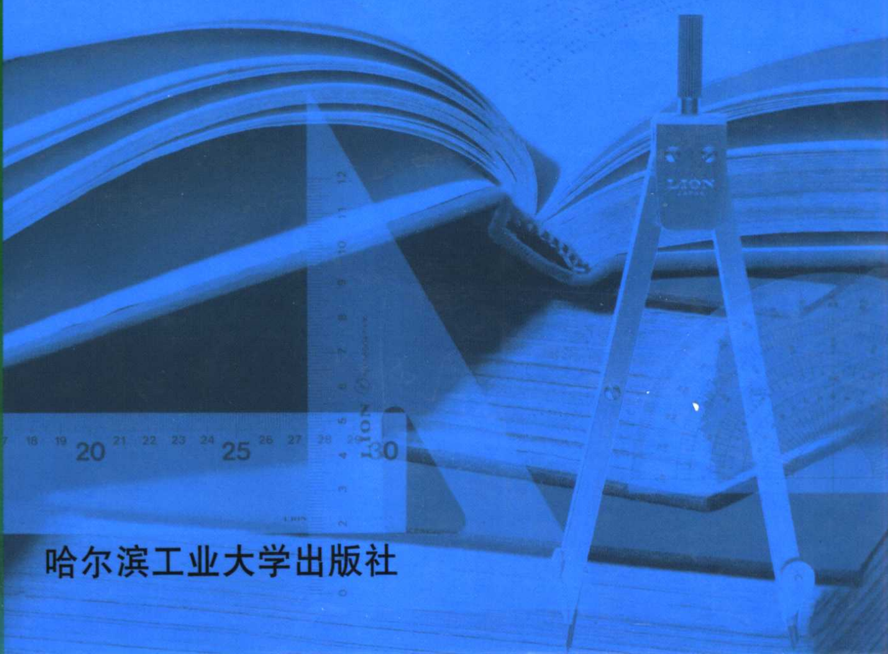
高等师范院校数学系列教材

中学数学方法论

主　编　鲍曼
副主编　李杰　张鸿艳



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书围绕数学方法论的三大主要框架:重大数学方法、常用数学方法和数学发现方法进行了详细的论述。

中学数学方法论是数学教育专业硕士研究生的专业必修课和数学系高年级本科生的选修课。本书作为高等师范院校的教材,旨在指导学生领悟数学精神、思想和方法,建立正确的数学观念,提高数学素质,增强驾驭中学数学的能力。

图书在版编目(CIP)数据

中学数学方法论/鲍曼主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2002.6

高等师范院校数学系列教材

ISBN 7-5603-1752-9

Ⅰ.中… Ⅱ.鲍… Ⅲ.数学方法-方法论-中学 Ⅳ.G633.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 029686 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 850×1168　1/32　印张 6.875　字数 178 千字
版　　次 2002 年 6 月第 1 版　2004 年 1 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1752-9/O·133
印　　数 3 001～6 000
定　　价 14.80 元

序

随着科学技术的发展，数学的应用范围日益广泛，不但在自然科学的各个分支中应用，而且在社会科学的很多分支中也有应用。毋庸置疑，数学自身的发展水平深刻地影响着人们的思维方式。

众所周知，数学创新、数学应用、数学传播是数学教学工作者的三大基本任务。为了适应现代教育发展的需要，我国高等师范院校的数学教育专业改为数学与应用数学专业(师范类)，由此导致课程设置必将发生根本的变化。如何开设应用数学课，如何应用计算机进行数学教学，如何改革数学教育的传统课程，都是有待进一步探讨的问题；相应的数学教材，更有待改革和完善。为此，黑龙江省高等师范院校数学教育研究会，组织哈尔滨师范大学、齐齐哈尔大学理学院、牡丹江师范学院、佳木斯大学理学院四所本科师范院校的数学教育工作者，在多年教学实践基础上，集中对应用数学、计算机数学及数学教育等课程进行研讨，编写了“高等师范院校数学系列教材”，以适应高等师范教育发展的需要。

这套教材主要包括:形成体系的教材,如《数学建模(上、下册)》、《数学实验(上、下册)》、《离散数学》;具有师范特色的教材,如《中学数学教学论》、《中学数学方法论》、《中学数学解题方法》;融入教师教学体会和教学成果的专著性的教材,如《教学过程动力学》。这套教材,力求在保持师范特色的同时,突出应用数学和计算机数学的特点,以期成为高等师范院校本科数学教育专业一套实用的教材,这是我们的主要目的。

我们清楚地知道,我们追求的目标不易达到,不过,通过我们的努力,引起共鸣,经过同仁的一起努力,目标总会到得早些。

黑龙江省高等师范院校
数学教育研究会理事长

王玉文
2002 年 3 月

前　　言

目前,数学方法论的研究在中学数学教育界已开始升温,大有成为热点之势,实为幸事。究其原因,不外乎两点:其一是存在。可以毫不夸张地说,世界上各种科学的建立无不与数学有关,因此,数学自身的思想、方法,早就作为客观存在,蕴含在各种定理的发现和所有数字特征的处理办法之中了。前者,是人们只顾看重于数学所得结果的应用,而忽视了对自身发现和发展规律的研究。其二是需要。中学数学教师为应试教育所迫,不得不在题海中翻滚,当他们稍有一点喘息的机会时,自然会提及是否还有更好的做法。而这些做法的实施方向,最直接不过的就是从数学自身的发展过程中去寻找一些规律性的东西,看看它是否具有一般性,以指导解决问题。

与世界上所有事物的发展过程一样,都是由存在和需要共同决定的,数学方法论的研究之所以能开展起来,原因亦在于此。

恰在此时,国家教育部提出教育"从应试教育向素质教育"转轨,更加速了这个过程。

中学数学方法论是教育专业硕士(学科教学·数学)研究生的专业必修课和高年级本科学生的选修课。本课程主要研究数学思维活动的一般规律和方法,旨在指导学生领悟数学的精神、思想和方法,建立正确的数学观

念，提高数学素质，增强驾驭中学数学的能力。

应当指出，数学方法广义上讲泛泛得很。上可与哲学挂钩，下可延伸到解题的一种技巧，上下跳跃性很大，如何取舍便成了一个难题。我们的想法是实惠一些、中肯一些，力求从中学数学教师的实际需要出发，选择一些能体现理论联系实际、能体现师范特点，并具有一定学术性的内容，组编在一起成为一本能帮助学生更好学习的讲义性质的《中学数学方法论》，这就是编写本书的初衷。

在编写本书时，主要参考了张奠宙、过伯祥著的《数学方法论稿》、李明振主编的《数学方法与解题研究》、郑毓信著的《数学方法论》和徐利治著的《数学方法论选讲》等书，在此对作者和出版社一并表示感谢。

本书由哈尔滨师范大学鲍曼教授担任主编。参加本书编写的还有：佳木斯大学张鸿艳副教授，牡丹江师范学院李杰副教授，哈尔滨师范大学宋武副教授、秦进红副教授。

由于作者水平所限，加之时间仓促，本书一定存在许多不足之处，恳请各位同仁、同学不吝指教。

作　者

2002 年 3 月

目　　录

绪　论

数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法。数学方法论则是对古往今来的数学方法进行概括、分类、评价以及如何运用的论述。因为数学方法涉及的面广,有的学者[1]把对数学方法的研究分成四个层次,即:

(1) 基本的和重大的数学思想方法。诸如模化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑法、计算方法等等。它们的共同特征是,每决定了一个大的数学学科方向,该数学本身就是由它们构造而成的。

(2) 与一般科学方法相应的数学方法。诸如类比联想、分析综合、归纳演绎等等。这些方法与第一种情况相比,范围缩小了些,虽然表面上有数学的特点,但仍与一般科学方法之间有共性。

(3) 数学中特有的方法。如数学等价、数学化、公理化、关系映射反演、数形转换等等。它们都是在数学的研究中产生和发展的,有些后来被移植到其他科学中去。

(4) 中学数学中的解题技巧。虽然它的内容处在初等数学范围内,由于与中学教师的需要非常接近,因而非常适用。不过各种解题技巧十分丰富,变化无穷,要概括得清晰全面,十分不易。

这种分类思想是正确的,问题是过于浩瀚,那将会是集数学发展史、哲学与各种重大数学发现于一身的汪洋大海了,这不是一本书所能达成的。

于是又一次面临着选择。事实上,当存在已经具备了的情况下,选择便决定了结果。

我们的看法是,教育硕士的学位教育,应当包括他对数学整体

构成的思想方法有所了解，虽然不能十分展开；应当包括稍加帮助就可以掌握与他的知识范围比较接近的思想方法；当然重点仍在帮助中学数学教师尽可能地理出些条条，以便使他们尽可能地从题海中爬出来。这只是一个愿望，在这方面究竟能做到什么程度，还没有把握，只能做起来再说了。应当说，这个问题至少到现在仍然是一个仁者见仁、智者见智的问题。

无论如何划分，作为培养数学教育工作者，有两个原则是离不开的，一是必须具备必要的数学知识；二是必须具备必要的数学方法。在教育思想从应试教育向素质教育转轨的今天，具备后者，尤其重要了。有些国家在我们之前已经看到这点，并且已经向着这个方向走出去了。我们又落到了后面，还有什么犹豫的呢？

美国是从20世纪80年代开始转轨的。当时的口号是"问题解决"。能以问题解决作为数学教育的中心提法，可见其迫切性。作为配合措施，美国在中学、大学学生中广泛持续地开展"数学模型"竞赛活动，以推广数学的应用程度。每年都颁奖鼓励，效果显著。

与之相应的G.Polya在《怎样解题》（有中译本）一书中，明确地提出启发法模式，这也是一种试图对陷于"题海"中的师生伸出援救之手的一种努力。当然，任何一种方法，无论它多么深邃有力，都不会有无限的"法力"，可以无往而不胜。它能且只能是一种思考方法，最多也不过是比较具有一般性的思想方法，仅此而已。

所以，学习数学思想方法在一定意义上说，比学习具体的数学知识难度更大一些。因为思想方法是隐藏在知识的深层次内的无形的精华。而它的任何一次"显形"，都是按这种思想方法对一种问题提出的解决办法。这些具体办法就成为知识。我们现在的任务是透过这些知识反过来去寻找当初得到这些知识时的想法。由此可见其难之巨了。有的学者甚至认为："无论对于科学工作者、技术人员，还是数学工作者，最重要的就是数学的精神、思想和方法，而数学知识是第二位的。"这里不去与他争论这种说法是否失

之偏颇,但有一点无须争论,那就是数学的思想方法,其重要程度几乎与数学知识等同。

就数学方法论的意义而言,至少有三点可说:

其一,对数学工作者来说,数学方法论虽然不能告诉我们在各种具体场合应当采取什么样的方法,但它却可以促进对合理方法的自觉的应用。

其二,对数学的教学工作而言,数学方法论事实上是对我们的数学教师提出了更高的要求,即我们不仅应当注意具体的数学知识的传播,而且也应注意数学方法论方面的训练和培养。应当看到,这两者之间原本就存在着相辅相成的辩证关系。有一个不成文的标准,即数学课上好的标准应该是讲活、讲懂、讲深。讲活是指让学生看到活生生的数学研究工作,而不是死的数学知识;讲懂是让学生真正理解有关的数学内容;讲深是指不仅能掌握具体的数学知识,而且也能领会内在的思想方法。

其三,自觉地以数学方法论来指导数学学习,可以收到更好的效果。

泛指而言,数学方法论会使未来的数学工作者具有更多的创新机遇,这是可以肯定的。

第一章 重大的数学方法

- 形式化语言
- 几何方法
- 概率方法
- 拓扑方法
- 控制论方法
- 数学逻辑方法
- 微积分方法
- 模糊数学方法
- 计算方法
- 数学模型方法

数学是人们从数量方面认识世界和改造世界的工具，为此，广义地说，数学本身就是一种方法。从文字的发展历史上，可以看到在一些重要的变革时期，总会有一些优秀的数学家创造出一些重大的、新的数学方法，进而开辟了一个新的学科，或者成为日后该学科的奠基工作。由此可见数学方法的重要性。

本章将介绍重大数学思想方法及其开创的学科概貌。

1.1 形式化语言

数学方法的重要表现之一，在于它能为诸多科学研究提供一种简明精确的形式化语言。似乎可以这样说，一门学科使用数学的形式语言愈多，表明这门学科愈成熟。回溯数学发展的历史，对我们的启示是很大的。从早期的记数法，到四则运算创造“+”、“-”、“×”、“÷”、“=”的符号语言；从阿拉伯人的代数语言，到给出了方程式、二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 等等，可以用形式语言作为变量之间静态关系的定量描述。毫无疑问，这是人类认识问题能力的一种深化，一种进展。到牛顿(I. Newton)创

立微积分，又发明了一套微积分语言；麦克斯韦（Maxwell）用微分方程描述电磁场；最后又导致 $\varepsilon-\delta$ 语言的产生；更不用说今日的拓扑学，可以用一套同伦、同调的语言来表述；可见数学的发展是与相应的形式语言的创立并生并存的。

数学的形式化特点，并不是它没有内容，仅仅是一堆毫无意义的符号堆砌。数学的内容在于它能反映事物数量上的变化规律。说到底，数学——作为一种形式，是否重要和有意义，仍是由它所反映的内容所决定的。反映得愈深刻愈准确，数学成果的价值就越大，其检验标准仍是由现实内容所决定的。现在全世界每年要发表几万篇数学论文，但能够流传下来的为数很少。这并不是说这些论文的“证明”不严格，它们的结论并不错，只是它的形式不能更好地表示内容，因而被冷落了，被扬弃了，或者被更好的数学形式所涵盖了，所替代了。

既然数学是一种数量形式，就有一个阻碍内容发展还是促进内容发展的问题。当代的科学技术提出了许多新的数学问题，如非线性问题、混沌与分形、低维拓扑、人工智能和计算机复杂性等等，如果我们不去适应发展着的内容，只做一些意义不大的雕琢，自然形式就会脱离内容，终招扬弃。

当我们认识到数学是一种形式的时候，就更应注意数学所反映的内容，以便积极地反映现实事物的数量发展。与此同时，也充实了数学自身的形式和内容。

1.2　数理逻辑方法

原因和结果，它反映出事物现象之间的相互联系和相互制约。当把事物从具体的联系中抽象出来，就会看到有序的、不断更替的运动。一种现象会引起另一种现象，前者为原因，后者为结果。这种因果观念是人们一切自觉活动中必不可少的逻辑条件。

原因和结果又是具有客观内容的。例如，由地心吸力的原因，

产生了“苹果落地”的结果。撇去这些具体内容,仅仅考察它的形式方面,就会看到人类的思维具有形式结构,遵循着某种推理形式的规律。例如,有 A 必有 B,那么没有 B 便一定没有 A。无论 A 和 B 是什么含义,以上的推理形式都是对的。研究思维形式结构及其规律的科学称为形式逻辑,形式逻辑的任务是研究因果关系的形式方面。

狭义的数理逻辑就是精确化、数学化的形式逻辑。它研究命题间的形式推理规律。

数学地表示一个命题,要用谓词和八个逻辑常项,即 $\forall$(任意)、$\exists$(存在)、$\wedge$(并且)、$\vee$(或)、$=$(等于)、$\neg$(非)$\rightarrow$(蕴涵)、$\leftrightarrow$(当且仅当)。我们还用 $\vdash$ 表示“推出”。谓词 $S(a)$、$P(b)$ 意即 a 是 S、b 是 P。你也可以赋以实际含意,如 $S(a)$ 表示 a 是质数,$P(b)$ 表示 b 是自然数等等。如有以下三个命题:

(1) $\forall x[S(x)\rightarrow P(x)]$。

(2) $\neg P(a)$。

(3) $\neg S(a)$。

那么,从(1)、(2)推出(3),不论 $S(a)$、$P(b)$ 的含义是什么。如果赋以上述特定含义,因(1)表明对任何 x,由 x 是质数,蕴涵 x 是自然数,现在 a 不是自然数。那么 a 必不是质数。

由这一简单例子,可以看到(1)、(2)是原因,(3)是结果,不管它们含义是什么,形式的推演总是对的。

数学是形式化了的思想材料,但它毕竟有它自己的内容。如二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一种符号形式,但它毕竟是方程,是一个有内容的对象。数学的内容是从现实内容经抽象而成的。数理逻辑则是纯粹的思维形式,它的内容是没有真实意义的。$S(a)$ 可表示 a 是自然数,也可以表示 a 不是自然数,留下的只是形式化的不表示真假现实意义的内容 $S(a)$。这是数理逻辑的特点,它把因果关系、命题的关联做到了最高程度的抽象。

数理逻辑的创始人是莱布尼茨(G. W. Leibniz),近代最重要的

代表人是罗素(B.A.W.Russell)。罗素认为数学即逻辑，数学无非是由条件(原因)推出结论(结果)。他提出由逻辑规则可以衍生出全部的数学，这就是逻辑主义的观点。但是，他最后失败了。首先是因为逻辑推演只能是有限步，跨越不了无限，连自然数全体都达不到，更不可能得出整个数学了；其次，如前所述，数学有它自身的概念、理论和现实价值，它不可能被没有现实意义的纯粹思维形式所取代。因此罗素的失败是在意料之中。

但是，数理逻辑方法毕竟是一门精深的学问。用它来描述的演绎推理，反映出的因果关系十分准确而精练，自有其特殊的价值。随着计算机的出现，更为数理逻辑方法提供了用武之地。计算机只需要做命题的形式推理，这些形式命题的真实含义则是由人去赋予的。把机械的形式演绎工作交给计算机，让计算机来承受人脑的一部分工作，使思维过程中的因果关系演算化、计算化，这便是数理逻辑方法的重大意义。

1.3 几何方法

时间、空间是运动着的物质的基本属性和存在形式。从数学上研究时间范畴和空间范畴的关系，便构成了各种几何学。

时间的特点是一维性，它只有过去、现在和将来一个方向，其流逝总是沿着单向前进，一去不复返。从数量上加以刻画，以表示时间的前后顺序，形成了实数的概念。用几何方法加以表述，便是具有原点、单位长度及正方向的一条直线。但直线上的几何学，即一维几何学是很贫乏的。

空间范畴能反映运动着物质的伸张性和广延性。任何物体都有长、宽、高三个方向，现实空间的几何形式是三维空间。三维性是现实空间的特点。

为了研究物体的运动过程和几何特性，我们将三维空间分解为二维空间和一维空间。一维空间的广延性和时间的无限性—

样，可用两端可无限延长的直线作为几何模型。为了确定运动着的物体的相对位置，我们用具有原点、单位长度和正方向的直线来表示，每点的位置用一个实数与之对应。

欧几里德(Euclid)几何反映的是绝对空间观念，它处理的是空间中点、线、面之间的相对位置以及机械运动下的几何不变性。

物理学、天文学研究时间范畴问题时，首先遇到的是如何测量时间的技术问题，数学研究为其提供了一维几何模型。牛顿力学研究空间中运动物体的运动规律时，数学研究又为其提供了三维几何模型，首先是欧几里德模型，其次是笛卡儿(R. Descartes)空间解析几何模型，再次是罗巴切夫斯基(Лобачевский)创立的非欧几何模型。不同的几何是从不同角度、用不同方法对现实空间进行了不同摹写。

20 世纪初，爱因斯坦(A. Einstein)构建了狭义相对论(1905)，指出了三维空间和一维时空之间存在着联系，诞生了四维时空的概念。这是物理学上的一场革命，也是时空观上的一场革命。1908 年，德国数学家闵可夫斯基(Minkowsky)为四维时空构建了数学框架，即闵可夫斯几何，即 $l^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$。这是人类为光速运动物体所在空间和时间之间建立的第一个几何模型。1915 年爱因斯坦发表了广义相对论，为黎曼(G. F. B. Riemann)几何学提供了现实基础。黎曼于 1854 年在哥庭根大学发表就任讲师的演说时做了题为《论作为几何学基础的假设》。他发展了空间观念，认识到几何学中所研究的对象是一种"多重广延量"，其中的点可用 n 个实数为坐标来描述，构成 n 维空间中的曲面(流形)；更进一步地认识到通常的欧几里德几何学只是在已知测量范围内的几何学，如果超出这个范围，到更细的层次，其空间是否还是欧氏的，还需要验证。他还指出一种几何学，即在无限小的意义下，距离仍满足勾股定理，这便是黎曼度量。爱因斯坦又在广义相对论中提出新的引力理论，在以洛伦兹(Lorentz)流形为模型在无限小的意义下，它仍是闵可夫斯基空间，即距离 s 满足 $ds^2 = dx^2 + dy^2 +$

$dz^2 - dt^2$,而一般地,则不再满足 $l^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ 的关系了。

从而,人们对空间范畴和时间范畴的认识又进入到了一个新的层次:

(1) 时间和空间两个范畴是有联系的。

(2) 空间不再是欧几里德式的三维空间,而是四维时空。

(3) 空间不再限于平直广延型,而是一种弯曲空间、弯曲时空和弯曲的曲面(流形)。

总之,随着人们对时间范畴和空间范畴认识的不断增多、概念的不断发展,用以表示其形式和数量关系的几何形式也在发生着变化。说到底几何方法能描写、表示、反映现实时空,并为各种时空观提供数学模型。

1.4 微积分方法

运动是一切事物、现象发生变化的根本属性,静止则是特殊的运动状态。从数学的角度观察运动过程,分析它的数量关系,就会得出变量和常量的概念,以及剧烈变化和相对稳定的数学处理方法。

函数是描写运动的有力工具。在牛顿力学中,用 $s = s(t)$ 描述距离和时间两个变量的依赖关系,这是最基本的表示方法,但进一步描述物体运动则需要研究因变量关于自变量的变化率,特别是距离关于时间的变化率——速度。这正是牛顿和莱布尼茨创立微积分的基本思想。

在创立微积分方法的过程中,有限和无限之间的转化起着关键作用。运动总的时间是有限的,但两个时刻 t 和 t_0 之间($t \neq t_0$)则有无限多个时刻,所以 $t \to t_0$ 是一个无限的过程。故此,依赖于时间(连续变量)的运动过程,必须实现从无限向有限的转化过程,采用极限方法实现无限运动过程的有限转化,即用一个常量——极限值来展现变量的变化,而这个极限状态正是运动物体在某一