大学数学学习丛书

概率论与数理统计

复习指导

赵华祥 王寄鲁 主编

山东大学出版社
Shandong University Press

大学数学学习丛书

概率论与数理统计复习指导

赵华祥　王寄鲁　主　编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计复习指导/赵华祥,王寄鲁主编.
济南:山东大学出版社,2004.8 (2005.1 重印)
(大学数学学习丛书)
ISBN 7-5607-2815-4

Ⅰ.概...
Ⅱ.①赵... ②王...
Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料
②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075246 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
安丘意中印务有限责任公司印刷
787×980 毫米 1/16 13.25 印张 252 千字
2004 年 8 月第 1 版 2005 年 1 月第 2 次印刷
印数:5001—6000 册
定价:20.00 元

序 言

市场经济的发展,科学技术的进步,计算机科学的影响等都使数学科学显得更加重要。“数学是打开一切自然科学大门的钥匙”。自从有了人类就有了数学,人类需要数数,这就是最初的数学。随着现代化程度的提高和数字化时代的到来,数学的应用也越来越广泛。数学知识是学习其他科学和技术所必须的,特别是高科技成果越来越多地依赖于现代数学方法的应用。数学高度的抽象性和严密的逻辑性对培养学生的综合分析能力及逻辑推理能力具有重要的作用。因此,高等院校,越来越多的非理工专业开设了数学课程,有些文科院系的学生主动要求选修数学课。特别是计算机科学的发展提出了许多新的数学问题,使数学的应用越来越显得重要。国家的繁荣富强在很大程度上依赖于高新技术的发展和高效率的经济管理,特别是高新技术它是保持国家繁荣富强的关键因素之一。高新技术的基础是应用科学,而应用科学的基础则是数学。当代高新技术的一个重要特点是定量化分析,而这就必须用到数学。美国科学院院士 J.G. Glimm 称“数学对经济竞争力至为重要,数学是一种关键的普遍适用的,并授予人能力的技术”。目前国内外越来越多的公司希望数学家参与他们的工作,工程技术中不断提出新的数学问题需要数学家来解决。数学给予人们的不仅是知识,而且是能力。这就需要我们数学教育工作者不仅要传授给学生一般的数学知识,而且要注重培养学生的数学素养,提高他们分析问题和解决问题的能力。

数学最吸引人的特色是它蕴含着大量有趣的思想:漂亮的图形和巧妙的论证。现实生活中处处潜藏着数学的难题。数学严格的逻辑性和复杂多变的方法使每个学习数学的人必须谨慎严肃地思考问题。一个看起来貌似简单的问题,往往要运用极其复杂的技巧才能解决。因此,大多数人感到数学非常难学,甚至望而生畏。但任何学科,任何事情都有其规律性,只要不畏困难,刻苦钻研,总能掌握其规律性,从而去掌握它,应用它。

由于数学的困难性和广泛的应用性,为了帮助大学学生学好数学,在方法上和思想上为学生学好数学提供有力的工具,我们山东大学威海分校数学系全体教师共同努力,编写了大学数学复习指导丛书:《微积分复习指导》,《线性代数复

习指导》和《概率论与数理统计复习指导》。编写这套书的目的是为理工科、经济类专业的学生和自学者提供一套指导学习理论和解题方法的参考书，为报考研究生的有关人员提供一套复习考试的指导书；同时也为有关的数学教师提供一套教学参考书。参加这套丛书编写的有董莹、王寄鲁、靳明忠、于淑兰、赵华祥、陈伟等人，他们都是具有多年教学经验的教授或副教授。在编写过程中参考了国内外有关的著作，查阅了大量的文献资料。系副主任靳明忠、副主任王寄鲁策划并组织了该套丛书的编写。陈绍著、刘桂真、郭新伟等教授主审了该套丛书。数学系的所有教师都对这套书的编写提出了一系列有益的建议并做了大量工作。在这里我们对山东大学威海分校的领导和有关部门的大力支持表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中的错误和不足之处在所难免，希望广大读者批评指正。

本丛书的出版之时，正值山东大学威海分校校庆20周年纪念日。数学系谨以此丛书作为向校庆的献礼，愿山东大学威海分校兴旺、发达！

刘桂真
2004年7月

目　录

第一章　随机事件及其概率

一、随机事件与样本空间

1. 随机事件

在随机试验中可能发生，也可能不发生的结果，简称事件. 一般用大写字母 A,B,C 等表示. 必然事件 Ω 和不可能事件 Φ 看作是特殊的随机事件.

2. 样本空间

在随机试验中所有的基本事件（也称作样本点）的集合. 基本事件是最简单的、不能再分割的事件.

二、事件的关系与运算

(1) 包含关系　若事件 A 发生时，事件 B 必然发生，则称事件 B 包含事件 A（也称作事件 A 包含于事件 B）. 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(2) 相等（又称等价）　即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$. 记作 $A=B$. 相等的事件是同一个事件.

(3) 事件的和（并）　事件 A 与事件 B 至少有一个发生. 记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

(4) 事件的积（交）　事件 A 与事件 B 都发生. 记作 $A\cap B$ 或 AB.

(5) 事件的差　事件 A 发生而事件 B 不发生. 记作 $A-B$.

(6) 互不相容（互斥）　事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\Phi$.

(7) 互逆事件（对立事件）　若事件 A 和 B 在一次试验中一定有且仅有一个发生，则称事件 A 和 B 互逆. 记作 $\overline{A}=B,\overline{B}=A$.

注意：$A-B=A\overline{B}$.

三、事件的运算规律

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$.

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$；$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 对偶律(摩根律)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注意：事件之间的关系本质上就是集合之间的关系，因而事件的运算与集合的运算有着相同的运算规律.

四、概率的定义和性质

1. (公理化)定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，若对于 Ω 中的每一个事件 A，都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足：

公理 1　非负性对于 Ω 中的任意一个事件 A，都有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2　规范性 $P(\Omega)=1$（Ω 是必然事件）.

公理 3　可列可加性对于 Ω 中的任意可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称实数 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

2. 概率的性质

(1) $P(\Phi)=0$.

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(3) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

特别地，若 $A\supset B$，则 $P(A\overline{B})=P(A)-P(B)$.

(4) 若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

(5)（广义加法公式）　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

一般地，对于 Ω 中的任意 n 个事件，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

五、古典概型及概率计算

1. 古典概型试验

古典概率试验是指满足下列条件的一类随机试验：

(1) 有限性　试验的所有基本事件只有有限个.

(2) 等可能性　每个基本事件发生的概率都相等.

2. 计算公式

在古典概型试验中,若样本空间中共包含 n 个样本点,而事件 A 包含了其中的 m 个,则有

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

六、重要公式

1. 条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0.$$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A|B),(P(B)>0).$$

或
$$P(AB)=P(A)P(B|A),(P(A)>0).$$

一般地,对于有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设样本空间 Ω 中的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:

(1) $A_iA_j=\Phi,(i\neq j)$,即两两互不相容;(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 中的一个完备事件组(也称样本空间 Ω 的一个分划).

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 中的一个完备事件组,则对于 Ω 中的任一事件 B,都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

注意:完备事件组就是在一次试验中一定有且仅有一个发生的 n 个事件.

4. 贝叶斯公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 中的一个完备事件组,则对于 Ω 中的任一事件 B,都有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

该公式又称作逆概率公式.

七、事件的独立性

(1) 若事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B 互相独

立,简称独立.

(2) 若事件 A 与 B,$\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对事件独立,则另外三对也独立.

(3) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对于其中任意的 k 个事件

$$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n,2\leqslant k\leqslant n),$$

都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互相独立.

若只是在 $k=2$ 时成立,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

应注意的几个问题:

(1) n 个事件两两独立要求 C_n^2 个等式成立;而互相独立则要求

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$$

个等式成立.

(2) 若 n 个事件互相独立,则其中的一部分事件一定也互相独立.

(3) 若 n 个事件两两独立,则其中的一部分事件一定也两两独立.

(4) 两两独立的 n 个事件不一定互相独立.

(5) 若 n 个事件互相独立,则将其中的一部分事件换成它们的对立事件后得到的 n 个事件一定也互相独立.

(6) 若 n 个事件互相独立,则由其中的一部分事件产生的事件与由另一部分事件产生的事件也互相独立.

例如,若事件 A,B,C,D,E 互相独立,则$\overline{A\cup B}$与$\overline{D}E$ 也互相独立.

(7) 若 $P(A)$与 $P(B)$至少有一个等于 0 或 1,则 A 与 B 一定独立.

(8) 互相独立和互不相容(互斥)没有必然联系.一般地,若 $0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$,则 A 与 B 不可能既互相独立又互不相容(互斥).

八、贝努里试验与二项概率公式

(1) 若随机试验 E 只有两个可能的结果,则称 E 为贝努里试验.

(2) 将贝努里试验重复进行 n 次,且各次实验结果互相独立,则称为 n 重贝努里试验.

(3) 在 n 重贝努里试验中,设每次试验只有 A 和 $\overline{A}$ 两个可能的结果,且 $P(A)=p$,$P(\overline{A})=1-p$,则事件 A 发生 k 次,而事件 $\overline{A}$ 发生$(n-k)$次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}.$$

这个公式称作二项概率公式.

九、超几何公式

设一批产品共 N 件,其中次品 M 件,正品 $N-M$ 件.从中任取 n 件,则事件"取出的 n 件产品中包含 m 件次品和$(n-m)$件正品"的概率为

$$P(A)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\quad(m=0,1,2,\cdots,l=\min(n,M)).$$

注意:(1)(超几何公式的推广)例如:一批产品共40件,分成四等,其中第一、二、三、四等品分别有7件,9件,10件,14件.从中任取17件,则事件"取出的17件产品中包含第一、二、三、四等品的件数分别是2件,4件,5件,6件"的概率为

$$P(A)=\frac{C_7^2C_9^4C_{10}^5C_{14}^6}{C_{40}^{17}}.$$

(2)不管是采用无放回方式还是一次抽取方式,只要所讨论的事件与抽取的次序无关,则都可以用超几何公式(或其推广的公式)来计算.

十、其他公式

(1)加法原理　设完成某一件事有 n 类方法(只要选择一种方法即可完成这件事情),若第 i 类方法有 m_i 种($i=1,2,\cdots,n$)),则完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

(2)乘法原理　设完成某一件事有 n 个步骤(只有每个步骤都完成,才能完成这件事情),若第 i 个步骤有 m_i 种($i=1,2,\cdots,n$)不同的方法去实现,则完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种方法.

注意:加法原理与乘法原理的区别.

(3)排列数　从 n 个不同的元素中选出 m 个,并按照一定的次序排成一列,则所有可能的排列的个数(记作 P_n^m)为

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

(4)组合数　从 n 个不同的元素中选出 m 个,并不考虑次序,则所有可能的选法的个数为(记作 C_n^m)为:

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合数的性质:

① $C_n^m=C_n^{n-m}$.

② $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

(5) 不全相异元素的全排列数　若 n 个元素中有 m 类不同的元素,其中第 i 类元素有 k_i 个($i=1,2,\cdots,m,k_1+k_2+\cdots+k_m=n$),则将这 n 个元素全部取出的排列数为:

$$N=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

例 1.1　设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$.

(1) 若 A 与 B 互不相容,求 $P(B)$.

(2) A 与 B 互相独立,求 $P(B)$.

解　(1) 因 A 与 B 互不相容,由概率的可加性知,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.故

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3.$$

(2) 由 $P(AB)=P(A)P(B)$以及 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,得

$$0.7=0.4+P(B)-0.4P(B).$$

所以

$$P(B)=0.5.$$

要注意区分互不相容和互相独立这两个概念.

当 A 与 B 互不相容时,$AB=\Phi, P(AB)=0, P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

而当 A 与 B 互相独立时,$P(AB)=P(A)P(B)$.

例 1.2　甲、乙、丙三人各射击一次,记 A,B,C 分别表示甲击中、乙击中、丙击中的事件,试通过 A,B,C 三个事件的运算把下述事件表示出来.

(1) 甲没击中:$\overline{A}$;

(2) 甲击中而乙未击中:$A\overline{B}$或$A-B$;

(3) 只有丙未击中:$AB\overline{C}$或$AB-C$;

(4) 三人中只有一人击中:$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5) 三人中至少有一人击中:$A\cup B\cup C$ 或$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$;

(6) 三人中至少有一人未击中:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或$\overline{ABC}$;

(7) 恰有两人击中:$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(8) 至少有两人击中:$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$ 或 $AB\cup AC\cup BC$;

(9) 三人均未击中:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$;

(10) 至多有一人击中:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(11) 至多有两人击中:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或$\overline{ABC}$.

注意:有些事件的表示形式不惟一,这恰恰体现了事件间的运算规律.

例 1.3(条件概率)　设口袋中装有 5 只小球,编号分别为 1～5.今从中有放

回地抽取两次，每次取一只，并观察取出的球的号码. 记事件 A = “两次取出的号码之和为 8”；B = “第一次取出的号码是偶数”. 试求：

$$P(A),P(B),P(A|B),P(B|A).$$

分析　用有序数组 (i,j) 表示试验的基本事件，其中 i 和 j 分别表示第一次、第二次取出的号码. 这种可能的有序数组共有 $5\times5=25$ 个，事件 A 包含其中的 3 个，即 $(3,5)$，$(5,3)$，$(4,4)$；事件 B 包含其中的 $2\times5=10$ 个；既包含在 A 中，又包含在 B 中的只有一个 $(4,4)$. 故

$$P(A)=\frac{3}{25};P(B)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5};P(AB)=\frac{1}{25}.$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{10},P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}.$$

注意：在求条件概率时，也可以只考虑作为条件的事件所包含的样本点.

例如，本例中事件 B 所包含的 10 个样本点中有 1 个同时也包含在事件 A 中，则可直接得到 $P(A|B)=\frac{1}{10}$；同理，$P(B|A)=\frac{1}{3}$.

例 1.4（乘法公式）　一口袋中有 a 个白球和 b 个黑球. 先随机地取出一个，在观察颜色后放回，并放进与取出的球同色的球 c 个. 这样连续取 3 次，求取出的前两个是黑球，最后一个是白球的概率.

解　记 A_i = “第 i 个是黑球” $(i=1,2,3)$，则由乘法公式得

$$P(A_1A_2\overline{A_3})=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}.$$

注意：一般地，当试验分几个阶段进行，所讨论的事件与次序有关，而且当前一阶段的结果已知时，随后的事件的条件概率好求时，可用乘法公式.

例 1.5（抽签问题）　设 50 张彩票中只有一张可中奖，又有 50 人排队依次抽取，取后不放回. 求第 k 个人 $(k=1,2,\cdots,50)$ 中奖的概率.

解　记 A_k = “第 k 个中奖” $(k=1,2,\cdots,50)$. 因只有一张可中奖，故 A_k 即表示“第 k 个才中奖”，即 $A_k=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k$. 由乘法公式得

$$\begin{aligned}P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)&=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})\cdots P(A_k|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}})\\&=\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdots\frac{50-(k-1)}{51-(k-1)}\cdot\frac{1}{50-(k-1)}=\frac{1}{50}.\end{aligned}$$

注意：抽签问题的结论是非常重要的. 这说明，只要是无放回地取，则每个人取到的概率与次序无关. 不仅如此，若 n 张彩票中有 m 张可以中奖，则每个人取到的概率也都是 $\frac{m}{n}$，与次序无关，请记住并学会运用这个结论.

例 1.6（全概率公式与贝叶斯公式）　茶杯成箱出售，每箱 20 只. 设每箱中含有 0 只，1 只，2 只次品的概率依次为 0.8，0.1，0.1. 一位顾客要购买茶杯，售

货员随意取出一箱,顾客打开并随意抽查 4 只,若未发现次品则买下这一箱茶杯,否则退回.

(1) 求顾客买下这一箱茶杯的概率.

(2) 若顾客买了这一箱茶杯,求确实没有残次品的概率.

解　记 B_i =“该箱中含有 i 只次品”($i=0,1,2$);A =“顾客买下这一箱”.则有

$P(B_0)=0.8;P(B_1)=P(B_2)=0.1;P(A|B_0)=1;$

$P(A|B_1)=\dfrac{C_{19}^4C_1^0}{C_{20}^4};P(A|B_2)=\dfrac{C_{18}^4C_2^0}{C_{20}^4}.$

(1) 由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.94.$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{0.94}=0.85.$$

注意:首先搞清楚什么样的问题用全概率公式或贝叶斯公式来解决.一般地,若试验分为两个阶段,则第一阶段的结果要影响到第二阶段的试验结果.若第一阶段所有可能的结果及其概率已知,求第二阶段某个事件的概率时用全概率公式,此时可根据第一阶段的结果划分样本空间得到完备事件组;若已知第二阶段某个事件 A 已经发生,求完备事件组中某个事件 B_i 的条件概率时要用贝叶斯公式.

例 1.7　设有甲、乙两个口袋,甲袋中有 N 个白球和 M 个黑球;乙袋中有 n 个白球和 m 个黑球.今先从甲袋中随机地取出一个放入乙袋中,再从乙袋中随机地取出一个.问最后取出的是白球的概率是多少?

解法 1　记 $B,\overline{B}$ 分别表示第一次取到白球、黑球;A 表示第二次取到白球,则 $B,\overline{B}$ 构成完备事件组.由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=\frac{N}{N+M}\cdot\frac{n+1}{n+m+1}+\frac{M}{N+M}\cdot\frac{n}{n+m+1}\\&=\frac{Nn+Mn+N}{(N+M)(n+m+1)}.\end{aligned}$$

解法 2　记 $B,\overline{B}$ 分别表示第二次取到的球原来是在甲袋、乙袋中的;A 表示第二次取到白球,则 $B,\overline{B}$ 构成完备事件组.由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=\frac{1}{m+n+1}\cdot\frac{N}{N+M}+\frac{m+n}{m+n+1}\cdot\frac{n}{m+n}\end{aligned}$$

$$=\frac{Nn+Mn+N}{(N+M)(n+m+1)}.$$

例 1.8　一袋中有 $a+b$ 个球,其中 a 个黑球,b 个白球.不放回地每次从中任取一球.试求:

(1) 第 i 次取出的为黑球的概率;

(2) 第 i 次才取出黑球的概率;

(3) 前 i 次能取到黑球的概率;

(4) 前 i 次能取到 k 个黑球和 $(i-k)$ 个白球的概率 $(0\leqslant k\leqslant i)$.

解　记 A_i = "第 i 次取出的是黑球",C = "前 i 次能取到黑球".当所讨论的事件与次序有关时,确定基本事件也应考虑次序,否则可以不考虑次序.将 $a+b$ 个球全部取出共有 $(a+b)!$ 种取法.

(1) 第 i 次取出的黑球可以是 a 个黑球中的任意一个,选定一个后,其他各次从 $(a+b-1)$ 个中任意选取,所以

$$P(A_i)=\frac{a[(a+b-1)!]}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

注意:也可以直接利用抽签问题的结论得 $P(A_i)=\frac{a}{a+b}$.

(2) 第 i 次取出的黑球可以是 a 个黑球中的任意一个,前 $(i-1)$ 次可以从 b 个白球中任选 $(i-1)$ 个(共有 P_b^{i-1} 种取法),其他各次可以从剩下的 $(a+b-i)$ 个中任选 $(a+b-i)$ 个(共有 $(a+b-i)!$ 种取法),故

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-1}}A_i)=\frac{a\cdot P_b^{i-1}[(a+b-i)!]}{(a+b)!}=\frac{a\cdot P_b^{i-1}}{P_{a+b}^i}.$$

注意:由于所讨论的事件只涉及到前 i 次,故也可以只考虑前 i 次,则可直接得到

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-1}}A_i=\frac{a\cdot P_b^{i-1}}{P_{a+b}^i}.$$

(3) 由于所讨论的事件比较复杂,故考虑其对立事件 $\overline{C}$ = "前 i 次未能取到黑球".事件 $\overline{C}$ 所包含的取法共有 $P_b^i[(a+b-i)!]$ 种,于是

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{P_b^i[(a+b)-i)!]}{(a+b)!}=1-\frac{P_b^i}{P_{a+b}^i}=1-\frac{C_b^i}{C_{a+b}^i}.$$

注意:一方面,可以只考虑前 i 次,则可直接得到 $P(C)=1-\frac{P_b^i}{P_{a+b}^i}$;另一方面,由于事件 $\overline{C}$ 也可以理解为"任取 i 个,结果全是白球",故也可以按照"一次取出"模式计算.此时由超几何公式可直接得到

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{C_a^0C_b^i}{C_{a+b}^i}=1-\frac{C_b^i}{C_{a+b}^i}.$$

这说明,只要所讨论的事件与次序无关,那么按照"无放回"模式和"一次取出"模式计算的概率相等.

(4) 由于事件本身不涉及到次序,故可按一次取出方式,即用超几何公式得到:

$$P(D)=\frac{C_a^iC_b^{i-k}}{C_{a+b}^i}.$$

例 1.9 设有来自三个地区的各10名,15 名,25 名考生的报名表,其中女生的报名表分别有 3 份,7 份,5 份.随机地抽取一个地区的报名表,从中先后抽取两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p.

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解 设 B_i="抽到第 i 个地区的报名表"($i=1,2,3$);A_j="第 j 次抽到男生表"($j=1,2$),则

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3};P(A_1|B_1)=\frac{7}{10};$$

$$P(A_1|B_2)=\frac{8}{10};P(A_1|B_3)=\frac{20}{25}.$$

(1) $p=P(\overline{A_1})=\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_i)P(\overline{A_1}|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$

(2) 根据抽签问题的结论,易知

$$P(A_2|B_1)=\frac{7}{10};P(A_2|B_2)=\frac{8}{10};P(A_2|B_3)=\frac{20}{25}.$$

根据全概率公式

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_2|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}.$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\overline{A_1}A_2|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\right)=\frac{20}{90}.$$

因此

$$q=P(\overline{A_1}|A_2)=P(\overline{A_1}A_2)\Big/P(A_2)=\frac{20}{90}\Big/\frac{61}{90}=\frac{20}{61}.$$

例 1.10 将 n 个球随意放入 N 个箱子中去($N\geqslant n$),每个球等可能地放到任意一个箱子中.求下列事件的概率:

(1) A="指定的 n 个箱子各放一球";

(2) B="每个箱子最多放入一球";

(3) C="某指定的箱子不空";

(4) D="某指定的箱子恰好放入 $k(k\leqslant n)$ 个球".

解　将 n 个球随意放入 N 个箱子共有 N^n 种放法.

(1) 指定的 n 个箱子各放一球,其放法共有 $n!$种,故有 $P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$.

(2) 从 N 个箱子中任意指定 n 个,有 C_N^n 种指定方法;而指定的 n 个箱子各放一球,其放法共有 $n!$种,故有

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}.$$

(3) 由于 C 的对立事件 $\overline{C}$ 表示"指定的箱子是空的",它等价于将 n 个球随意放入其余 $N-1$ 个箱子中,共有 $(N-1)^n$ 种放法,从而

$$P(\overline{C})=\frac{(N-1)^n}{N^n},P(C)=1-\frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

(4) 先取 k 个球(共有 C_N^k 种取法)放入指定的箱子中,然后将其余 $n-k$ 个球随意放入其余 $N-1$ 个箱子中[共有 $(N-1)^{n-k}$种取法]. 于是

$$P(D)=\frac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}.$$

例 1.11　有甲、乙两个盒子,甲中有 2 个红球、1 个黑球;乙中有 2 个红球、2 个黑球. 先从两盒中各任取一球放在一起,再从这两个中任取一球. 求:

(1) 最后一次取到的是红球的概率;

(2) 若发现最后一次取到的是红球,求从第一盒中取到的是红球的概率.

解　记 B_1,B_2,B_3,B_4 分别表示取到的前两个球是"甲红乙红"、"甲红乙黑"、"甲黑乙红"、"甲黑乙黑",A 表示"最后一次取到的是红球".

(1) 由全概率公式,得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot 0=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

(2) $P(B_1\cup B_2\mid A)=\dfrac{P(AB_1\cup AB_2)}{P(A)}=\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot 1+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\right)\Big/\dfrac{7}{12}=\dfrac{6}{7}.$

注意: 这里的事件 $A\cup B$ 不是完备事件组中的事件,因而不能直接利用贝叶斯公式. 此时可利用条件概率的定义,类似于贝叶斯公式进行计算.

例 1.12(几何概率)　将线段[0,1]任意分成三段,求分成的三段能构成三角形的概率.