}{n\pi}(1 - \cos n\,\omega\tau)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\,\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^\tau A \cdot \cos n\,\omega t\,dt$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n\,\omega}\Big[\sin n\,\omega t\Big]_0^\tau = \frac{A}{n\pi}\sin n\,\omega\tau$$

$$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^\tau A\,dt = \frac{A}{T}\tau$$

所以

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\,\omega t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\,\omega t$$

因此

$$f(t) = \frac{A}{\pi}\left[(1 - \cos\omega\tau)\sin\omega t + \frac{(1 - \cos 2\omega\tau)}{2}\sin 2\omega t + \cdots\right] + \frac{A\tau}{T}$$

$$+ \frac{A}{\pi}\left(\sin\omega\tau\cos\omega t + \frac{\sin 2\omega\tau}{2}\cos 2\omega t + \cdots\right)$$

【1.2】 求出上一题波形的有效值、波形因数、波峰因数。

[解] (1) $0 \leqslant t \leqslant T/2$ 时，$f(t) = 2At/T$，所以

$$有效值 = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\{f(t)\}^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{2A}{T}\right)^2 t^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{T}\left(\frac{2A}{T}\right)^2 \frac{1}{3}\left(\frac{T}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

$$平均值 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2}A}{\frac{T}{2}} = \frac{A}{2}$$

因此

$$\text{波形因数}=\frac{\text{有效值}}{\text{平均值}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=1.15$$

$$\text{波峰因数}=\frac{\text{最大值}}{\text{有效值}}=\sqrt{3}=1.73$$

(2) $0\leqslant t\leqslant \tau$ 时，$f(t)=A$

$\tau< t\leqslant T$ 时，$f(t)=0$

所以

$$\text{有效值}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\{f(t)\}^2\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^\tau A^2\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}A^2\tau}=A\sqrt{\frac{\tau}{T}}$$

$$\text{平均值}=\frac{A\tau}{T}$$

因此

$$\text{波形因数}=\frac{\text{有效值}}{\text{平均值}}=\frac{A\sqrt{\frac{\tau}{T}}}{A\,\frac{\tau}{T}}=\sqrt{\frac{T}{\tau}}$$

$$\text{波峰因数}=\frac{\text{最大值}}{\text{有效值}}=\frac{A}{A\sqrt{\frac{\tau}{T}}}=\sqrt{\frac{T}{\tau}}$$

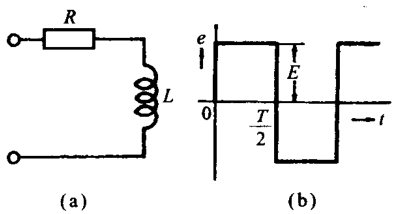

图 1.3

【1.3】 如图 1.3 所示，在 R-L 串联电路中施加方波电压如图 1.3(b) 所示，求出电流和电阻 R 上消耗的功率 P。

［解］ 设方波电压为 $y=e(t)$，首先将其展开为傅里叶级数。因为 $e(t)$ 是奇函数，$b_0=0,b_n=0$。并且

$$e(t) = E \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}\right)$$

因此

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} e(t)\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} E\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}E \cdot \frac{1}{n\,\omega}\Big[-\cos n\,\omega t\Big]_0^{T/2} = \frac{2E}{n\pi}\times 2 = \frac{4E}{n\pi}$$

又因偶数项为零,n 是奇数,结果为

$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega\,t + \frac{1}{3}\sin 3\omega\,t + \frac{1}{5}\sin 5\omega\,t + \cdots\right)$$

$$= \frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{(2n+1)}$$

该电压加到 R-L 串联电路上,对于角速度为$(2n+1)\omega$ 电压分量,电路的阻抗为 $R + j(2n+1)\omega L$,电路中流过的总电流是各电压分量产生的电流总和。总电流 i 为:

$$i = \frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega\,t - \varphi_n]}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + (2n+1)^2\omega^2 L^2}}$$

$$= \frac{4E}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega\,t - \varphi_n]}{(2n+1)\sqrt{R^2 + (2n+1)^2\omega^2 L^2}}$$

式中

$$\varphi_n = \arctan\frac{(2n+1)\omega L}{R}$$

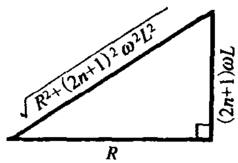

图 1.4

第 n 次谐波的电压、电流所产生的功率 P_n 和功率因数 $\cos\varphi_n$ 的关系如图 1.4 图所示,因此

$$P_n = |E_n||I_n|\cos\varphi_n$$

$$= \left(\frac{4E}{\sqrt{2}\pi}\right)\cdot\frac{1}{(2n+1)}\cdot\left(\frac{4E}{\sqrt{2}\pi}\right)$$

$$\times\frac{1}{(2n+1)\sqrt{R^2 + (2n+1)^2\omega^2 L^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2 + (2n+1)^2\omega^2 L^2}}$$

$$= \frac{8E^2}{\pi^2}\cdot\frac{R}{(2n+1)^2[R^2 + (2n+1)^2\omega^2 L^2]}$$

总功率 P 是各功率成分的总和:

$$P=\sum_{n=0}^{\infty}P_n=\frac{8E^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R}{(2n+1)^2[R^2+(2n+1)^2\omega^2L^2]}$$

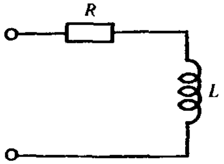

图 1.5

【1.4】 如图 1.5 所示，在电阻 R 和电感 L 构成的电路中加上

$$e=200\sqrt{2}\sin\omega t+50\sqrt{2}\sin3\omega t+30\sqrt{2}\sin5\omega t(\mathrm{V})$$

的电压，求出该电路消耗的功率及功率因数。设 $R=5\Omega,\omega L=2\Omega$。

[解]

$$基波电压的有效值=\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=200(\mathrm{V})$$

对应于基波的电路阻抗 Z_1 为：

$$Z_1=5+j2=5.38\angle22^\circ(\Omega)$$

$$I_1=\frac{200}{Z_1}=\frac{200}{5.38\angle22^\circ}=37.18\angle-22^\circ(\mathrm{A})$$

因而基波功率 P_1 为：

$$P_1=37.18^2\times5=6.910(\mathrm{kW})$$

三次谐波的电压有效值

$$E_3=\frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=50(\mathrm{V})$$

$$Z_3=5+(j3)\times2=5+j6=7.81\angle50^\circ(\Omega)$$

$$I_3=\frac{50}{Z_3}=\frac{50}{7.81\angle50^\circ}=6.4\angle-50^\circ(\mathrm{A})$$

因而功率 P_3 为：

$$P_3=6.40^2\times5=0.205(\mathrm{kW})$$

五次谐波的电压有效值

$$E_5=\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=30(\mathrm{V})$$

$$Z_5=5+(j5)\times2=5+j10=11.18\angle64^\circ(\Omega)$$

$$I_5=\frac{30}{Z_5}=\frac{30}{11.18\angle 64^\circ}=2.68\angle -64^\circ(\mathrm{A})$$

因而功率 P_5 为：

$$P_5=2.68^2\times 5=0.036(\mathrm{kW})$$

所以总功率 P_a 为：

$$P_a=P_1+P_3+P_5=6.91+0.205+0.036=7.151(\mathrm{kW})$$

功率因数 $\cos\varphi$ 是这个功率（电阻上消耗的功率）与视在功率 S 的比值，即

$$\cos\varphi=\frac{P_a}{S}=\frac{7.151\times 10^3}{\sqrt{(200^2+50^2+30^2)(37.18^2+6.4^2+2.68^2)}}$$
$$=0.908=90.8\%$$

【1.5】 在图 1.6 所示的 C-R 并联电路的 ab 端子之间加上 $e(t)=E_m(\sin\omega t+h\sin 3\omega t)$ 的电压，求出总电流中的三次谐波的最大值与基波最大值之比。其中 $h=0.1,\omega=1/RC$。

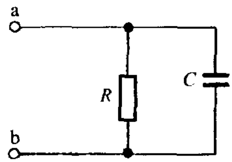

图 1.6

[解] $e(t)=E_m(\sin\omega t+h\sin 3\omega t)$

设基波对应的电路导纳为 Y_1：

$$Y_1=\frac{1}{R}+j\omega C,\quad |Y_1|=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\omega^2C^2}$$

设三次谐波对应的电路导纳为 Y_3：

$$Y_3=\frac{1}{R}+j3\omega C,\quad |Y_3|=\sqrt{\frac{1}{R^2}+9\omega^2C^2}$$

基波电流的最大值 I_{m1} 为：

$$I_{m1}=|Y_1|E_m=E_m\sqrt{\frac{1}{R^2}+\omega^2C^2}$$

同理，三次谐波的最大值 I_{m3} 为：

$$I_{m3}=|Y_3|hE_m=hE_m\sqrt{\frac{1}{R^2}+9\omega^2C^2}$$

二者之比为

$$\frac{I_{m3}}{I_{m1}}=\frac{hE_m\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+9\omega^2C^2}}{E_m\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\omega^2C^2}}=h\sqrt{\frac{1+9\omega^2C^2R^2}{1+\omega^2C^2R^2}}$$

将 $h=0.1,\omega=1/RC$ 代入得到

$$\frac{I_{m3}}{I_{m1}}=\frac{1}{10}\times\sqrt{\frac{1+9}{1+1}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

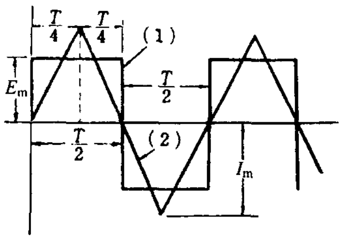

图 1.7

【1.6】 如图1.7中(1)所示的方波电动势产生如(2)所示的三角波电流。求出这种情况的电流、电压有效值、功率及功率因数。

[解] 将方波电动势 $y=e(t)$ 展开成傅里叶级数。因 $e(t)$ 是奇函数 $b_0=0,b_n=0$。并且

$$y=e(t)=E_m\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}\right)$$

其有效值为

$$有效值=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E_m{}^2\,dt}=E_m$$

因此

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}E_m\sin n\,\omega t\,dt=\frac{4E_m}{T}\cdot\frac{1}{n\,\omega}\Big[-\cos n\,\omega t\Big]_0^{T/2}$$

$$=\frac{4E_m}{T}\cdot\frac{1}{n\cdot 2\pi\cdot\dfrac{1}{T}}\Big[-\cos n\,\omega t\Big]_0^{T/2}=\frac{2E_m}{n\pi}\times 2=\frac{4E_m}{n\pi}$$

因偶数项为零，n 为奇数，所以

$$e(t)=\frac{4E_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

将三角波展开为傅里叶级数。因 $y=i(t)=-i(-t)$，则 $b_0=0,b_n=0$。又

因为 $i(t+T/2)=-i(t)$，所以 a_n 的偶数项为零，只有奇数项。

$$a_{2n+1}=\frac{8}{T}\int_0^{T/4} i(t)\sin(2n+1)\omega t\,\mathrm{d}t$$

考虑到

$$0\leqslant t\leqslant\frac{T}{4}\text{ 时，}\quad y=i(t)=\frac{4}{T}I_{\mathrm{m}}t$$

$$\text{有效值}=\sqrt{\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\frac{16}{T^2}I_m{}^2t^2\,\mathrm{d}t}=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{3}}$$

因此

$$\begin{aligned}a_{2n+1}&=\frac{32}{T^2}I_{\mathrm{m}}\int_0^{T/4}t\sin(2n+1)\omega t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{32}{T^2}I_{\mathrm{m}}\left[\frac{1}{(2n+1)^2\omega^2}\sin(2n+1)\omega t-\frac{1}{(2n+1)\omega}t\cos(2n+1)\omega t\right]_0^{T/4}\\&=\frac{32}{T^2}I_{\mathrm{m}}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2}(-1)^n\\&=\frac{8I_{\mathrm{m}}}{\pi^2(2n+1)^2}(-1)^n\quad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}$$

所以

$$i(t)=\frac{8I_{\mathrm{m}}}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin5\omega t-\frac{1}{7^2}\sin7\omega t+\cdots\right)$$

非正弦周期电流电路的有功功率是相同角速度（角频率）的电动势和电流所产生的有功功率之和，所以要用 $e(t)$ 和 $i(t)$ 相对应的项来计算有功功率 P_a。首先用二者的第 1 项来计算。设 $e(t)$ 的第 1 项为 e_1，$i(t)$ 的第 1 项为 i_1，e_1i_1 产生的瞬时功率为 P_1，平均功率为 P_{a1}，则有

$$P_{a1}=\frac{1}{T}\int_0^T P_1\,\mathrm{d}t$$

$$P_1=e_1i_1$$

$$e_1=\frac{4E_{\mathrm{m}}}{\pi}\sin\omega t,\quad i_1=\frac{8I_{\mathrm{m}}}{\pi^2}\sin\omega t$$

因此

$$P_1=\frac{32E_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}}{\pi^3}\sin^2\omega t$$

所以

$$P_{a1}=\frac{1}{T}\cdot\frac{32E_mI_m}{\pi^3}\int_0^T\sin^2\omega t\,dt *$$

令上式中 $\theta=\omega t$，则 $d\theta=\omega dt$，所以

$$\begin{aligned}* &= \frac{32E_mI_m}{\pi^3T}\int_0^{\omega T}\sin^2\theta\frac{d\theta}{\omega}=\frac{32E_mI_m}{\pi^3T}\int_0^{\omega T}\frac{1-\cos2\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{\omega}\\ &= \frac{32E_mI_m}{2\omega\pi^3T}\int_0^{\omega T}(1-\cos2\theta)d\theta\\ &= \frac{16E_mI_m}{\omega\pi^3T}\left\{\Big[\theta\Big]_0^{\omega T}-\left[\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\omega T}\right\}\\ &= \frac{16E_mI_m}{\omega\pi^3T}\cdot\omega T=\frac{16E_mI_m}{\pi^3}\end{aligned}$$

同理可以得到 $P_{a3}, P_{a5}\cdots$，将它们求和，结果是

$$\text{有功功率}=\frac{16E_mI_m}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots\right)$$

功率因数是有功功率和视在功率之比，前面已经求出三角波电流的有效值为 $I_m/\sqrt{3}$，因此

$$\text{功率因数}=\frac{\text{有功功率}}{E_m\cdot\dfrac{I_m}{\sqrt{3}}}=\frac{16\sqrt{3}}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots\right)$$

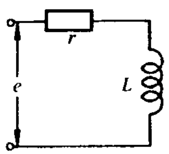

图 1.8

【1.7】 如图1.8所示，由电阻 r 和电感 L 构成的电路中加上电压

$$e=200\sin(\omega t+10°)+50\sin(3\omega t+30°)+30\sin(5\omega t+50°)(\mathrm{V})$$

求出该电路消耗的功率和功率因数。其中 $r=4\Omega$，$\omega L=3\Omega$。

[解] $e=200\sin(\omega t+10°)+50\sin(3\omega t+30°)+30\sin(5\omega t+50°)$

所以设

$$i=I_1\sin(\omega t+10°-\varphi_1)+I_3\sin(3\omega t+30°-\varphi_3)+I_5\sin(5\omega t+50°-\varphi_5)$$