21 世纪高等院校教材

线性代数简明教程

（第二版）

陈维新 编著

3

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书采用学生易于接受的方式科学、系统地介绍了线性代数的行列式，线性方程组，矩阵，向量，向量空间，矩阵的特征值和特征向量，二次型等内容.强调适用性和通用性，兼顾先进性.本书起点低，坡度适中，简洁明白，适于自习.全书涵盖了考研的数学考试大纲有关线性代数的所有内容.习题按小节配置，量大题型多，书后附有答案.各章末有概要及小结，便于学生深入理解书中内容.

本书读者对象为高等院校理工、经管、医药、农林等专业的大学生和教师，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/陈维新编著.—2版.—北京:科学出版社,2005.1
21世纪高等院校教材
ISBN 7-03-014236-5

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数-高等院校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第097601号

责任编辑:杨 波 姚莉丽/责任校对:陈丽珠
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年1月第 二 版 印张:19 1/2
2005年1月第八次印刷 字数:366 000
印数:30501—35 500

定价: 25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

第一版前言

线性代数是大学理、工、经管、医、农等学科所有专业必修的一门重要数学基础课.它作为离散性数学在工科数学中的代表,随着计算机科学日新月异的发展,许多非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在加快逐步实现,因此无论从理论上还是从应用上看,线性代数的地位更趋重要.美国数学及其应用联合会(COMAP)从 1991 年起组织有关专家历经五载编著的《数学的原理与实践》一书指出:“在现代社会,除了算术以外,线性代数是应用最广泛的数学学科了.”加之线性代数是一门新概念多,又比较抽象的课程,作为基础课,它一般又被安排在第一学年上,因而它还承担着提高学生素质,帮助学生完成从中学到大学跨越的重任.加之这门课程在许多专业还有后继课程(如离散数学、数值分析、微分方程等),故在大学人才培养中,线性代数课程有着重要的地位和作用.

本教材是为上述专业的大学生量体裁衣撰写的,强调适用性和通用性,兼顾先进性.因而在编著中作了以下探索:

(1) 低起点.起点和中学代数接轨,以中学生熟悉的内容解线性方程组讲起.

(2) 突出主线,删除某些枝节.突出主线使最基本最重要的内容讲深讲透,而一些枝节的删除将使全书脉络更为清晰,结构更为简洁,有助于学生集中精力掌握最基本最重要的知识.

(3) 坡度适中.教材章节的编排中尽量使难点分散,由浅入深时注意逐步过渡.力求使全书步步深入,而每步坡度适中,使一般程度的学生通过努力都能顺利地学会全书.全书涵盖了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容,且在核心部分有所展开和加深,因而为学生进一步深造提供良好的线性代数基础.

(4) 注重引入思想,剖析方法,在阐明结果的同时着眼于提高学生的素质.

(5) 尽量以提出问题,讨论问题,解决问题的方式来展开教材,努力使学生也能知其所以然.

(6) 充分考虑到不同学时不同层次教育的需要,教材分主体和选学两部分,通过合理配置可适用于不同学时不同层次的教学.

(7) 教材有较多的典型例题,以期举一反三.习题按小节配置,注意兼容各种题型,其中有大量的客观性习题.习题有难有易,留有充分的选择余地.

(8) 每章末均有“概要及小结”,这不仅是该章的概括提高,还常有加深理解、开拓思维的内容.

(9) 注重应用.线性代数在其他学科的渗透和应用,在篇幅允许时,尽量予以提及.

(10) 行文追求简洁明了,对重点和难点的阐述和剖析务求详尽.对容易误解出错之处,以注记的形式指明,并适度引申,以求触类旁通,提高能力.全书力图使凡大学一年级学生都能看懂,即使自学也能掌握.

本书的主体(不包括打 * 号用仿宋体排印及附录)适用于 50 学时的线性代数课所用,若做适当的增删,则可适用于学时数从 34 到 68 的线性代数课,本书的主体的教学内容完全满足高等工科院校"线性代数教学基本内容"而有余;所以即使删去部分章节也无妨.

本书的附录是主体内容外的选学部分.附录一、附录二是主体内容所需预备知识的补充.附录三,附录七是主体内容的应用.附录四至附录六是主体内容的提高和深化.均供读者酌情选学.

浙江大学城市学院院长鲁世杰教授,之江学院副院长金蒙伟副教授一直十分关心支持帮助作者撰写教材.在本书打印本使用过程中,蒙谢冰璋副教授,张继昌副教授等众多同事的厚爱,提出了许多宝贵意见.对此作者一并表示衷心的感谢.

浙江大学城市学院、之江学院、远程教育学院、数学系、教材服务中心等有关部门对本书的撰写、使用、发行各个方面给予帮助和支持.本书有幸被列为浙江大学课程建设项目,城市学院将此书作为首批教改基金资助的教材建设项目.科学出版社吕虹同志大力支持使本书得以面世.作者一并深表感谢.

作者虽在浙江大学执教代数 20 多年,此书也是多年教学实践中日积月累几经修改而成.然限于水平,撰写中常有绠短汲深之感,殷切希望读者不吝赐教,多多指正.

陈维新

2001 年 3 月于浙江大学求是村

第二版前言

一、缘起

提及缘起，作者要衷心感谢加拿大 Alberta 大学贾荣庆教授．蒙其厚谊，作者有幸作为访问教授在 Alberta 大学做研究工作．在此期间（2001 年 5 月至 8 月），有机会阅读了北美（美国、加拿大）大学 20 世纪 90 年代直至最近通用的一系列线性代数教材，感到国外教材确有特色，颇多启迪，得益匪浅．回国后又见到国内新出版的一些线性代数教材，也很受启发．于是萌发对本书的第一版作修订的想法，以面向 21 世纪中国高等教育大众化．所参考的主要国内外最近教材已列入文献［8］～［13］．

二、探索

第二版主要体现在下面两个方面：

1．加强基本概念和应用的阐述．对概念引入的背景力求具体、形象，论述力求简明．对应用给予更多的重视．不仅在第 2 章和第 3 章中增加了许多实例，而且增加了一节矩阵相似理论的应用（附录七）．希望借此使读者对线性代数的概念（或方法）是怎么来的，有什么用，有更多的了解．

2．为适应不同要求的读者，第二版编写成模块式．如第一版的向量空间一章现在就分成两章：第 4 章向量和第 5 章向量空间，这样即使略去第 5 章也不影响本书后两章的学习．又如将第 4 章的“向量组的极大线性无关组与矩阵的秩”分成基本要求和进一步理论阐述两块，前一块即以 4.3 节作为正文，而后一块放在附录五，作为酌情选讲内容．同时进一步降低起点，以便更好地和中学代数接轨．在不影响全书最终达到的高度和深度的前提下，删去了一些枝节和理论证明．按此想法第二版的各章与第一版的各章相比都作了增删．

三、使用建议

1．凡学时数较少，或是文理兼招的经济类学生，或是硕士研究生入学考试考数学二，或数学四的读者可略去第 5 章、第 7 章．为了要讲 6.4 节仅需介绍实向量的内积、长度、正交等概念．再讲一下用施密特正交法把一组线性无关实向量组改造成两两正交的单位向量组即可．

2．凡管理类学生或硕士研究生入学考试考数学三的读者可基本上略去第 5 章，仅需讲解一下 5.4 节的实向量的内积，长度，正交等概念和用施密特正交法把一组线性无关实向量组改造成两两正交的单位向量组就够了．

3．凡理工类学生，或硕士研究生入学考试考数学一的读者需学完全书．

4. 本书凡用仿宋体排印的内容和打 * 号的习题不作基本要求.

5. 凡有志于考研的读者除学习上述基本内容外,建议学习有关正文中用仿宋体排印的内容和附录一至附录五,并做打 * 号的习题.

四、鸣谢

浙江大学宁波理工学院院长俞庆森教授十分关心支持作者修订本教材,希望本书能为培养基础厚、能力强、素质高、后劲足、能适应社会经济发展需要的高层次应用性人才服务,因此本书的修订有幸列为浙江大学宁波理工学院首批课程建设项目,得到教改基金资助.浙江大学教务部、数学系、宁波理工学院教务处等部门诸多领导对本教材的修订、使用各个方面给予帮助和支持.科学出版社杨波和姚莉丽同志大力支持使本书第二版得以面世.对此作者一并表示衷心的感谢!

本书第二版的初稿于 2002 年 6 月完成,并在浙江大学宁波理工学院内部试用.经教学实践,又先后写出第二稿和第三稿,也均在浙江大学宁波理工学院内部试用.在试用期间,李胜宏、陈道琦、陈永华、单鉴华、董烈钊、何延、陈锦辉等诸多教授、副教授使用过本教材,并提出许多宝贵意见,涂黎晖同志使用过本教材并在校对和文字上给予许多帮助,作者对此深表感谢.

本书虽经多次讲用反复修改,历时三年才定稿,然而限于作者水平,不足之处殷切期望读者不吝赐教.

陈维新

2004 年 7 月

浙江大学求是村

浙江大学宁波理工学院

符　号　表

(按书中出现顺序排列)

符　　号	意　　义	页　码
P	数域	1
$\mathbf{Q}$	有理数域	1
$\mathbf{R}$	实数域	1
$\mathbf{C}$	复数域	1
$\mathbf{Z}$	全体整数	1
$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$	$\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$	1
$i_1i_2\cdots i_n$	n 阶排列	2
$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$	排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数	3
$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$	对所有 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和	11
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lvert a_{ij}\rvert_n$	n 阶行列式	11
D^{T}	行列式 D 的转置行列式	15
$R_i\pm kR_j$	行列式(矩阵)第 i 行加上(减去)第 j 行 k 倍	20(47)
$C_i\pm kC_j$	行列式(矩阵)第 i 列加上(减去)第 j 列 k 倍	20(47)
$\sum$	连加号	22(249)
M_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的余子式	24
A_{ij}	行列式元素 a_{ij} 的代数余子式	24
$D(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	n 阶范德蒙德行列式	28
$\prod$	连乘号	29(249)

续表

符　号	意　义	页　码
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵	46(75)
$\bar{\boldsymbol{A}}$	($\boldsymbol{A}$ 的)增广矩阵	46
$R_{ij}(C_{ij})$	矩阵第 i 行(列),第 j 行(列)互换	46
$kR_i(kC_i)$	矩阵第 i 行(列)乘 k	46
秩($\boldsymbol{A}$)	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩	52
$A \Rightarrow B$	A 成立可推出 B 成立	57
$A \Leftrightarrow B$	A 成立的充要条件为 B 成立	57
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式	75
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{O}_{m\times n})$	零矩阵	77
$-\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵	77
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}_n)$	单位矩阵	82
$\lambda\boldsymbol{E}(\lambda\boldsymbol{E}_n)$	数量矩阵	82
$\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t]$	对角矩阵	83
$\boldsymbol{A}^k$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂	83
$f(\boldsymbol{A})$	矩阵多项式	83
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}')$	$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵	86
$\boldsymbol{E}_{ij}$	矩阵单位	90(260)
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的迹	91(196)
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵	92
$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵	93
$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{bmatrix}$	分块矩阵	101
$\mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_t]$	准对角矩阵	106
$\boldsymbol{F}_{ij}$	初等矩阵(互换)	111

续表

符　号	意　义	页　码
$\boldsymbol{F}_i(k)$	初等矩阵(倍乘)	111
$\boldsymbol{F}_{ij}(k)$	初等矩阵(倍加)	111
$\boldsymbol{O}=[0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$	零向量	130
$-\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量	130
$\boldsymbol{R}^n$	实向量空间	160
P^n	n 元向量空间	160
$\dim P^n$	P^n的维数	161
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积	171(274)
$\Vert\boldsymbol{\alpha}\Vert$	实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度	171(275)
$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交	172(275)
W_{λ_0}	属于 λ_0 的特征子空间	186
$f(\lambda)=\lvert\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\rvert$	$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式	186
Δ_k	k 阶顺序主子式	235
$P^{n\times m}$	数域 P 上 $n\times m$ 矩阵全体	269
$P[x]_n$	系数取自数域 P 上次数小于 n 的一元多项式全体及零多项式	269
$P[x]$	系数取自数域 P 上的一元多项式的全体	270
$C[a,b]$	闭区域$[a,b]$上连续实函数的全体	270
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	实向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角	275

目　录

第1章　行　列　式

线性代数是中学代数的继续和提高.第1和第2章就是中学代数解一元一次(线性)方程 $ax+b=0$ 的延伸和深化,是研讨多个变量多个线性方程组成的线性方程组的求解问题.为此要引入一些概念,作为预备知识备用.

1.1　数域与排列

本节讨论数域和排列.

1.1.1　数域

在研究某些问题时,常和所研究对象的取值范围有关.如求方程 $x^2+1=0$ 的根,不仅在有理数范围无解,就是在实数范围也无解,而在复数范围有解,解为 $\pm\mathrm{i}$.又如在整数范围内,除法不是普遍可做的,因商不一定是整数,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可做的.另一方面,这些范围不同的有理数、实数、复数有着许多共同的性质,特别有着许多共同的运算(指加法、减法、乘法和除法)性质.如加法、乘法的可交换性,加法、乘法的可结合性等.为了在以后讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1　设 P 是至少有两个不同复数组成的集合,若 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数,则 P 就称为一个**数域**.

如果数的集合 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中,就称数集 P 对这个运算是**封闭**的.因此数域的定义也可以说成:对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)均封闭的至少含有两个不同数的集合.

从定义 1.1.1 可推知:全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域.这三个数域分别用字母 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 来表示,且有 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

例 1.1.1　记全体整数的集合为 $\mathbf{Z}$,则 $\mathbf{Z}$ 不是数域.这是因为 $2,3\in\mathbf{Z}$,且 $3\neq 0$,但 $\frac{2}{3}\overline{\in}\mathbf{Z}$,这表明 $\mathbf{Z}$ 对于除法不封闭.

例 1.1.2　记 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b,\in\mathbf{Q}\}$,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是数域.

证*　容易看出 $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,且对任意的

$$a+b\sqrt{2},\quad c+d\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

有

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

此外，当 $a+b\sqrt{2}\neq 0$ 时，$a-b\sqrt{2}$ 也不为零. 这是因为若 $a-b\sqrt{2}=0$，导致 $a=0,b=0$，这与 $a+b\sqrt{2}\neq 0$ 矛盾. 故而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

综上可知，$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 是数域，而且从 $\sqrt{2}\overline{\in}\mathbf{Q}$，$\sqrt{3}\overline{\in}\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 知，

$$\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbf{R}.$$

类似可以阐明 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$，$\mathbf{Q}(\sqrt{5})$，…，$\mathbf{Q}(\sqrt{p})$，…，其中 p 是素数(质数)是互不相同的数域，因而存在着无穷多个数域.

今后我们常在数域 P 上讨论问题，对所涉及的 P 中的数进行四则运算，推导出结果. 这样就使得该结果在数域 P 上成立，而数域 P 是泛指的，即可以是 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$，或其他某个数域，从而使结果有一般性.

为简单计，如把下文中提及的数域当作 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 来考虑，也无妨.

1.1.2 排列

定义 1.1.2 由 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个数码组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列.

例如，15432，65(12)798(11)4(10)312，$n(n-1)\cdots 21$ 依次分别为 5 阶排列，12 阶排列，n 阶排列. 在上述 12 阶排列中我们把数码 12，11，10 用括号括起来是为了区分，类似的做法在 n 阶排列中也采用.

排列是有序数组，所以组成排列数码的顺序不同就是不同的排列，例如 132 和 213 就是不同的 3 阶排列. 不同的 n 阶排列有多少个呢？n 阶排列的一般形式可表为 $i_1i_2\cdots i_n$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中某一个数，且互不相同，这时 $i_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的下标 k 表示 i_k 排在 n 阶排列的第 k 个位置上. 这样按 n 阶排列的定义知，i_1 可有 n 种选取(n 个数码中任选一个)，i_2 有 $n-1$ 种选取(去掉 i_1，余下 $n-1$ 个数码中任选一个)，…，i_{n-1} 可有 2 种选取(去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_{n-2}$，余下 2 个数码中任选一个)，而 i_n 只能取余下的那个数码，故 n 阶排列共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1=n!$$

个. 例如 3 阶排列共有 $3!=6$ 个，它们是：123，132，213，231，312，321.

在 $n!$ 个 n 阶排列中，惟有 $12\cdots(n-1)n$ 是按数码从小到大的自然顺序组成的一

个排列(称为**标准排列**).其余的排列或多或少会出现大的数排在小的数前面的情况,比如在5阶排列15432中,5排在4前,3排在2前.这样的排列顺序是与自然顺序相反的,为此引入概念:在排列 $i_1i_2\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中,如果 $j<k$ 而 $i_j>i_k$,则称数对 i_j,i_k 构成一个**逆序**.一个排列的逆序总数称为排列的**逆序数**,记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.逆序数为偶数的称为**偶排列**,逆序数为奇数的称为**奇排列**.

下面寻求计算排列逆序数的方法.先看一个例子,排列35412构成逆序的数对有

$$\begin{array}{lll} 31, & 32; & \\ 54, & 51, & 52; \\ 41, & 42. & \end{array}$$

因而35412的逆序数为

$$\begin{aligned} & 2(3\text{ 后面比 }3\text{ 小的数的个数}) \\ & +3(5\text{ 后面比 }5\text{ 小的数的个数}) \\ & +2(4\text{ 后面比 }4\text{ 小的数的个数}) \\ & +0(1\text{ 后面比 }1\text{ 小的数的个数}) \\ & =7, \end{aligned}$$

所以35412为奇排列.

由此得出计算排列的逆序数的一个方法:

$$\begin{aligned} \tau(i_1i_2\cdots i_n) = & \tau_1(i_1\text{ 后面比 }i_1\text{ 小的数的个数}) \\ & +\tau_2(i_2\text{ 后面比 }i_2\text{ 小的数的个数}) \\ & +\cdots\cdots \\ & +\tau_{n-1}(i_{n-1}\text{ 后面比 }i_{n-1}\text{ 小的数的个数}). \end{aligned}$$

据此方法计算得

$$\tau(15432)=0+3+2+1=6,$$

所以15432为偶排列.

注意到 $\tau(12\cdots(n-1)n)=0$,故 $12\cdots(n-1)n$ 为偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不动,就得到另一个排列,这样的变换称为**对换**.例如,经过1,3两数码对换,偶排列15432就变成奇排列35412.这表明对换会改变排列的奇偶性.一般有下列定理.

定理 1.1.1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证* 首先证明对换排列中相邻两个数码的情况.设排列$\cdots i_ki_{k+1}\cdots$经过数码 i_k,i_{k+1}对换后变成排列$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$,这里"$\cdots$"表示排列中那些不动的数码.故排列"$\cdots i_ki_{k+1}\cdots$"与排列"$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$"中 $\tau_1,\cdots,\tau_{k-1},\tau_{k+2},\cdots,\tau_n$ 是相同的,可能不同的只是 τ_k 与 τ_{k+1}.从而若 $i_k<i_{k+1}$,则排列"$\cdots i_{k+1}i_k\cdots$"比"$\cdots i_ki_{k+1}\cdots$"多1个逆

序；若 $i_k > i_{k+1}$，则排列"$\cdots i_{k+1} i_k \cdots$"比"$\cdots i_k i_{k+1} \cdots$"少1个逆序. 故不论如何排列的奇偶性改变了.

现再讨论一般情况. 设对换的两个数码 i_k 和 i_j 中间有 s 个数码，即设排列为

$$\cdots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_j \cdots. \tag{1.1.1}$$

经过 i_k, i_j 对换后，变成排列

$$\cdots i_j i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_k \cdots. \tag{1.1.2}$$

从式(1.1.1)开始，把 i_j 依次与左边 $s+1$ 个数码 $i_{k+s}, \cdots, i_{k+1}, i_k$ 进行相邻数码的对换，排列式(1.1.1)变成排列

$$\cdots i_j i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} \cdots. \tag{1.1.3}$$

再对排列式(1.1.3)把 i_k 向右依次与 s 个数码 $i_{k+1}, \cdots, i_{k+s}$ 进行相邻数码对换，排列式(1.1.3)变成排列式(1.1.2). 这表明 i_k 与 i_j 的对换可通过 $2s+1$ 次相邻数码对换来实现，而每经一次相邻数码对换改变排列奇偶性. 现经奇数次相邻数码对换，最终必改变排列的奇偶性.

习 题 1.1

1. $\mathbf{R}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 是不是数域？它实际上是 **Q**, **R**, **C** 中的哪一个数域？

2. 写出4个数码1,2,3,4的所有4阶排列.

3. 分别计算下列四个4阶排列的逆序数，然后指出奇排列是(　　).

(A) 4312；(B) 4132；(C) 1342；(D) 2314.

4. 计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 314265；　(2) 314265789；　(3) 542391786；

(4) 987654321；　(5) 246813579；　(6) $n(n-1)\cdots 21$.

5. 在由1,2,3,4,5,6,7,8,9组成的下述9阶排列中，选择 i 与 j 使得

(1) $2147i95j8$ 为偶排列；　(2) $1i25j4896$ 为奇排列；

(3) $412i5769j$ 为偶排列；　(4) $i3142j786$ 为奇排列.

且均要求说明理由.

6. 写出全体形如 5 * * 2 * 及 2 * 5 * 3 的5阶排列. 总结一下，有 k 个位置数码给定的 $n(n>k)$ 阶排列有多少个？

7. 自学附录一：连加号∑与连乘号∏.

1.2 行列式的定义

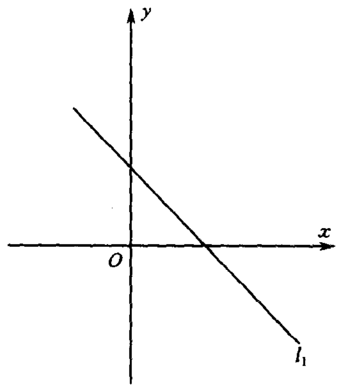
由中学数学知

1. 一元一次方程 $ax=b$，当 $a \neq 0$ 时，有惟一解：$x = a^{-1}b$.

2. 二元一次方程 $ax+by=c$，当 a, b 不全为零时，有无穷多解. 比如二元一次方程(Ⅰ)：$x+y=1$ 的解为

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 为任意常数.}$$

这些解的全体构成已建立直角坐标系 Oxy 的平面上的一条直线 l_1(参见右图),方程(Ⅰ)称为直线 l_1 的方程(正因为此,我们称一次方程为线性方程).同样直线 l_1 上点的坐标都是方程(Ⅰ)的解,l_1 可称为方程(Ⅰ)的直线.简言之,二元一次方程和平面上的直线是一一对应的.按照这种观点,讨论两个二元一次联立方程(即线性方程组)

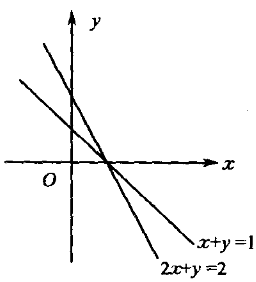


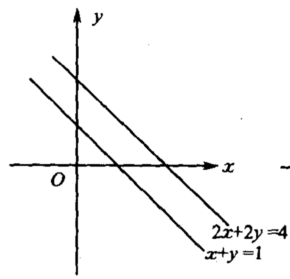
$$\text{(Ⅱ)}\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

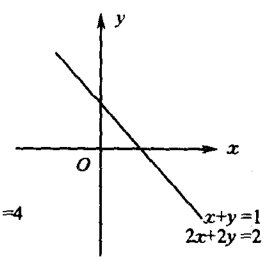
的解,其实就是寻求两条直线的公共点问题.比如考虑下述方程组的解

$$\text{(Ⅲ)}\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+y=2. \end{cases} \qquad \text{(Ⅳ)}\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=4. \end{cases} \qquad \text{(Ⅴ)}\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2. \end{cases}$$

可以在已建立直角坐标系 Oxy 的平面上画出相应的直线







这表明(Ⅲ)有惟一解:$x=1,y=0$;(Ⅳ)无解;(Ⅴ)有无穷多解.

中学数学还告诉我们凡方程组(Ⅱ)总是可以用消元法来解的.比如

$$\text{(Ⅲ)}\begin{cases} x + y = 1, & ① \\ 2x + y = 2, & ② \end{cases}$$

将①×(−2)加到②上得 $y=0$,将①×(−1)加到②上得 $x=1$.从而(Ⅲ)的惟一解为 $x=1,y=0$.

上述都是我们中学数学中熟知的结果,我们将在此基础上继续讨论,为此引进一些概念.

定义 1.2.1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是变量,n 是一个正整数,形式表达式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 均为数,称为 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性方程**,线性方程

中的变量也称为**未知量**.

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时就是我们熟悉的一元一次方程和二元一次方程.

例 1.2.1　下列均为线性方程:

$$\sqrt{2}x+2y=7;\quad x_1+2x_2-\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)x_3+x_4=5;\quad y=4x-z+\lg 50.$$

例 1.2.2　下列均不是线性方程:

$$x+2y^2=7;\qquad x_1+2x_2-4x_3+x_1x_3=5;$$

$$y-\cos x=2;\qquad \sqrt{x_1}+2x_2-x_3=1.$$

上述两例表明线性方程是未知量均为一次的方程.

定义 1.2.2　线性方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 的一个**解**是一组有序的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 当 $x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$ 时,有

$$a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n=b.$$

线性方程解的全体所组成的集合称为**解集合**.

定义 1.2.3　含 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

称为**线性方程组**.若一组有序的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是方程组中每一个线性方程的解,则其称为线性方程组的一个**解**.线性方程组解的全体称为**解集合**.

按此定义上述线性方程组(Ⅲ)的解集合为 $\{x=1,y=0\}$;(Ⅳ)的解集合为空集合;(Ⅴ)的解集合为 $\{x=1-t,y=t\mid t$ 为任意常数$\}$.

下面我们来考察由含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的求解问题.

这类方程组总是可以用消元法来求解的.消元法对具体的数字方程求解,虽然比较方便,但其解没有一个统一的公式.而解的公式的重要性只要回想中学代数一元二次方程的公式解的意义就能理解,所以我们有必要寻求含有 n 个未知量的 n 个线性方程组成的方程组的公式解.首先从 $n=2,n=3$ 做起,再推广到一般.

当 $n=2$ 时,用消元法解含有未知量 x_1,x_2 的线性方程组