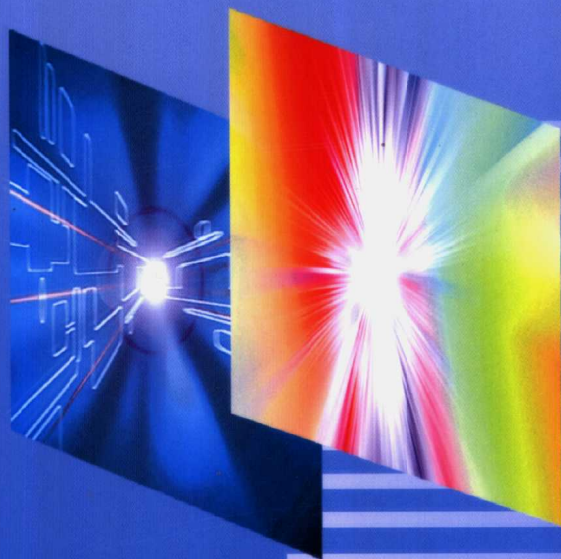


王青圃 张行愚 刘泽金 李平 编著

激光原理

Principles of Laser



山东大学出版社
Shandong University Press

激光原理

王青圃 张行愚

编著

刘泽金 李平

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

激光原理/王青圃, 张行愚编著. — 济南: 山东大学出版社,
2003.10

ISBN 7-5607-2686-0

- I. 激…
- II. ①王…②张…
- III. 激光理论
- IV. TN241

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 095576 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码: 250100)

山东省新华书店经销

莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷

787×980 毫米 1/16 22.25 印张 420 千字

2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—2000 册

定价: 29.50 元

版权所有, 盗印必究!

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社营销部负责调换

内容简介

本书系统地介绍了产生激光的基本原理和处理激光问题的基本理论和基本方法。内容涉及光与物质相互作用的基本概念及基础理论，光学谐振腔的几何光学理论和衍射理论，高斯光束的传输及通过光学系统变换特性及处理方法，激光速率方程理论；系统地讨论了连续激光器、脉冲激光器工作特性及处理方法；介绍了固体激光器、气体激光器等典型激光器的工作原理。本书特别注意基本概念、基本理论、物理思想、物理图像的阐述及理论的系统性、完整性和相互联系。

本书可作为综合性大学、高等师范院校、工程院校和其他院校物理、光学、光电子学、光通讯等专业大学生、研究生教材，也可供专业研究工作者和工程技术人员参考。

前 言

本书是基于作者多年来在山东大学信息科学与工程学院讲授“激光原理”、“激光物理”的讲义、讲稿，特别是在作者的《激光物理学》一书的基础上对相关的内容修改、补充编写而成。

本书着重介绍和讨论了产生激光的基本原理和处理激光问题的基本理论、基本方法，并注意理论和实际相结合，力图深入而清晰地讲清物理概念、物理思想和物理图像。既注意物理概念的深入浅出的阐述，又注意了详细的数学推导和理论的严谨，在基本理论阐述之后还常对难点和疑点进行讨论和分析。在有限的章节内，对选取的材料进行了合理的取舍，兼顾了内容的广度和深度。在内容编排上，注意了理论的系统性、完整性和各章节之间的联系，以便于读者掌握基本理论和基本方法。

全书共分七章。前二章介绍光与物质相互作用的基本概念、基本理论，深入浅出地、简明地阐述了构成激光器的物理思想。内容包括电磁场在介质中的传播、吸收和发射，空腔模式，激光的纵模和横模，线型函数和引起加宽的机理等。为了深入理解，对主要内容进行了详细的数学分析。第三、四章是关于高斯光束和谐振腔理论，重点是稳定腔，对非稳腔只作概要叙述。第五、六章是激光振荡的速率方程理论。在讨论连续和脉冲激光器工作与输出特性的同时，对有些内容，如阈值附近输出特性的突变、最佳调 Q 理论的数学推导及参数测量等都进行了详细分析。第七章介绍典型激光器的工作原理，特别增加了固体激光器最新进展的内容。每章附有习题，有的是作为正文内容的补充，大部分是用作训练基本运算的能力。

本书内容较为广泛，除考虑到内容及理论的系统性、完整性外，还可以满足不同层次读者的需要和兴趣。例如，增加了激光冷冻原子的多普勒机制的内容，可以让读者利用本章学习的基本理论去进行分析。另外，还增加了辐射和吸收的半经典理论、谐振腔的特征光束以及高斯光束的均匀化等内容，在教学过程中，可以根据教学计划，对内容进行取舍。

本书前五章和第七章由山东大学博士生导师王青圃教授、国防科技大学博士生导师刘泽金博士和山东大学教授李平博士编写，第六章由山东大学博士生导师张行愚博士编写，全书由王青圃统稿、定稿。

在编写过程中，清华大学博士生导师张培林教授、高以智教授，西北大学博士生导师张纪岳教授、四川大学博士生导师吕百达教授都提出了许多宝贵意见。书中引用了许多作者的著作和文献、资料，丰富了本书的内容，在此谨表衷心的感谢。本书获山东大学出版基金委的一等资助。山东大学教务处、山东大学出版社都给予热情支持，谨表谢意。

本书涉及内容广泛，由于作者水平所限，不妥和疏漏之处在所难免，望激光界前辈和朋友们惠予指正。

作者

2003年9月

目 录

第一章 辐射场与物质的相互作用	(1)
§ 1.1 均匀各向同性介质中电磁场的传播	(1)
§ 1.2 空腔电磁场的模式	(6)
§ 1.3 光波模式、光量子态、相格、相干体积和光子简并度	(11)
§ 1.4 光和物质相互作用的经典理论简介	(16)
§ 1.5 自发辐射、受激吸收和受激发射	(24)
§ 1.6 辐射和吸收的半经典理论	(30)
§ 1.7 光谱线的线型函数	(35)
§ 1.8 自然加宽和碰撞加宽	(40)
§ 1.9 多普勒加宽	(49)
§ 1.10 飞行时间加宽	(52)
§ 1.11 均匀加宽、非均匀加宽和综合加宽	(55)
§ 1.12 激光冷却原子的多普勒冷却机制	(59)
习题	(69)
第二章 激光器的基本原理	(72)
§ 2.1 光的放大、吸收系数和增益系数	(72)
§ 2.2 抽运过程	(78)
§ 2.3 光的自激振荡	(81)
§ 2.4 激光模式、谐振腔的限模原理	(83)
§ 2.5 光学谐振腔的损耗和 Q 值	(91)
习题	(98)
第三章 光学谐振腔	(100)
§ 3.1 光学谐振腔的稳定条件	(100)
§ 3.2 谐振腔的特征光束	(108)
§ 3.3 非稳腔	(111)
§ 3.4 多镜腔的稳定性	(116)
§ 3.5 谐振腔的衍射积分方程	(122)
§ 3.6 共焦腔衍射积分方程及其解	(126)
§ 3.7 共焦腔的行波场	(136)

§ 3.8	一般稳定球面腔的模式特征	(141)
§ 3.9	横模选择	(147)
	习题	(151)
第四章	高斯光束	(155)
§ 4.1	高斯光束表达式的导出及特征参量	(155)
§ 4.2	高斯光束的传输、薄透镜变换、ABCD 定律	(161)
§ 4.3	高斯光束的聚焦	(167)
§ 4.4	高斯光束的准直	(171)
§ 4.5	高斯光束的匹配	(174)
§ 4.6	M^2 光束衍射倍率因子	(176)
§ 4.7	高斯光束强度的均匀化	(179)
	习题	(181)
第五章	连续激光器稳态工作特性	(183)
§ 5.1	激光器的速率方程	(183)
§ 5.2	均匀加宽情况的增益饱和	(187)
§ 5.3	非均匀加宽、综合加宽情况下的增益饱和和效应	(192)
§ 5.4	振荡阈值及阈值附近激光功率的变化	(197)
§ 5.5	均匀加宽连续激光器的稳态工作特性	(202)
§ 5.6	非均匀加宽连续激光器的稳态工作特性	(208)
§ 5.7	激光的线宽极限	(213)
§ 5.8	模牵引效应	(216)
§ 5.9	纵模选择	(220)
§ 5.10	激光器的稳频	(224)
	习题	(229)
第六章	脉冲激光器的工作特性	(232)
§ 6.1	关于脉冲激光器的两个基本问题	(232)
§ 6.2	脉冲自由运转激光器	(237)
§ 6.3	调 Q 激光器	(251)
§ 6.4	脉冲放大器	(271)
§ 6.5	锁模激光器原理	(286)
	习题	(292)
第七章	典型激光器的工作原理	(294)
§ 7.1	固体激光器的结构和抽运方式	(294)
§ 7.2	固体激光器工作物质的基质材料和激活离子	(296)

§ 7.3 红宝石	(303)
§ 7.4 钕激光器	(306)
§ 7.5 钛蓝宝石	(317)
§ 7.6 气体激光器	(321)
§ 7.7 染料激光器	(335)
§ 7.8 半导体激光器	(338)
习题	(345)
主要参考文献	(346)

第一章 辐射场与物质的相互作用

辐射场与物质的相互作用，特别是共振相互作用方面所取得的丰硕研究成果，为激光器的问世和发展奠定了物理基础。本章首先介绍电磁场在均匀各向同性介质中的传播、空腔电磁场的模、辐射的经典理论、量子力学理论等，最后介绍在窄带光激发情况下必须要考虑的谱线的线型函数和各种加宽机理。

§ 1.1 均匀各向同性介质中电磁场的传播

本节从麦克斯韦方程组和物质方程出发，导出电磁场在均匀各向同性介质中传播的波动方程，并讨论电磁场频率与介质的共振频率一致和不一致时的两种情况。

1.1.1 均匀各向同性介质中的波动方程

我们采用 SI 单位制，这时麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.4)$$

式中 \mathbf{E} 为电场矢量， \mathbf{H} 为磁场矢量， \mathbf{D} 为电位移矢量， \mathbf{B} 为磁感应强度（磁位移矢量）， ρ 为自由电荷密度。相应的物质方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.1.7)$$

且以 (1.1.5) 式和 (1.1.6) 式可得

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) \quad (1.1.8)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_M) \quad (1.1.9)$$

式中 \mathbf{j} 为自由电荷电流密度, \mathbf{P} 为介质极化强度矢量, \mathbf{M} 为介质磁化强度矢量, ϵ_0 为真空中的介电常数, μ_0 为真空中的磁导率, ϵ 为介质介电常数, μ 为介质磁导率, χ 为极化率, χ_M 为磁化率, σ 为介质导电率。

对均匀各向同性光学介质, $\rho = 0$, ϵ , μ 和 σ 均为标量, 且在各点和各个方向都相同。

为了导出均匀各向同性介质中的波动方程, 可由 (1.1.2) 和 (1.1.6) 两式得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (1.1.10)$$

再将 (1.1.1) 式代入上式得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} \quad (1.1.11)$$

考虑到物质方程 (1.1.5) 和 (1.1.7), 有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (1.1.12)$$

利用矢量公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

和

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.13)$$

这就是均匀各向同性光学介质中的波动方程。特别在真空中, $\sigma = 0$ 。由关系式 (1.1.8) 和 (1.1.9) 知, 磁导率和介电常数 μ , ϵ , 由真空中的磁导率和介电常数 μ_0 , ϵ_0 代替, 于是有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.14a)$$

或者

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.14b)$$

磁场矢量 \mathbf{H} 也满足同一形式的波动方程, 并且可以证明单色平面波、均匀球面波以及高斯球面波 (高斯光束) 均是波动方程 (1.1.14a) 和 (1.1.14b) 的解。

以上推导波动方程的过程中, 未涉及伴随电磁场传播可能发生的共振吸收 (共振吸收时, 极化率 χ 不再是常数, 而与入射电磁场频率有关) 及非线性效

应。

下面我们讨论单色平面波在介质中的传播。单色平面波可表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (1.1.15)$$

其中 \mathbf{E}_0 是振幅矢量, \mathbf{k} 是波矢, \mathbf{r} 是空间位置矢量。将上式代入 (1.1.13) 式, 并对 t 求导, 得

$$\nabla^2 \mathbf{E} + i\mu\sigma\omega \mathbf{E} + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.16)$$

令

$$\mathbf{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \quad (1.1.17)$$

得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \mathbf{k}^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.18)$$

这就是均匀各向同性介质中单色平面波所满足的波动方程, 亥姆霍兹方程的表达式。其中复波矢 \mathbf{k} 的实部表示电磁波在介质中的传播速度为 $c/\eta = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, η 是介质的折射率; 其虚部表示由于介质的损耗 σ , 使电磁波在传播过程中的衰减。

1.1.2 电磁场在非共振介质中的传播

在入射电磁场的频率与介质的共振频率不一致的情况下, 可以不考虑介质对电磁场的共振吸收问题。另外如果不存在非线性效应, 那么电磁场与介质的相互作用为, 电磁场对介质电 (或磁) 偶极矩做功, 转变为介质的极化能 (或磁化能)。

讨论这一问题的思路是, 考虑一个表面积为 S , 体积为 V , 其内部充满均匀各向同性光学介质的孤立系统, 这时将有能量守恒成立。将 (1.1.5) 式和 (1.1.6) 式代入 (1.1.1) 式和 (1.1.2) 式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \quad (1.1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.1.20)$$

将上两式分别与 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 作标积, 并利用公式

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1.21)$$

得

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (1.1.22)$$

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (1.1.23)$$

两式相减并利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.1.24)$$

可得

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (1.1.25)$$

将上式对体积 V 积分, 并应用高斯定理

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (1.1.26)$$

式中 \mathbf{A} 是任一矢量函数, \mathbf{n} 是包围体积 V 的表面 S 的法向单位矢量, dV , ds 分别为体积元和面积元。结果得到

$$\begin{aligned} -\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV &= -\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_V \left[\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right] dV \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

显然, $-\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds$ 表示外界电磁场通过表面 S 流进体积 V 的总功率, 右边第一项表示消耗在运动电荷上的功率, 第二、三项表示真空电磁场储藏的能量的增长率, 其中

$$\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} = \rho \quad (1.1.28)$$

是真空中电磁场能量密度。第五项是电磁场对磁偶极矩做的功。第四项是电磁场对电偶极矩做的功, 这是在处理光与物质的相互作用问题中特别关心的一项。

在非共振情况下, 且不存在诸如热损耗等因素时, 介质的损耗为零, 此时介质的宏观极化强度矢量为

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.1.29)$$

式中 χ 是实数。介质的磁化强度矢量为

$$\mathbf{M} = \chi_M \mathbf{H} \quad (1.1.30)$$

χ_M 也是实数。由以上两式可得到场对单位体积中电偶极矩和磁偶极矩所做的功为

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 \chi}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \quad (1.1.31)$$

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} &= \chi_0 \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \chi_M \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\end{aligned}\quad (1.1.32)$$

上面两式分别代表介质的极化能和磁化能，通常它们也被视为电磁场能量的一部分。这时介质中的电磁能量密度为

$$\rho(v) = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.1.33)$$

由(1.1.25), (1.1.28)和(1.1.32)式可得不存在其他损耗时电磁场能量守恒表达式为

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (1.1.34)$$

式中 \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 由 (1.1.5) 和 (1.1.6) 式表示。

1.1.3 电磁场在共振介质中的传播

当入射电磁场的频率和介质的共振频率一致时，将会产生共振吸收(或增益)，以后将会看到，激光产生以及激光与物质相互作用都会涉及到场和介质的这种共振作用。在共振吸收的情况下，场对电偶极矩做功不会全部转化为极化能，其中相当大的部分将被介质吸收而转化为热能和光能。这时，介质的极化率不能用一个实数表示，而要用复数来表示为

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \quad (1.1.35)$$

极化率的实部和虚部分别表示介质对电磁场的色散和吸收，其详细讨论将在 § 1.4 中进行。这里我们仅讨论偶极功耗的问题。

电磁场对单位体积中电偶极矩所做的平均功率为

$$\frac{\bar{P}}{V} = \overline{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} \quad (1.1.36)$$

式中横线表示对时间取平均。设入射场为单色场，极化的方向与电场方向平行，这样将矢量问题化为标量运算。入射场和宏观极化强度分别为

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}e^{i\omega t}] \quad (1.1.37)$$

$$\mathbf{P}(t) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{P}}e^{i\omega t}] \quad (1.1.38)$$

式中 $\tilde{\mathbf{E}}$ 和 $\tilde{\mathbf{P}}$ 是复振幅，且有 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}$ ，将 (1.1.37) 和 (1.1.38) 两式代入 (1.1.36) 式，可得

$$\frac{\bar{P}}{V} = \overline{\text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}e^{i\omega t}] \text{Re}[i\omega \tilde{\mathbf{P}}e^{i\omega t}]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[i\omega\epsilon_0\chi(\omega)\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*] \\
 &= \frac{1}{2}\omega\epsilon_0|\mathbf{E}|^2 \operatorname{Re}[i\chi(\omega)]
 \end{aligned} \tag{1.1.39}$$

利用 (1.1.35) 式将 $\chi(\omega)$ 分为实部和虚部, 则得

$$\bar{P} = -\frac{1}{2}\omega\epsilon_0\chi''(\omega)|\mathbf{E}|^2 \tag{1.1.40}$$

从上式可见, 当 $\chi''(\omega) > 0$, 说明场对偶极矩做正功, 即介质对场有共振吸收; 当 $\chi''(\omega) < 0$, 场对电偶极矩做负功, 说明介质对场有放大作用。关于介质对场的吸收和色散的详细讨论将在 § 1.4 中进行。

§ 1.2 空腔电磁场的模式

空腔电磁场的“模式”, 或称“波型”(简称腔模), 它对光学谐振腔分析、激光模式和激光特性的理解是一个重要的物理概念。本节我们从波动方程出发给出腔模概念、模密度表达式和每个模的平均能量及普朗克公式。

为深入理解, 我们首先考虑电磁场在无边界的自由空间中的传播的情况。由上节讨论可知, 在均匀各向同性介质中, 电磁场的波动方程即为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

如果介质对场的损耗为零, 即 $\sigma=0$, 则得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2.1a}$$

或者

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2.1b}$$

我们也可以写出有关磁场矢量的表达式。它们表示电磁场的振动状态, 依赖于电场和磁场在变化时的相互激发, 而以有限速度 $v=1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 在介质中传播。对方程(1.2.1), 沿某一方向传播的单色平面波是它的一个特解, 表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \tag{1.2.2}$$

其中 \mathbf{E} 是振幅矢量, \mathbf{r} 是空间位置矢量, \mathbf{k} 是波矢。对单色平面波, 波矢 \mathbf{k} 是它的特征矢量, 它反映了该单色平面波的传播方向和频率, 或者说单色平面波是以 \mathbf{k} 为标志。波动方程 (1.2.1) 的通解, 可以表示为一系列特解的线性叠加。

在物理上,意味着在均匀各向同性介质中,任意电磁场可以用各种可能传播方向的单色平面波叠加来表示,即在自由空间中具有任意 k 的单色平面波都可以存在。

与自由空间情况不同,电磁场在腔内的传播受到边界条件的限制,为方便,考虑一个具有理想导电壁的矩形腔,如图 1.2.1 所示,其长、宽、高分别为 l , $2a$ 和 $2b$, 并且腔内充满均匀各向同性介质。

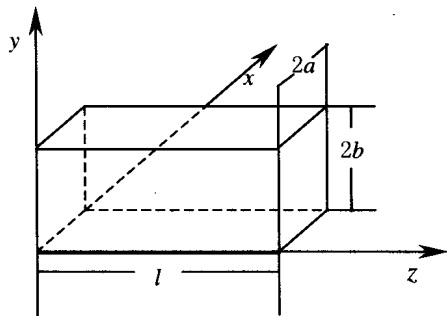


图 1.2.1 方形腔,腔壁是温度为 T 的理想导体

根据麦克斯韦方程,腔内电场应满足波动方程 (1.2.1) 和

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.3)$$

另外在腔壁上,场必须满足边界条件

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad (1.2.4)$$

其中 \mathbf{n} 是所考虑腔壁法向矢量。该式的物理意义是,在腔壁上电场的切向分量必须为零。

我们用分离变量法求解空腔中电磁场的波动方程。令

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)A(t) \quad (1.2.5)$$

将 (1.2.5) 式代入 (1.2.1) 式, 则得

$$\nabla^2 \mathbf{E}(x, y, z) + k^2 \mathbf{E}(x, y, z) = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + (kv)^2 A(t) = 0 \quad (1.2.7)$$

显然这里的 (1.2.6) 式就是上节的 (1.1.18) 式。方程 (1.2.7) 的通解为

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (1.2.8)$$

其中 A 和 ϕ 是任意常数。 $\omega = kv = k/\sqrt{\mu\epsilon}$, 这时可看出 (1.2.5) 式的物理意义, $A(t)$ 表示各点按同一方式随时间振动, $\mathbf{E}(x, y, z)$ 表示各处振幅不一。这正是驻波的特征。我们把形如 (1.2.5) 式的解, 称为空腔的模式。有时也称为腔内电磁场的驻波模。

对于空间部分 $\mathbf{E}(x, y, z)$, 仍采用分离变量法求解波动方程 (1.2.6)。令

$$E_i(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (1.2.9)$$

式中 $i=x, y, z$, 则有

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \quad (1.2.10)$$

方程(1.2.10)成立的条件是左方每一项都等于一个常数, 令

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -k_z^2 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

则有下列式成立

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (1.2.12)$$

解方程(1.2.11), 则腔内电场矢量的任一坐标分量可以表示为

$$\begin{aligned} E_i(x, y, z) &= (a_1 \cos k_x x + a_2 \sin k_x x) \\ &\times (b_1 \cos k_y y + b_2 \sin k_y y) \times (c_1 \cos k_z z + c_2 \sin k_z z) \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

考虑到边界条件(1.2.4)式, 对矩形腔, 边界条件可表示为

$$E_y = E_z = 0 \text{ (在 } x=0 \text{ 和 } 2a \text{ 面上)}$$

$$E_z = E_x = 0 \text{ (在 } y=0 \text{ 和 } 2b \text{ 面上)}$$

$$E_x = E_y = 0 \text{ (在 } z=0 \text{ 和 } l \text{ 面上)}$$

将边界条件代入(1.2.13)式, 则对任意的 E_{0x} , E_{0y} , E_{0z} , 满足波动方程(1.2.6)的表达式为

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y &= E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z &= E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

式中

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\pi}{2a} m & m &= 0, 1, 2, \dots \\ k_y &= \frac{\pi}{2b} n & n &= 0, 1, 2, \dots \\ k_z &= \frac{\pi}{l} q & q &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

其中 m , n , q 是任意的正整数, 它们表示驻波模在沿 x , y , z 方向上分别具有的节点数目。对于确定的 m , n 和 q 值, k_x , k_y , k_z 值也就确定。而根据 $\omega = kv =$