ZHEN LIAO

掌握一种学习方法 比做100道题更重要！

高中数学问题误解诊疗大全

高三

主编 谢文泉

山西教育出版社

ZHEN LIAO

高三年级

数学问题误解诊疗大全

丛书主编 谢文泉
本册主编 薛红霞
本册副主编 郭 贞 柴有茂 侯东栓
本册编委 谢文泉 谢远应 薛红霞
郭 贞 柴有茂 侯东栓
侯心心 张河山 燕 洁
王红梅 谷 虹 张怀香

山西教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

高中数学问题误解诊疗大全．高三/谢文泉主编．太原：山西教育出版社，2004．7

ISBN 7-5440-2645-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．谢…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 031463 号

山西教育出版社出版发行

（太原市迎泽园小区 2 号楼）

晋城市印刷厂印装　新华书店经销

2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月山西第 1 次印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　印张：8.5

字数：304 千字　印数：1—5000 册

定价：11.00 元

《高三年级数学问题误解诊疗大全》编委会

出 版 前 言

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“课后练习”、“单元测试”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是提不高，考试成绩不理想，这是为什么？

究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好功课的根本保证；掌握方法，是攻克难题的有力武器。只有弄清基本原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种考试，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《中国学生解题方法大全》就是期望为同学们提供最为全面、最为系统、最为实用、最为完备的各类解题方法。它新课标为依据，突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能。书中既有例题分析，针对训练；又有方法点拨，思维开拓。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点评恰到好处。可以说，本书是同学们“学好功课的方法宝库，攻克难题的新式武器”。

愿本书成为你学习的一个支点，撑起你知识的一片蓝天！

前　言

人类的数学学习，是在不断地提出问题和解决问题中完成的. 对困难而陌生的问题解决，出现思维受阻或误解疏漏屡见不鲜. 但这种对数学问题的误解，无论从学习的角度还是从教育的角度观察，对任何人而言，它都不是盖棺定论的绝对错误或毫无价值的废料，而是一种蕴含着无限生机的认知必然过程. 因此，研究并诊疗误解的症结，学习他人的行之有效的解题构思经验，并以谬为师防止疏漏，探索完善学习认知的规律，在教育心理学和学习领域里，都是一个既有理论意义又有实践价值的重要课题，同时也是一个极具挑战性的困难问题.

本书根据教育部最新审订的《全日制普通高中数学教学大纲》精神，参照人民教育出版社最近几年出版的高中数学必修和选修课本的顺序，按高中一年级（其中含高二一章）、高中二年级、高中三年级分三册同步编写. 考虑到数学教材内容随数学教育价值取向调整而增删变革的现实，也考虑到数学教学内容未来发展的可能趋势，本书以国内高中数学课本里的习题、复习题及历年数学高考中的重点题型为主干，并在国内外新近出版的众多资料里，精选了一批对学习数学有益的典型题目，逐题剖析编写. 每个问题的撰文，均由

【题目】、【误解】、【受阻分析】、【合理构思】、【正确解答】、【变式练习】等六个栏目组成. 从题目拟定，误解诊疗，到正确解答程序的构思，都注意了指导性、典型性、实用性、普遍性和发展前瞻性原则的贯彻，并对若干影响深远的问题，给出了点评和拓展.

为了使本书真正成为广大读者的良师益友，我们力求做到适合中学师生的不同层次需要，激活读者的内在潜能，教会学生识别认知障碍，辨析误解根源，把错误扼止在求解构思的过程之中. 为了使学生的创新能力得到良好训练，并在解题构思中培养优化解题程序的能力，我们还努力介绍和渗透相似联想、相似类比、相似扩展和相似优化等现代认知手段，使读者在已有的认知结构中，提取有益于解题构思的信息、理论和思想方法，整合已知未知的差异，重组知识结构，形成用题设解决问题的知识迁移序列，构建解决问题的最佳策略. 因此，本书无论是在误解诊疗，还是在解题构思及正确解答等方面都相得益彰同样精彩. 既能启迪思维，又能提高读者的认知水平.

由于当前国内外的数学教育界对解决问题失误的认知机理研究正处在不够成熟的萌芽发展阶段，我们在本书中对误解症结的剖析，也只是对解题构思规律在正、反两面的返真探索行为，加之时间和水平的局限性，不妥之处在所难免，故盼读者批评赐教.

编者

2004. 4.

目 录
CONTENTS

第一章 概率与统计

一、随机变量

1.1 离散型随机变量的分布列

题❶ 掷均匀硬币一次,随机变量为 ( )

A.出现正面的次数 B.出现正面或反面的次数

C.掷硬币的次数 D.出现正、反面次数之和

误 解 选 B、C 或 D.

受阻分析 对随机变量这一概念的内涵认知不到位.随机变量表示随机试验的结果.在一次随机试验中,随机变量有多种形式,但选项 B 中到底用哪个量来描述随机试验的结果,含义模糊;选项 C、D 都是确定的,不能作为随机变量.

合理构思 正确理解随机变量的含义.如果试验结果本身与数有关,则它们即为随机变量的取值,如本例中的选项 A.若试验结果是一个客观现象,如本题中"掷硬币出现正面"、"掷硬币出现反面",可建立该现象与数的一一映射,从而可选择随机变量 $\xi=1,0$ 分别表述上述两个试验结果.因此一次试验可用多个随机变量从不同角度表示.

正确解答 选 A.

题❷ 设某批零件正品率为$\frac{3}{4}$,次品率为$\frac{1}{4}$,现对该批零件进行抽查,设第 ξ 次首次抽到正品,则 $P(\xi=3)$等于 ( )

A.$C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$ B.$C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$

C.$\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$ D.$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$

误 解 选 A.

受阻分析 对随机变量 $\xi=3$ 的含义认知不到位,或者是忽略了题中条件"首次抽到",导致误认为 $\xi=3$ 表示抽到的 3 件产品中有一件正品、两件次品即可,而与第几次抽到正品无关,从而错用二项分布的概率公式求解.

合理构思 仔细审题，正确理解 $\xi=3$ 的含义：在三次抽查中，前两次抽到次品，且第三次抽到正品．根据分步计数原理可得

$$P(\xi=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}.$$

正确解答 选 C.

题 3 甲、乙两名射手轮流射击直至某人射中为止．计每次射击甲射中的概率为 0.4，乙射中的概率为 0.6，而且不受其他次射击结果的影响．设射击停止时，甲射击的次数为 k，则 $P(\xi=k)$ 等于 (　　)

A. $0.6^{k-1}\cdot 0.4$　　B. $0.24^{k-1}\cdot 0.76$

C. $0.24^{k-1}\cdot 0.6$　　D. $0.76^{k-1}\cdot 0.24$

误　解 选 A、C.

受阻分析 审题不清，导致对 $\xi=k$ 的认知不到位．选 A 者认为，$\xi=k$ 表示甲在前 $(k-1)$ 次未射中，而在第 k 次射中．选 C 者认为，$\xi=k$ 表示甲、乙在前 $(k-1)$ 轮射击中都未射中，而在第 k 轮射击时，甲击中目标．

合理构思 理解随机变量 ξ 的含义是解题的基础．$\xi=k$ 表示前 $(k-1)$ 轮射击时，甲、乙均未击中，在第 k 轮射击时，甲、乙中至少有一人击中．

正确解答 设事件 A_k、B_k $(k\in\mathbf{N})$ 分别表示在第 k 轮射击中甲击中、乙击中．则

$$\begin{aligned}P(\xi=k)&=P[\overline{A}_1\cdot\overline{B}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{B}_2\cdot\cdots\cdot\overline{A}_{k-1}\cdot\overline{B}_{k-1}\cdot(A_k+B_k)]\\&=P(\overline{A}_1\cdot\overline{B}_1)P(\overline{A}_2\cdot\overline{B}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1}\cdot\overline{B}_{k-1})\cdot P(A_k+B_k)\\&=0.24^{k-1}\cdot[1-P(\overline{A}_k\cdot\overline{B}_k)]\\&=0.24^{k-1}\cdot 0.76.\end{aligned}$$

∴　选 B.

题 4 掷两枚骰子，随机变量 ξ 表示掷出的点数之和，求随机变量 ξ 的分布列．

误　解 随机变量 ξ 的分布列为

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

受阻分析 对随机试验的结果与随机变量 ξ 的取值的对应关系认知不到位，误认为随机变量的 11 个取值是等可能性事件．

合理构思 掷两枚骰子这一试验的基本事件有 36 个，如下表所示．

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

这36个基本事件是等可能性事件，对于随机变量ξ的取值，如4，它对应3个基本事件(3,1)，(2,2)，(1,3)，因此$P(\xi=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.其余同理可解.

正确解答 随机变量ξ的分布列是

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

题5 某射手每一次能命中目标的概率为0.15，现该射手连续向某目标进行射击，如果命中目标，则射击停止，否则继续射击，直到命中目标，但射击次数最多不超过10次，求该射手射击次数ξ的分布列.

误　解 据题意可得：

$$P(\xi=k)=(1-0.15)^{k-1}\times0.15=0.85^{k-1}\times0.15,k=1,2,3,\cdots,10.$$

由此可得分布列：

ξ	1	2	3	4	5
P	0.15	0.85×0.15	$0.85^2\times0.15$	$0.85^3\times0.15$	$0.85^4\times0.15$
ξ	6	7	8	9	10
P	$0.85^5\times0.15$	$0.85^6\times0.15$	$0.85^7\times0.15$	$0.85^8\times0.15$	$0.85^9\times0.15$

受阻分析 对随机变量的分布列的性质认识不到位，只注意到了性质：$0\leqslant P_i\leqslant1,i=1,2,\cdots$，却忽略了性质：$P_1+P_2+\cdots=1$，因此不善于用后一个性质检验分布列是否正确.此外，对随机变量$\xi=10$的含义认识不清，误认为$\xi=10$表示前9次未击中，而第10次击中.

合理构思 理解分布列的性质,并能运用它解决问题.理解 $\xi=10$ 的含义,它表示前9次未击中,而第10次击中,或者10次都未击中,在此基础上解题.

正确解答 据题意可得:

$$P(\xi=k)=(1-0.15)^{k-1}\times0.15=0.85^{k-1}\times0.15,k=1,2,3,\cdots,9.$$

$$\begin{aligned}P(\xi=10)&=(1-0.15)^9\times0.15+(1-0.15)^{10}\\&=(1-0.15)^9\\&=0.85^9.\end{aligned}$$

所以,射击次数 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5
P	0.15	0.85×0.15	$0.85^2\times0.15$	$0.85^3\times0.15$	$0.85^4\times0.15$
ξ	6	7	8	9	10
P	$0.85^5\times0.15$	$0.85^6\times0.15$	$0.85^7\times0.15$	$0.85^8\times0.15$	$0.85^9\times1$

题 6 已知随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

分别求出随机变量 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi,\eta_2=\xi^2$ 的分布列.

误　　解 η_1、η_2 的分布列分别如下:

η_1	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$

η_2	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{25}$

受阻分析 其一,不善于运用分布列的性质 $P_1+P_2+\cdots=1$ 检验分布列

的正误;其二,对随机变量 η_1、η_2 的含义认知不到位,误认为 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi$ 是指概率的取值变为原来的 $\frac{1}{2}$.

合理构思 理解随机变量 η_1、η_2 的含义是解题的基础. $\eta_2=\xi^2$ 给出了 η_2 取值的确定方法,如 $\xi=-2$ 或 2 时,$\eta_2=4$,且 $P(\eta_2=4)=P(\xi=-2)+P(\xi=2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$.其余同理可解.

正确解答 由于 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi$,对于不同的 ξ 取值 $-2,-1,0,1,2$,可得到 η_1 的不同取值,即 $\eta_1=-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$,相应的概率不变.所以,$\eta_1=\frac{1}{2}\xi$ 的分布列为:

η_1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

同理可知 η_2 的取值为 0,1,4,且有:

$$P(\eta_2=0)=P(\xi=0)=\frac{2}{5};$$

$$P(\eta_2=1)=P(\xi=-1)+P(\xi=1)=\frac{3}{10};$$

$$P(\eta_2=4)=P(\xi=-2)+P(\xi=2)=\frac{3}{10}.$$

所以,η_2 的分布列为:

η_2	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

变式练习

1.掷两枚骰子一次,若第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数之差为 ξ,则“$\xi>4$”表示的试验结果是 ( )

A.第一枚 6 点,第二枚 2 点　　B.第一枚 6 点,第二枚 1 点

C.第一枚 1 点,第二枚 6 点　　D.以上均不正确

2.投掷一枚均匀骰子一次,随机变量为 ( )

A.投掷骰子的次数　　B.出现点数之和

C.出现点数 1~6 的次数　　　　　D.出现点数 2 的次数

3.将 3 个小球随机地放入 4 个盒子中去,盒子中球的最多个数记为 ξ.求 ξ 的分布列.

4.设随机变量 ξ 的概率分布为:

ξ	-2	$-\frac{1}{2}$	0	2	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

分别求出随机变量 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi,\eta_2=\xi^2$ 的分布列.

5.设离散型随机变量 ξ 的分布列为:

$P(\xi=k)=\frac{a}{3N},(k=1,2,\cdots,N)$,则 $a=$______.

6.掷一颗正方体骰子,用随机变量 ξ 表示出现的点数.求:

(1)ξ 的取值范围;

(2)ξ 的分布列;

(3)$P(\xi>4)$及 $P(2\leqslant\xi<5)$.

7.已知离散型随机变量 ξ 的分布列如下:

ξ	1	2	3	$\cdots$	n
P	k	$3k$	$5k$	$\cdots$	$(2n-1)k$

求常数 k.

8.一批产品,分为一、二、三级,其中一级品是二级品的两倍,三级品是二级品的一半,从这批产品中随机抽取一个检验质量,其级别为随机变量 ξ,求 ξ 的分布列及 $P(\xi>1)$.

9.现有一批数量很大的零件,其次品率为 1%,任取 200 个零件,求其中至少有 5 个次品的概率.

10.某射手每次射中目标的概率为 0.4.现有 5 发子弹,预备对一目标连续射击(每次打一发),一旦射中或子弹打光,就立即停止.求射手击中目标所需次数 ξ 的分布列.

答案或提示

1.选 D.因为 $\xi>4$ 表示选项 B、C 所描述的两种情况.

2.选 D.将“出现点数 2 的次数”记为 ξ,则 ξ 的取值为 0,1.

3.随机变量 ξ 的取值分别为 1,2,3.

$P(\xi=1)=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{3}{8}$, $P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_4^1C_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}$, $P(\xi=3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$.

于是 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

4. 当 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi$ 时,对于不同的 ξ 的值:$-2,-\frac{1}{2},0,2,4$. 可得相应的 η_1,即 $\eta_1=-1,-\frac{1}{4},0,1,2$;可以看出,虽然分布列中随机变量的取值已发生了变化,但其相应的概率并不发生变化. 当 $\eta_2=\xi^2$ 时,对于 ξ 的不同取值:$-2,-\frac{1}{2},0,2,4$;η_2 的对应值是 $4,\frac{1}{4},0,16$,其中 ξ 的不同取值 -2 与 2 对应于 $\eta_2=4$,所以 $P(\eta_2=4)=P(\xi=-2)+P(\xi=2)$. 于是 η_1、η_2 的分布列分别为:

η_1	-1	$-\frac{1}{4}$	0	1	2
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

η_2	0	$\frac{1}{4}$	4	16
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$

5. 由 $\frac{a}{3N}\cdot N=1$,得 $a=3$.

6. (1) ξ 的取值范围是 $\{1,2,3,4,5,6\}$.

(2) ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(3) $P(\xi>4)=P(\xi=5)+P(\xi=6)=\frac{1}{3}$;

$P(2\leqslant\xi<5)=P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)=\frac{1}{2}$.

7. 由 $k+3k+5k+\cdots+(2n-1)k=1$，得 $k=\frac{1}{n^2}$.

8. ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$P(\xi>1)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{3}{7}.$$

9. 次品数 $\xi\sim B(200,0.01)$，$P(\xi=k)=C_{200}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{200-k}$.

设事件 A 为：抽取 200 个零件中，至少有 5 个次品，则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\xi\geqslant5)=1-P(\xi<5)\\&=1-\sum_{k=0}^{4}C_{200}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{200-k}\\&\approx0.051746.\end{aligned}$$

10.

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.6×0.4	$0.6^2\times0.4$	$0.6^3\times0.4$	0.6^4

1.2 连续型随机变量的概率密度

题❶ 指出下列随机变量是离散型随机变量，还是连续型随机变量：

(1)某人的身高 ξ；

(2)某厂加工的某种钢管的外径与规定的外径尺寸之差 η.

误　解 (1)身高 ξ 为离散型随机变量；

(2)随机变量 η 为离散型随机变量.

受阻分析 对连续型随机变量的含义认知不到位，并受生活中现象的影响，认为一个人的身高是一个确定的数，多个人的身高可以一一列出，因此是离散型随机变量，导致错误. 对于(2)题也出现同样错误的认识.

合理构思 正确认识客观现象，并理解连续型随机变量的含义：随机变量可以取某一区间内的一切值. 从数学抽象的角度分析，人的身高可以取某一区间的一切值. 同理钢管外径与规定外径尺寸之差 η 可取区间 $(-\infty,+\infty)$ 的一切值.

正确解答 随机变量 ξ、η 都是连续型随机变量.