初中数学竞赛教程

[illegible]

江苏教育出版社

初中数学竞赛教程

杜锡录　严镇军　余红兵　编著

江苏教育出版社

内 容 简 介

本书的三位作者均为中国科学技术大学数学系教师，他们既有从事现代数学教学与研究的背景，又有组织与辅导数学竞赛的经验。在编写本书时，作者们充分利用了长期积累的经验与资料。

本书将初中数学竞赛的主要内容分为五十讲，按初等代数、初等数论、初等几何、数学思想方法的顺序编排。其中，初等代数和初等几何部分从加深、拓广课本内容起步，初等数论和数学思想方法部分也难易适度。全书科学性强，系统性强，覆盖面广，例、习题丰富，便于自学，各地数学奥林匹克学校、各中学数学课外小组选作教材尤为适宜。初中学生学完全书，可以达到适应省级与全国竞赛的水平。

本书可供初中学生，中学数学教师、教研员，师范院校数学系师生阅读。

初中数学竞赛教程

编著：杜锡录　严镇军　余红兵

出版发行：江苏教育出版社
（南京中央路165号，邮政编码：210009）
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：常熟市印刷二厂

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 12.125　字数 320,000
1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷
印数（平）1—44,900 册
（精）1—5,100 册

ISBN 7—5343—1054—7

G·925　　定价：（平）4.10元
（精）4.70元

责任编辑　喻　纬

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

目录

第1讲　因式分解(一)

严镇军

通过各种代数运算，把一个代数式变成另一个与它恒等的代数式，称为代数恒等变形．代数恒等变形的能力是学习数学的基本功之一．因式分解是中学里最重要的一种代数恒等变形，它是解决许多数学问题的有力工具．下面介绍一些在初中范围内常用的因式分解方法．

一、拆项、添项分组法

把代数式中的某项拆成两项或更多项的代数和，叫做拆项；把代数式添上两个符号相反的项，叫做添项．由于因式分解是多项式乘法的逆运算，而在进行乘法运算的整理化简中把同类项合并了，所以在进行因式分解时，常需要通过拆项或添项，把某些被合并的同类项恢复原状，使在各项及各组之间制造出公因式，然后进行分组分解或利用公式分解．熟知的十字相乘法实际上是一种拆项法，配方法则是一种特殊的添项法．一般情况下，如何拆项或添项，依赖于对题目特点的观察和分析．

例1　分解因式：(1) $x^3+9x^2+26x+24$；　(2) x^5+x+1．

解　(1) 原式 $=(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)$

$=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)$

$=(x+2)(x^2+7x+12)=(x+2)(x+3)(x+4)$．

(2) 原式 $=(x^5-x^2)+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^3-$

$x^2+1)$.

例 2 分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

解 对首、末两项配方得

原式

$=(1+y)^2+2(1+y)x^2(1-y)+x^4(1-y)^2-2(1+y)x^2(1-y)-2x^2(1+y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$

$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x]\cdot[(1+y)+x^2(1-y)-2x]$

$=(x^2+2x+1+y-x^2y)(x^2-2x+1+y-x^2y)$

$=[(x+1)^2-y(x^2-1)]\cdot[(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$=(x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$.

例 3 分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$.

解 原式 $=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

例 4 若 a 为自然数，则 a^4-3a^2+9 是质数还是合数？给出你的证明.

分析 把原式分解因式，但完成分解后，还不能断定原式为合数，这是由于对某些 a，可能有些因式的值为 1.

解 原式 $=(a^4+6a^2+9)-9a^2=(a^2-3a+3)(a^2+3a+3)$.

当 $a=1$ 时(这时 $a^2-3a+3=1$)，原式 $=7$ 为质数；当 $a=2$ 时，原式 $=13$ 为质数.

当 $a\geqslant 3$ 时，因为 $a^2-3a+3=a(a-3)+3>1$, $a^2+3a+3>1$，所以 a^4-3a^2+9 为合数.

二、换元法

对于一个复杂的代数式，如果能根据式子的特征，把其中的某些部分看成一个整体，并用一个新的文字(新元)代替，使式子

得到简化，各项的关系容易看清，便于分解，这种方法称为换元法.

例 5 分解因式：$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

分析 从式子的特征看，把 $a+b$ 及 ab 各看作一个整体是有益的.

解 令 $x=a+b, y=ab$，则

$$\begin{aligned}原式&=(x-2y)(x-2)+(1-y)^2\\&=x^2-2xy-2x+4y+1-2y+y^2\\&=(x-y)^2-2(x-y)+1\\&=[(x-y)-1]^2=(a+b-ab-1)^2.\end{aligned}$$

例 6 证明四个连续自然数的积与 1 之和必是一个完全平方数.

证 设这四个连续自然数为 $n, n+1, n+2, n+3$，则

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1.$$

令 $x=n^2+3n$，则

$$原式=x(x+2)+1=(x+1)^2=(n^2+3n+1)^2.$$

三、待定系数法

有时经过分析可以断定或由题设条件知道多项式能分解成某几个因式，只是这些因式中的系数尚待确定. 由于这几个因式的连乘积恒等于原式，因此两边对应项的系数相等. 由此列出关于这些待定系数的方程组，解之求得各待定系数的值，从而完成因式分解. 这种方法称为待定系数法.

例 7 分解因式：$3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$.

解法一 由于 $3x^2+5xy-2y^2=(3x-y)(x+2y)$，故知原式的两个因式必是 $(3x-y+a)(x+2y+b)$ 的形式. 于是，设

$$\begin{aligned}&3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4=(3x-y+a)(x+2y+b)\\&=3x^2+5xy-2y^2+(a+3b)x+(2a-b)y+ab.\qquad(1)\end{aligned}$$

比较两边系数得 $\begin{cases} a+3b=1, & (2) \\ 2a-b=9, & (3) \\ ab=-4. & (4) \end{cases}$

由(2),(3)联立，解得 $a=4,b=-1$，代入(4)式成立，所以

$$\text{原式}=(3x-y+4)(x+2y-1).$$

说明 一般说来，对于 n 个未知数，只要 n 个方程联立，就可以确定它们．这样，当由比较系数得到的方程个数多于未知数的个数时，必须把求得的值代入多余的方程逐一检验．若有的解对某个方程或所设的等式不成立，则需将此解舍去；若所得方程组(包括多余的方程)无解，则说明原式不能分解成所设形式的因式．如对例 7 的三个方程，若把(3)，(4)联立，求得两组解 $a=4,b=-1$ 及 $a=\frac{1}{2},b=-8$，但后者不能满足(2)，应舍去．

解法二 与解法一相同，得到(1)式，由于(1)式是恒等式，它对所有使式子有意义的 x,y 都成立，特别地令 $x=0,y=0$，得 $ab=-4$；令 $x=1,y=0$，得 $3+a+3b+ab=0$．将所得两式联立，解得 $a=4,b=-1$，及 $a=-3$，$b=\frac{4}{3}$．经展开验证 $a=-3$，$b=\frac{4}{3}$ 不能使(1)成立，应舍去．

$\therefore$ 原式 $=(3x-y+4)(x+2y-1)$．

例 8 求证：x^2-xy+y^2+x+y 不能分解成两个一次因式的乘积．

证 由于原式中不含常数项，故若原式能分解的话，就只能分解为形如 $(ax+by)(cx+dy+e)$ 的积．设 $x^2-xy+y^2+x+y=(ax+by)(cx+dy+e)$，且知 $e\neq 0$．将左边展开，并比较系数，得 $\begin{cases} ac=1, & (1) \\ ad+bc=-1, & (2) \\ bd=1, & (3) \\ ae=1, & (4) \\ be=1. & (5) \end{cases}$

由(4)，(5)得 $a=b$；代入(3)，由(1),(3)得 $c=d$. 将以上结果代入(2)，得 $bd+bd=-1$，即 $bd=-1/2$. 而这与(3)矛盾，即(1)－(5)联立无解.

所以，原式不能分解成两个一次因式的乘积.

说明 本题不能设原式 $=(x+by)(x+cy+e)$，然后讨论由比较系数所得方程组无解. 这是由于上述做法限制了两个因式中 x 的系数为 1，而原题未作这种假定.

例 9 已知 $x^5-5qx+4r$ 能被 $(x-c)^2$ 整除，求证 $q^5=r^4$.

证 设 $x^5-5qx+4r=(x^2-2cx+c^2)(x^3+ax^2+bx+4r/c^2)$，展开右端，比较两边同次幂的系数，得

$$\begin{cases} a-2c=0, & (1)\\ c^2+b-2ac=0, & (2)\\ ac^2-2bc+4r/c^2=0, & (3)\\ 8r/c-bc^3=5q. & (4)\end{cases}$$

由(1)，(2)得 $a=2c, b=3c^2$，代入(3),(4)，解得 $r=c^5, q=c^4$.
$\therefore r^4=q^5$.

例 10 求证：$x^4+x^3+x^2+x+1$ 可以表示成两个多项式的平方差.

证 设 M,N 是两个待求的多项式，使

$$x^4+x^3+x^2+x+1=M^2-N^2.$$

$$\begin{aligned}\because\quad x^4+x^3+x^2+x+1&=x^2(x^2+1/x^2+x+1/x+1)\\ &=x^2[(x+1/x)^2+(x+1/x)-1]\\ &=x^2(x+1/x-\alpha)(x+1/x-\beta)\\ &=(x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1),\end{aligned}$$

式中 α,β 是 $y^2+y-1=0$ 的两根，解得 $\alpha,\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\therefore\quad (x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1)=(M-N)(M+N).$$

这里 $\begin{cases} M-N=x^2-\alpha x+1,\\ M+N=x^2-\beta x+1,\end{cases}$

解得　$M=x^2+(1/2)x+1, N=(\sqrt{5}/2)x$,

即　　原式 $=[x^2+(1/2)x+1]^2-[(\sqrt{5}/2)x]^2$.

习　题　1*

1．填空：

(1)　已知恒等式 $(6x^2-Axy-3y^2-x-7y-z)=(2x+By+C)(Dx+Ey-2)$，则 $A+B+C+D+E=$________.

(2)　设 $x^2+2kx-3k^2$ 能被 $x-1$ 整除，则 $k=$________.

(3)　若 $6x^2-5x-M$ 被 $3x+2$ 除的余数是 -4，则 M 的值是____.

(4)　$2^{48}-1$ 可以被 60 与 70 之间的两个数整除，则这两个数是__________.

2．分解因式：(1)　$a^2-b^2+4a+4b+3$；

(2)　$x^3-9ax^2+27a^2x-26a^3$；

(3)　$(x^2-1)(x+3)(x+5)-20$.

3．在实数范围内分解因式：$x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}$.

4．分解因式：(1)　$(x^2+xy+y^2)(x^2+xy+2y^2)-12y^4$；

(2)　$(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$；

(3)　$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$.

5．求 ax^3+bx^2+cx+d 为一完全立方式的条件.

6．求满足 $x^2y-2xy+y+x^2-2x=1983$ 的整数对 (x, y).

7．将 $5^{1985}-1$ 分解为三个整数的乘积，使每一个都大于 5^{100}.

---

* 习题序号与该讲序号相同.

第2讲 因式分解(二)

严镇军

一、求根法

形如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (1)$$

的代数式，叫做一元 n 次多项式，这里 x 是文字，n 是非负整数，$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 叫做多项式的系数，且 $a_n\neq0$. 常用 $f(x)$ 简单地表示多项式(1)，用 $f(a)$ 表示当 $x=a$ 时多项式的值，特别当 $f(a)=0$ 时，a 叫做 $f(x)$ 的根. 例如，若 $f(x)=x^3-2x+1$，则 $f(1)=1^3-2\times1+1=0$(因而1是 x^3-2x+1 的根，即方程 $x^3-2x+1=0$ 的解)，$f(0)=1$，等等.

因式定理 若 a 是多项式 $f(x)$ 的根，即 $f(a)=0$，则 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除(即 $x-a$ 是 $f(x)$ 的一个因式).

证 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$\because f(a)=0$，

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=f(x)-f(a)\\&=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)\\&\quad-(a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1a+a_0)\\&=a_n(x^n-a^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots+a_1(x-a). \qquad (2)\end{aligned}$$

由于对任何自然数 k，有

$$x^k-a^k=(x-a)(x^{k-1}+ax^{k-2}+a^2x^{k-3}+\cdots+a^{k-1}),$$

故(2)式右端的每一项都含有因式 $x-a$，从而 $f(x)$ 含有因式 $x-a$.

例 1 证明：$2x+3$ 为多项式 $2x^4+5x^3-10x^2+15x+18$ 的因式．（武汉 1985．）

证 令 $f(x)=2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$，则

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=2\left(-\frac{3}{2}\right)^4-5\left(-\frac{3}{2}\right)^3-10\left(-\frac{3}{2}\right)^2+15\left(-\frac{3}{2}\right)+18$$

$$=\frac{81}{8}+\frac{135}{8}-\frac{90}{4}-\frac{45}{2}+18=0.$$

$$\therefore\quad 2x+3=2\left[x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]\text{是 } f(x) \text{ 的因式.}$$

若多项式(1)的所有系数都是整数，则称(1)为**整系数多项式**．对于整系数多项式，可以利用下述定理，求它的有理数根．

定理 设 $f(x)$ 是整系数多项式(1)，若 $x=\dfrac{q}{p}$（p,q 是互质整数）是它的根，则 p 是首项系数 a_n 的约数，q 是末项系数 a_0 的约数．

证 由所设条件，有

$$f\left(\frac{q}{p}\right)=a_n\left(\frac{q}{p}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\cdot\frac{q}{p}+x_0=0.$$

两边乘以 p^n，得

$$a_nq^n+a_{n-1}pq^{n-1}+\cdots+a_1p^{n-1}q+a_0p^n=0.$$

$\because p$ 能整除 $a_{n-1}pq^{n-1}+\cdots+a_1p^{n-1}q+a_0p^n$，$\therefore p$ 能整除 a_nq^n．又 $\because p,q$ 互质，$\therefore p$ 能整除 a_n，即 p 是 a_n 的约数．同理可证，q 是 a_0 的系数．

推论 对于首项系数为 1 的整系数多项式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

若整数 b 是它的根，则 b 是 a_0 的约数．

例 2 在实数范围内分解因式：$x^3+x^2-10x+6$．

分析 因为 6 的约数为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$，依次计算 $f(\pm1)$，$f(\pm2)$，$f(\pm3)$，$f(\pm6)$，只有 $f(3)=0$，即 $x-3$ 是原式的

因式，再作综合除法可求得$f(x)$的另一二次因式，此二次因式的根，可直接用公式计算.

解 记原式为$f(x)$. $\because f(3)=0$，$\therefore x-3$是原式的因式，作综合除法

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & +1 & -10 & -6 \\
 & & +3 & +12 & +6 \\
\hline
 & 1 & +4 & +2 & \boxed{0}
\end{array}$$

得，原式$=(x-3)(x^2+4x+2)$

$=(x-3)(x+2x+\sqrt{2})(x+2x-\sqrt{2})$.

例 3 分解因式：$x^4+2x^3-9x^2-2x+8$.

分析 由于原式中各项系数和为零，故1必是原式的根；由于原式中各奇次项系数之和等于各偶次项系数之和，所以-1是原式的根.

解 因±1都是原式的根，故原式有因式$x-1$及$x+1$，作长除法(或作两次综合除法)，即原式除以x^2-1，可求得原式有二次因式x^2+2x-8. 所以

原式$=(x-1)(x+1)(x^2+2x-8)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)$.

二、对称多项式的分解

在一个含有若干个元的多项式中，如果互换任意两个元的位置，多项式不变，这种多项式叫做对称多项式. 例如，$x^4+(x+y)^4+y^4$是二元对称多项式，$x^3+y^3+z^3-3xyz$是三元对称多项式.

一个关于$x,y,z,\cdots,w$的多元多项式，若依某种顺序把文字进行轮换(如把x换成y，y换成z，…，w换成x)，多项式不变，这种多项式叫做轮换对称多项式. 例如，$x^2y+y^2z+z^2x$，

$(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)$都是三元轮换对称式.

显然，对称多项式都是轮换对称多项式，而轮换对称多项式则不一定是对称多项式. 例如 $x^2y+y^2z+z^2x$ 是轮换式，但应互换 x,y，得到的是 $y^2x+x^2z+z^2y$，这已不是原式，所以原式不是对称式.

对于轮换式的因式分解，常用的方法是选定一个文字（例如 x）作主元，将其余的元看成确定的数，然后用因式定理来确定它的因式，再利用轮换式的特征，定出几个相应的因式. 例如，对一关于 x,y,z 的轮换式，如已定出 $x-y$ 是它的一个因式，则 $y-z,z-x$ 都是它的因式.

例 4 设 a,b,c 是三角形的三边长，求证：

$$a^3+b^3+c^3-a(b-c)^2-b(c-a)^2-c(a-b)^2-4abc<0.$$

证 把原式左边看成是 a 的三次多项式 $f(a)$，则

$$\begin{aligned}f(b+c)&=(b+c)^3+b^3+c^3-(b+c)(b-c)^2-b^3-c^3-4(b+c)bc\\&=2(b^3+c^3)+3b^2c+3bc^2-2(b^3+c^3)+b^2c+bc^2-4(b+c)bc\\&=0.\end{aligned}$$

故 $a-(b+c)=a-b-c$ 是它的一个因式. 由轮换对称性，$b-c-a,c-a-b$ 都是它的因式. 因为原式左边是关于 a,b,c 的三次式，故可设

$$左边=k(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b).$$

比较两边 a^3 的系数，得 $k=1$，所以

$$左边=(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b).$$

因 a,b,c 是三角形的三边，故 $b+c>a$，即 $a-b-c<0$. 同理 $b-c-a<0,c-a-b<0$. 于是

$$左边<0.$$

例 5 分解因式：$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

解 原式是四次轮换式，由因式定理，可知 $a-b,b-c,c-a$ 都是它的因式. 由轮换性，它的另一个一次因式只能是 $a+b+$

c(例如，若是 $a-b+c$。则轮换后又有两个一次因式，这样，原式至少为六次)．令

$$\text{原式}=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

这是一个恒等式．取 $a=0, b=1, c=-2$，得

$$-2+8=k(-1)3(-2)(-1)=-6k.$$

$\therefore k=-1$，从而

$$\text{原式}=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

例 6 分解因式：$x^4+(x+y)^4+y^4$.

分析 这是一个二元对称式，任何二元对称式都可用 $x+y$，xy 表示(这对于用韦达定理解某些二次方程问题是有用的)，例如

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3 \\ &= (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2. \end{aligned}$$

分解二元对称式时，可先把它用 $x+y$ 及 xy 表示($x+y$ 和 xy 叫做二元基本对称式)．

解 原式 $=2[(x+y)^4-2xy(x+y)+(xy)^2]$

$$=2[(x+y)^2-xy]^2=2(x^2+y^2+xy)^2.$$

三、因式分解和高次方程

课本上已经讲了，解特殊形式的高次方程的基本方法是降次．而降次常用的方法则是因式分解、换元等，例 2 及例 3 即是利用因式分解，求得方程 $x^3+x^2-10x+6=0$ 及 $x^4+2x^3-9x^2-2x+8=0$ 的解分别是 $x_1=3$，$x_2=-2-\sqrt{2}$，$x_3=-2+\sqrt{2}$ 及 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-4$.

例 7 解方程：$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$．(湖北 1983.)

解 令 $y=(6x+7)^2$，则

$$(3x+4)(x+1)=\frac{1}{12}(6x+8)(6x+6)$$

$$=\frac{1}{12}(\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)=\frac{1}{12}(y-1).$$

于是，原方程化为$\frac{1}{12}y(y-1)=6$.

解得 $y_1=9, y_2=-8$(因$y=(6x+7)^2\geqslant 0$，故舍去).

再由 $(6x+7)^2=9$，解得 $x_1=-2/3, x_2=-5/3$.

例 8 解方程$(x-2)^4+(x-6)^4=626$.

分析 如果能找到一个合适的数 a，使

$$y+a=x-2, y-a=x-6, \tag{3}$$

则原方程成为

$$(y+a)^4+(y-a)^4=626,$$

这是一个关于 y 的双二次方程.

(3)中两式相减，可得 $a=2$，从而 $y=x-4$.

解 令 $y=x-4$，原方程化为双二次方程

$$y^4+24y^2-297=0,$$

解得 $y^2=9, y^2=-33$(舍去)，从而 $y=\pm 3$. 于是，$x_1=7, x_2=1$ 是原方程的解.

说明 形如$(x+a)^4+(x+b)^4=c$ 的方程，可作代换 $y=x+\frac{a+b}{2}$化成双二次方程.

例 9 证明方程 $x^8-x^5+x^2+x+1$ 没有实数根.

解 将原方程左边分解因式，有

$$x^8-x^5+x^2+x+1=x^5(x^3-1)+x^2+x+1$$
$$=(x^2+x+1)[x^5(x-1)+1].$$

于是，原方程成为$(x^2+x+1)[x^5(x-1)+1]=0$.

为证明原方程没有实数根，只需证明方程

$$x^2+x+1=0 \tag{4}$$

及

$$x^5(x-1)+1=0 \tag{5}$$

都没有实数根.