严格按照《2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写

基础知识理解与运用是考查重点

2005年

全国硕士研究生入学统一考试

经济类

数学

模拟自测试卷及解答

教育部考试中心《中国考试》杂志社 组编

东方龙文化 —考研系列

朝華出版社

严格按照《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写

基础知识理解与运用是考查重点

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

经济类

数　学

模拟自测试卷及解答

教育部考试中心《中国考试》杂志社　组编

朝华出版社

图书在版编目(CIP)数据

2005年全国硕士研究生入学统一考试经济类数学模拟自测试卷及解答/
教育部考试中心《中国考试》杂志社组编.—北京:朝华出版社,2004.8
ISBN 7—5054—1042—3

Ⅰ.2... Ⅱ.教... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.F224.0—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第075953号

2005年全国硕士研究生入学统一考试经济类数学模拟自测试卷及解答

组　　编 教育部考试中心《中国考试》杂志社
策划编辑 田　辉　谭隆全
责任编辑 马　艳
责任印制 赵　岭
封面设计 东　方

出版发行 朝华出版社
地　　址 北京市车公庄西路35号　　**邮政编码** 100044
电　　话 (010)68433166/62263982/62268370(总编室)
(010)68413840/68433213/62261657/62268982(发行部)
传　　真 (010)88415258/62267739(发行部)
印　　刷 北京建工印刷厂
经　　销 全国新华书店
开　　本 787×1092毫米　1/16　　**字　　数** 380千字
印　　张 15.5
版　　次 2004年8月第1版第1次印刷
装　　别 平
书　　号 ISBN 7—5054—1042—3/G·0477
定　　价 22.00元

目 录

2005年全国硕士研究生入学统一考试
经济类数学三模拟自测试卷(一)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上.)

(1) 已知 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{x^2} - 1$,则 $\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x =$ ______.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t}{(1-2\cos x)\cdot\ln(1+x^2)} =$ ______.

(3) 设函数 $y = y(x)$ 满足 $xy'(x) = \sqrt{1-x^2}$,且 $y(1) = 0$,则 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x =$ ______.

(4) 已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,且满足关系式 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{ABA} + 2\boldsymbol{A}^2$,则 $\boldsymbol{B} =$ ______.

(5) 设 X 是在 $[0,1]$ 上取值的连续型随机变量,且 $P\{X \leqslant 0.29\} = 0.75$,如果 $Y = 1 - X$,有 $P\{Y \leqslant k\} = 0.25$,则 $k =$ ______.

(6) 在长为 a 的线段上任取两点,则两点间的距离的数学期望为______.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设 $f(x)$ 是奇函数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$,则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线平行于 x 轴.

(D) $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线不平行于 x 轴. [ ]

(8) 设函数 $f(x)$ 处处可导,且有 $f'(0) = 1$,并对任何实数 x 和 h 恒有 $f(x+h) = f(h) + 2hx$,则 $f'(x)$ 等于

(A) $2x+1$. (B) $x+1$. (C) x. (D) e^x. [ ]

(9) 设 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1, y > 0$;$D_1: x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$,则

(A) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(B) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $\iint\limits_D |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(D) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[ ]

(10) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-8,8]$，则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径及 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$ 收敛域分别为

(A) $8,(-2,2]$.　　(B) $8,[-2,2]$.

(C) 不定，$(-2,2]$.　　(D) $8,[-2,2)$.　　[　　]

(11) 下列极限存在的是

(A) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} \arctan \frac{1}{x}$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \arctan \frac{1}{x}$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|} \arctan \frac{1}{|x|}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \arctan \frac{1}{x}$.　　[　　]

(12) 设 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}_1^m \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_2^n = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$，则 m,n 的取值应为

(A) $m=3,n=2$.　　(B) $m=3,n=5$.

(C) $m=2,n=3$.　　(D) $m=2,n=2$.　　[　　]

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量，则下列各组中为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

[　　]

(14) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 是一个偶函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则对任意实数 $x \in \mathbf{R}$，有 $F(-x)+F(x)$ 等于

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) -1.　　[　　]

三、解答题（本题 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 9 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y = \left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

(16)（本题满分 8 分）

某工厂生产两种产品 Ⅰ 和 Ⅱ，出售单价分别为 10 元和 9 元，设生产 x 单位的产品 Ⅰ 与生产 y 单位的产品 Ⅱ 的总费用是 $400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)$（元），问两种产品的产量各为多少时，取得的利润最大？其最大利润为多少？

(17)(本题满分 9 分)

若 $f(x)$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上处处有定义,不恒为零,$f'(0)$ 存在,且对任何 x,y,恒有等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 成立,求 $f(x)$.

(18)(本题满分 8 分)

设函数 $g(x)$ 处处连续,且 $g(1)=5,\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=2$. 又 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\mathrm{d}t$. 证明:$f'(x)=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t$,并计算 $f''(1)$ 与 $f'''(1)$.

(19)(本题满分 8 分)

设在 $[a,b]$ 上,$f(x)>0$ 且可导,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$.

(20)(本题满分 13 分)

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系,$\boldsymbol{B}$ 为 r 阶非奇异矩阵(可逆矩阵). 证明:$\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组的一个基础解系.

(21)(本题满分 13 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$ 的特征值有重根，判断 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化，说明理由.

(22)(本题满分 13 分)

设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，并定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生}.\end{cases}$$

证明：若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立.

(23)(本题满分 13 分)

设总体 X 服从$[0,\theta]$上的均匀分布，θ 未知($\theta>0$)，(X_1,X_2,X_3) 是取自 X 的一个样本.

(Ⅰ) 试证 $\hat{\theta}_1=\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i,\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 都是 θ 的无偏估计；

(Ⅱ) 上述两个估计中哪个方差最小?

2005年全国硕士研究生入学统一考试
经济类数学三模拟自测试卷(一)答案及解析

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) $\frac{1}{4}(7e^4+1)$

[解析]

由题设$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = e^{x^2}-1$,有 $f(x)=2xe^{x^2}$,且

$$\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x \xlongequal{2x=t} \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{4}(7e^4+1).$$

(2) $-\frac{1}{2}$

[解析]

$$\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 \sin u\cdot(-\mathrm{d}u) = \int_0^x \sin u\mathrm{d}u,$$

且当$x\to 0$时,$1-2\cos x\to -1$,$\ln(1+x^2)\sim x^2$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t}{(1-2\cos x)\cdot\ln(1+x^2)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin u\mathrm{d}u}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(3) $-\frac{\pi}{4}$

[解析]

根据题设$xy'(x)=\sqrt{1-x^2}$及$y(1)=0$,由分部积分法,有

$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x = xy(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xy'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

[注]本题若先求出$y(x)$的表达式,再代入计算定积分,则计算过程将变得十分复杂.

(4) $-6\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

[解析]

等式$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{ABA}+2\boldsymbol{A}^2$两边同时左乘$\boldsymbol{A}^*$,得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{ABA}+2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})=-3\boldsymbol{BA}-6\boldsymbol{A},$$

即 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A})=-6\boldsymbol{A}.$

从而 $\boldsymbol{B}=-6\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A})^{-1}=-6\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&0\\-\frac{3}{2}&1&0\\\frac{3}{20}&-\frac{3}{20}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{20}&\frac{1}{20}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$.

(5) 0.71

[解析]

设 X 的分布函数为 $F(x)$,于是

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-X\leqslant y\}=P\{X\geqslant 1-y\}=1-P\{X<1-y\}$$
$$=1-F(1-y).$$

欲使 $P\{Y\leqslant k\}=0.25$,即有 $F_Y(k)=1-F(1-k)=0.25$,即 $F(1-k)=0.75$.

由于 $F(0.29)=0.75$,所以可取 $1-k=0.29$,从而 $k=0.71$.

(6) $\frac{a}{3}$

[解析]

把线段置于数轴上,使它与区间$[0,a]$重合,设 X,Y 分别表示任取两点的坐标,则 X 与 Y 相互独立,且都在$[0,a]$上服从均匀分布,故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是两点间距离 $|X-Y|$ 的数学期望为

$$E(|X-Y|)=\int_0^a\int_0^a|x-y|\cdot\frac{1}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{a^2}\left[\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y+\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a(y-x)\mathrm{d}y\right]=\frac{a}{3}.$$

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.)

(7) 应选(C)

[解析]

由题设有 $f(0)=0$,于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$,

可见 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线平行于 x 轴,所以应选(C).

(8) 应选(A)

[解析]

取 $x=0$,则有 $f(h)=f(0)+f(h)$,得 $f(0)=0$.

又 $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$,

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2hx}{h}=1+2x,$$

故选(A).

(9) 应选(C)

[解析]

积分区域 D 关于 y 轴对称,而被积函数 $|x|$ 关于 x 为偶函数,故

$$\iint\limits_D |x| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} |x| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以应选(C).

(10) 应选(A)

[解析]

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是$(-8,8]$可知,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 8,从而幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 的收敛半径也是 8,又因幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 两次逐项求导所得,由幂级数的分析性质,幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径是 8,对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$,有收敛域 $-8 < x^3 \leqslant 8$ 即 $-2 < x \leqslant 2$.

(11) 应选(A)

[解析]

对四个选项中的函数分别求左、右极限.(A) 中,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}\cdot\arctan\frac{1}{x} = -1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\arctan\frac{1}{x} = 1\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}\arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

(B)、(C)、(D) 中左、右极限均存在但不相等,从而其极限不存在.应选(A).

(12) 应选(B)

[解析]

注意 $\boldsymbol{P}_1^2 = \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2^2 = \boldsymbol{P}_2$,所以 $\boldsymbol{P}_1^3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^5 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$.

可见(B) 为正确答案.

(13) 应选(C)

[解析]

由题设,每组向量均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解向量,只需找出一组线性无关的向量即可.对于(A)、(B)、(D) 有

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + 1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) + 1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{0},$$

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + 1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + (-1)\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0},$$

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + 1\cdot(3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + 1\cdot(-\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0},$$

即(A)、(B)、(D) 中三组向量均线性相关,而由定义易证(C) 中向量组线性无关,故正确答案

为(C).

(14) 应选(B)

[解析]

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{s=-t} \int_{+\infty}^{-x}f(-s)\mathrm{d}(-s)=-\int_{+\infty}^{-x}f(s)\mathrm{d}s=\int_{-x}^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s,$$

$$F(-x)+F(x)=\int_{-\infty}^{-x}f(s)\mathrm{d}s+\int_{-x}^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s=1.$$

可见应选(B).

三、(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)[证明]

因为$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a$.

设 $D_1:0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a;D_2:0\leqslant y\leqslant a,y\leqslant x\leqslant a$,则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y+\int_0^a f(y)\mathrm{d}y\int_y^a f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$

(16)[解析]

设 $L(x,y)$ 表示产品 Ⅰ 与产品 Ⅱ 分别生产 x 单位与 y 单位时所得的总利润,因为总利润等于总收入减去总费用,所以

$$\begin{aligned}L(x,y)&=(10x+9y)-[400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)]\\&=8x+6y-400-0.01(3x^2+xy+3y^2)(x>0,y>0).\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases}L_x'=8-0.01(6x+y)=0,\\L_y'=6-0.01(x+6y)=0,\end{cases}$$

得区域 $x>0,y>0$ 内的惟一驻点(120,80).由于问题确有最大值,所以当 $x=120,y=80$ 时,有最大值 $L(120,80)=320$(元).

(17)[解析]

在 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 中令 $y=0$,有 $f(x)=f(x)f(0)$,由 x 的任意性知,$f(0)=1$.

因为 $f'(0)$ 存在,故

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}.$$

又 $$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0),\end{aligned}$$

即有$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=f'(0)\mathrm{d}x$.

两边积分得 $\ln f(x)-\ln C=f'(0)x$,$f(x)=Ce^{f'(0)x}$.

由于 $f(0)=1$,得 $C=1$. 故所求函数为 $f(x)=e^{f'(0)x}$.

(18)[解析]

$$\text{因为 } f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x(x^2-2tx+t^2)g(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x t^2g(t)\mathrm{d}t,$$

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x^2g(x)-\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t-x^2g(x)+\frac{1}{2}x^2g(x)$$

$$=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t,$$

$$f''(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t,$$

$$f'''(x)=g(x),$$

故 $f''(1)=\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=2$,$f'''(1)=g(1)=5$.

(19)[证明]

设 $F(x)=\ln f(x)$,由 $f(x)>0$ 知 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,由拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)\text{ 即 }\ln f(b)-\ln f(a)=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a),$$

亦即 $\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$.

(20)[证明]

令 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times r$ 矩阵,它的列向量记为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$,$\boldsymbol{AB}$ 的列向量记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r)\boldsymbol{B}. \qquad (*)$$

可见,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 线性表出,若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 为某一齐次线性方程组的解,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是该齐次线性方程组的解.

又因 $\boldsymbol{B}$ 可逆,故由(*)可得

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{B}^{-1}.$$

可见 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 等价.

而 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 为某一齐次线性方程组的基础解系,线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关,且每个解向量可由它线性表示,从而为该齐次线性方程组的一个基础解系.

(21)[解析]

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+10+a).$$

若 $\lambda=2$ 是重根,则 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 中含有 $\lambda-2$ 的因式,于是 $2^2-8\times2+10+a=0$,得 $a=$

2，此时 $\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

因为 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}=1$，

可见 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 有两个线性无关的特征向量，因此 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

若 $\lambda=2$ 不是重根，则 $\lambda^2-8\lambda+10+a=0$ 有重根，从而 $8^2-4(10+a)=0$，得 $a=6$，$\lambda=4$(二重根).

由于 $\mathrm{r}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}3&-6&3\\1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}=2\neq 1$，

故 $a=6$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

(22)[**证明**]

只需证明对于(X,Y) 的一切可能值(x_i,y_j)，$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$，$(i,j=1,2)$.

X,Y 的分布律分别为

X	0	1
P_i	$1-P(A)$	$P(A)$

Y	0	1
P_j	$1-P(B)$	$P(B)$

XY 的分布律为

XY	0	1
P_k	$1-P(AB)$	$P(AB)$

于是有 $E(X)=P(A),E(Y)=P(B),E(XY)=P(AB)$.

由 $\rho_{XY}=0$ 推出 $E(XY)=E(X)E(Y)$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A,B 相互独立，即 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 从而有

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

类似地可推出

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

因此 X 与 Y 相互独立.

(23)[**证明**]

(Ⅰ)设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，则

$$F(x)=\begin{cases}1, & x>\theta,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x\leqslant\theta,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

令 $Y=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i,Z=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$.

则 Y 的分布函数与分布密度分别为

$$F_Y(x)=[F(x)]^3,\varphi_Y(x,\theta)=\begin{cases}3(\frac{x}{\theta})^2\frac{1}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以 $E(Y)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\theta,E(\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i)=\theta,$

$$E(Z)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x(\theta-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\theta,E(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i)=\theta.$$

所以$\frac{3}{4}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 与 $4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 都是 θ 的无偏估计.

(Ⅱ) 因为 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{3}{\theta}\int_0^\theta x^2(\frac{x}{\theta})^2\mathrm{d}x-(\frac{3}{4}\theta)^2=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^4\mathrm{d}x-\frac{9}{16}\theta^2$

$$=\frac{3}{5}\theta^2-\frac{9}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$

所以 $D(\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i)=\frac{16}{9}D(Y)=\frac{1}{15}\theta^2,$

$$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\frac{3}{\theta}\int_0^\theta x^2(1-\frac{x}{\theta})^2\mathrm{d}x-(\frac{1}{4}\theta)^2$$

$$=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^2(\theta-x)^2\mathrm{d}x-\frac{1}{16}\theta^2=\frac{1}{10}\theta^2-\frac{1}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\theta^2.$$

所以 $D(4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i)=16D(Z)=16\cdot\frac{3}{80}\theta^2=\frac{3}{5}\theta^2.$

从而 $D(\frac{4}{3}Y)<D(4Z)$,即$\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 比 $4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 的方差小.

2005年全国硕士研究生入学统一考试
经济类数学三模拟自测试卷(二)

一、填空题(本题共6小题，每小题4分，满分24分．把答案填在题中横线上．)

(1) 设 $f(x)=\int_0^x \ln(x-t)\,\mathrm{d}t\,(x>0)$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=$ ________.

(2) 差分方程 $2y_{t+1}-y_t=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ 的通解为________.

(3) 设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''+4y'+4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x=$ ________.

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则行列式 $\left|2\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}\right|=$ ________.

(5) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<+\infty$，则 $E[\min(|x|,1)]$ $=$ ________.

(6) 设总体 $X\sim N(\mu,5^2)$，在 $\alpha=0.05$ 的水平上检验 $H_0:\mu=0, H_1:\mu\neq 0$，如果所选取的拒绝域 $R=\{|\overline{X}|\geqslant 1.96\}$，则样本容量 n 至少应为________.

二、选择题(本题共8小题，每小题4分，满分32分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内．)

(7) 设 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上二次可微，且 $f(0)=0, f''(x)>0$，则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在(0,1]上是

(A) 单调增加的.　　(B) 单调减少的.

(C) 有极值的.　　(D) 常数.　　[　　]

(8) 设 $\alpha>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{n^2}\right)\right]$

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 敛散性与 α 有关.　　[　　]

(9) 二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续是偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在的

(A) 必要条件.　　(B) 充分条件.

(C) 充要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.　　[　　]

(10) 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且 $F'(x)=f(x), a\neq 0$，则 $\int_0^1 f(ax)\,\mathrm{d}x=$

(A) $F(1)-F(0)$.　　(B) $F(a)-F(0)$.

(C) $\dfrac{1}{a}[F(a)-F(0)]$.　　(D) $a[F(a)-F(0)]$.　　[　　]

(11) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$