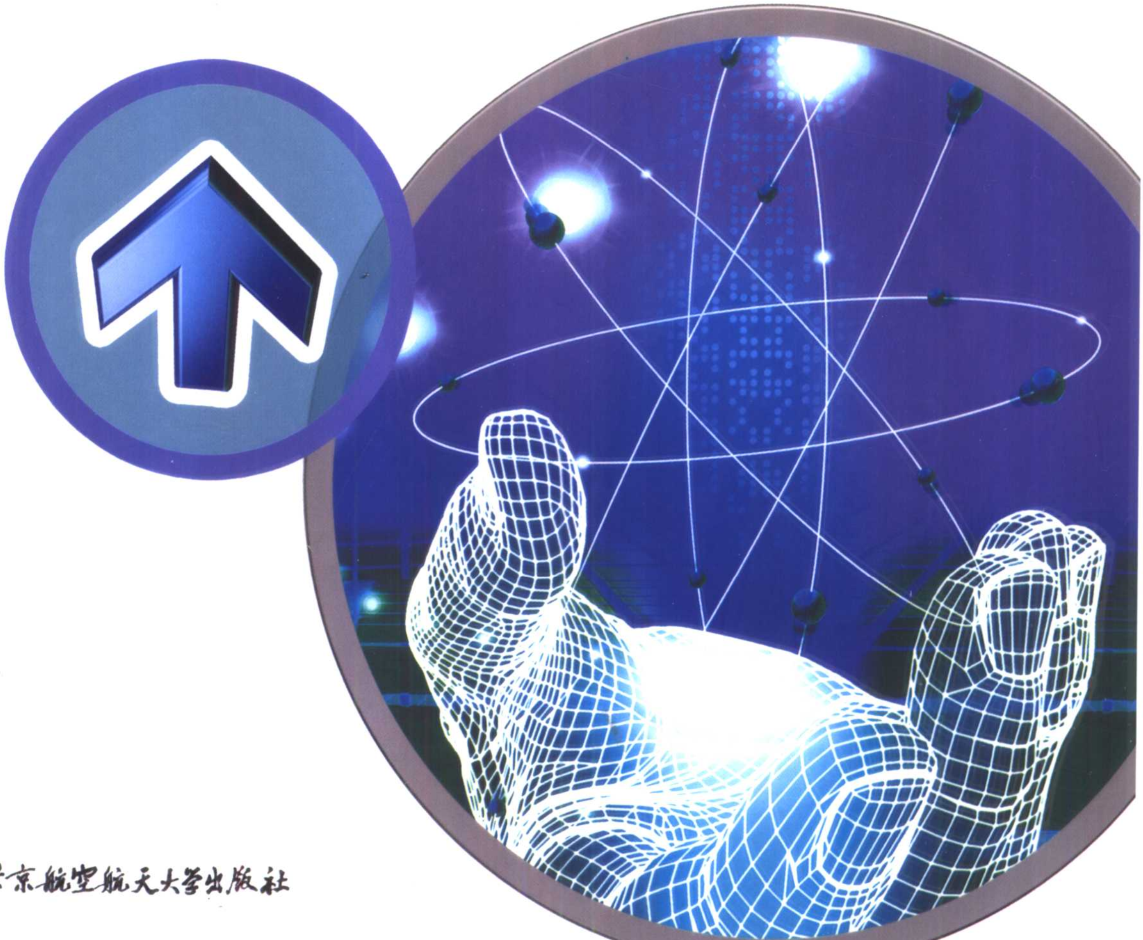
高职高专通用教材

理论力学习题指导与题解

石教兴 石义杰 编著



北京航空航天大学出版社

高职高专通用教材

理论力学习题指导与题解

石教兴　石义杰　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

《理论力学习题指导与题解》是在讲授周衍柏编的《理论力学教程》(第 2 版)的实践中，积 20 余年的经验编写而成。全书分为质点力学、质点组力学、刚体力学、转动参照系和分析力学共 5 章，其内容的编写体系及习题选取与所选用的教材完全配套，不少习题编成一题多解。每一章内容包括基本内容摘要、解题思路与方法和习题解答三部分。

本书可作为综合大学、高等师范院校物理系及高等理工科院校开设理论力学或工程力学课程的教学参考书，也可供工程技术人员、电视大学和函授大学师生们参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学习题指导与题解/石教兴等编著. —北京：北京航空航天大学出版社，2005.1

ISBN 7-81077-581-2

Ⅰ.理… Ⅱ.石… Ⅲ.理论力学—高等学校—解题 Ⅳ.031-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 110346 号

理论力学习题指导与题解

石教兴　石义杰　编著

责任编辑：金友泉

责任校对：陈　坤

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)　发行部电话：010-82317024　传真：010-82328026

http://www.buaapress.com.cn　E-mail:bhpress@263.net

北京时代华都印刷有限公司

*

开本：787×960　1/16　印张：11.75　字数：263 千字

2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷　印数：5 000 册

ISBN 7-81077-581-2　　定价：17.00 元

前　言

理论力学是理工科学生的一门基础理论课，是学生第一次用高等数学方法处理物理问题的一门理论物理课程，也是研究物体机械运动普遍遵循的基本规律的一门学科。学好它，既是学习其他理论物理学科的入门向导，也是近代工程技术的理论基础。

在理论力学教学中，我们发现学生最感困难的是解题。理论力学习题颇多，类型各异，与普通力学相比要抽象和复杂得多。因此有些学生在解题时往往不知如何下手。学生常常反映："概念好懂，题难做"；"公式一大套，做起题来对不上号"。究其原因，主要有以下四种：

其一，是这门学科的抽象、复杂和多变的特点本身所决定的；

其二，解题时可供选择适用的基本概念、基本定理和公式较多，解题思路及方法较活；

其三，是将一个现实的物理问题抽象转化成一个数学问题时有一定的难度；

其四，解题时所需要的数学知识层面较宽较深。

因此，在历届学生中，迫切地希望能有一本与教材相配套的解题思路与题解。本书是与周衍柏先生编著的《理论力学教程》(第 2 版)相配套的习题解，是编者 20 多年来在教学中编著自己所做的习题解，正是应读者的要求而付梓出版的，以期对他们在解题时有所帮助和启发。

全书分为 5 章：质点力学、质点组力学、刚体力学、转动参照系和分析力学。

本书完全与周衍柏先生编著的《理论力学教程》(第 2 版)相配套。每章包括下述 3 部分内容：

(1) 基本内容摘要　简要地介绍每章的基本概念、基本理论和基本公式。

(2) 解题思路与方法　简要地介绍各类习题的解题思路与方法、步骤与技巧，给读者在解题时以启发与帮助。

(3) 习题与解答　对教材中的全部习题进行了详细的解答，并对有些习题附有一题多种解法，举一反三，触类旁通，以期做到多向思维。

本书可供综合大学理科及师范物理教育专业开设理论物理课程的读者使用，也可作为工科院校和其他高校有关专业的教学参考用书；对于从事理论力学教学的同仁及工程技术人员，愿能起到互相切磋、抛砖引玉的作用。

由于水平和时间所限，书中不当和不足之处在所难免，诚恳希望同仁斧正。

此书的付梓出版，得到了校系领导和北京航空航天大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

作　者

2004 年 8 月

目　录

第 1 章　质点力学

1.1　基本内容摘要

1.1.1　运动的描述方法

1. 参照系

描述物体运动时被选作参考的另一物体叫参照系。

2. 运动与静止

相对于参照坐标系而言，运动质点的坐标是时间 t 的函数，如质点坐标为常数，则叫静止。

3. 运动学方程

运动学方程以矢量及坐标两种形式表示。

(1) 矢量形式　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 。

(2) 坐标形式　坐标形式又分直角坐标、平面极坐标和自然坐标：

① 直角坐标　$x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$，$z=f_3(t)$；

② 平面极坐标　$r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$；

③ 自然坐标　$s=f(t)$。

4. 轨　道

运动质点在空间一连串所占据的点形成的连续曲线称轨道，其方程可由上述运动学方程消去 t 而得。

1.1.2　速度与加速度

1. 矢量形式

速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$。

2. 分量形式(平面)

下表所示为各向的速度、加速度公式的表示式。

各　向	速　度	加速度
轴向	$v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$	$a_x=\ddot{x}$, $a_y=\ddot{y}$
径向	$v_r=\dot{r}$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$
横向	$v_\theta=r\dot{\theta}$	$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})$
切向	$v_\tau=\dot{s}$	$a_\tau=\ddot{s}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$
法向	$v_n=0$	$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$

1.1.3 平动参照系

1. 匀速直线运动参照系

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$(绝对速度＝牵连速度＋相对速度)

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$(绝对加速度＝相对加速度)

2. 加速直线运动参照系

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$(绝对速度＝牵连速度＋相对速度)

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'$(绝对加速度＝牵连加速度＋相对加速度)

1.1.4 质点运动微分方程

1. 自由质点

(1) 矢量形式　$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$。

(2) 分量形式　分量形式常用直角坐标、平面极坐标或自然坐标表示：

① 直角坐标　$m\ddot{x}=F_x$, $m\ddot{y}=F_y$, $m\ddot{z}=F_z$;

② 平面极坐标

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r,\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=F_\theta;$$

③ 自然坐标　$m\ddot{s}=F_\tau$, $m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n$。

2. 非自由质点

取消约束，代以约束反作用力，就可以把非自由质点视为自由质点，再和约束方程联立求解。

3. 理想线约束

用下列内禀方程，并用约束方程求 ρ。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\ddot{s}=F_\tau,\ m\frac{v^2}{\rho}=F_n+R_n,\ 0=F_b+R_b$$

1.1.5　非惯性参照系

(1) 牛顿运动定律能成立的参照系叫做惯性参照系。

(2) 牛顿运动定律不能成立的参照系叫做非惯性参照系。

(3) 对非惯性参照系，只要加上适当的惯性力，则牛顿运动定律"仍然"可以成立。

(4) 相对于惯性参照系作加速平动的参照系所要加的惯性力为($-m\boldsymbol{a}_0$)；式中，m 是质点的质量，$\boldsymbol{a}_0$ 是牵连加速度。

1.1.6　功和能

(1) 功——$W=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$，是一个线积分，一般随路径而异，其值也不同。

(2) 能——物体做功的本领，功是能量变化的量度。

(3) 动能——$T=\frac{1}{2}mv^2$；式中，m 是质点的质量，$\boldsymbol{v}$ 是质点运动的速度。

(4) 势能——如 $\boldsymbol{F}=-\nabla V$，则力所做的功与路径无关，只与两端点的位置有关，这种力叫做保守力。在保守力场中，函数 $V(x,y,z)$ 就是质点在 (x,y,z) 点上相对于某一规定零点的势能。

1.1.7　质点动力学的几个基本定理与基本守恒律

1. 动量定理与动量守恒律

(1) 动量＝质量×速度　$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$。

(2) 动量定理　$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}$。

(3) 动量守恒律　$\boldsymbol{F}=0$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}=$恒矢量，或 $\dot{x}=c_1$，$\dot{y}=c_2$，$\dot{z}=c_3$。

2. 动量矩定理与动量矩守恒律

(1) 动量矩

① 对于一点的动量矩　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$。

② 对于一直线的动量矩　先求出对线上任意一点的动量矩，再将其投影到该线上即可，如 $L_Z=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$。

(2) 力矩　$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$。

(3) 动量矩定理　$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(y\dot{z}-z\dot{y})]=yF_z-zF_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(z\dot{x}-x\dot{z})]=zF_x=xF_z$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(x\dot{y}-y\dot{x})]=xF_y-yF_x$$

(4) 动量矩守恒律

当 $\boldsymbol{M}=0$,则 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{c}=$恒矢量,或 $y\dot{z}-z\dot{y}=c_4$, $z\dot{x}-x\dot{z}=c_5$, $x\dot{y}-y\dot{x}=c_6$。

3. 动能定理与机械能守恒律

(1) 动能定理 $T=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

(2) 机械能守恒律——对保守力成立,$T+V=E$。式中,T 为动能,V 为势能,E 为机械能量。

4. 各守恒律的常数

各守恒律都是运动微分方程的第一积分,至于诸常数则由起始条件决定。

1.1.8 有心力

(1) 力心:作用力恒通过的某一定点叫力心。

(2) 一般性质:

① 有心力 $\boldsymbol{F}(r)$是保守力。

② 有心力的动量矩守恒,$mr^2\dot{\theta}=mh$,即 $r^2\dot{\theta}=h=$常数,如为直角坐标系时,则 $x\dot{y}-y\dot{x}=h$。

③ 质点受有心力作用,必在一平面内运动,这时用平面极坐标较为方便。

(3) 轨道微分方程(比耐公式):

$$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m},\quad u=\frac{1}{r}$$

(4) 平方反比引力——行星的运动:

轨道方程呈圆锥曲线,即原点在力心上。用式表示为

$$r=\frac{h^2/k^2}{1+\sqrt{1+2h^2E/k^4m}\cos(\theta-\theta_0)}$$

故偏心率 $e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}(h/k^2)^2}$,以此式与圆锥曲线的标准式相比较,可知 $E<0$, $e<1$ 时,则轨道为椭圆;若 $E=0$, $e=1$ 时,轨道为抛物线;若 $E>0$, $e>1$ 时,轨道为双曲线。

(5) 开普勒定律:

① 行星绕太阳作椭圆运动,太阳位于其中的一个交点上。

② 行星与太阳的连线(矢径),在相等时间内所扫过的面积相等。

③ 行星运行时，周期的平方和轨道的半长轴的立方成正比。

(6) 万有引力定律：该定律可由牛顿定律和开普勒三定律推导而得。

(7) 宇宙速度：

① 第一宇宙速度 $v_1=\sqrt{gr}\approx 7.9\ \text{km/s}$，不能脱离地球而只能绕地球转。

② 第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2gr}\approx 11.2\ \text{km/s}$，这是脱离地球的最小速度。

③ 第三宇宙速度 $v_3\approx 16.7\ \text{km/s}$，这是脱离太阳系的最小速度。

(8) 圆形轨道稳定性的判据：判据公式为 $\dfrac{uP'}{P}<3$。式中 $u=\dfrac{1}{r}$，$P=\dfrac{-F}{m}$，$P'=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u}$。

(9) 平方反比斥力——α 质点的散射：

① 轨道为双曲线的一支，力心在轨道凸的一边，与引力的情形不同。

② 瞄准距离 ρ 和偏转角 φ 之间的关系为 $\rho=\dfrac{k'}{mv_\infty^2}\cot\dfrac{\varphi}{2}$。

③ 卢瑟福公式可用散射截面 $\mathrm{d}\sigma$ 代替 ρ，则

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\left(\frac{k'}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{2\pi\sin\varphi}{\sin^4(\varphi/2)}\mathrm{d}\varphi$$

1.2　解题思路与方法

质点力学这一章主要讨论了两个问题：质点运动学和质点动力学。至于有心力问题，以及所研讨的平方反比引力——行星的运动，和平方反比斥力——α 焦点（粒子）散射问题，则属于质点运动学和质点动力学的综合应用。

一个实际问题的解决，一道题目的求解，首先要判断此题是属于运动学的问题，还是动力学的问题。若题目的已知条件和需要求解的问题，全部是运动学的参量[位移（位矢）、速度、加速度等]，而完全不涉及发生这些运动的原因（力等），那么可以肯定，这类问题就是运动学的问题了；如果题目中不仅涉及物体的运动，而且还涉及到发生这种运动的原因，那么这类问题就属于动力学的问题。这样，通过分析判断，就可以把问题的范围逐步确定、缩小，以至具体化，不致于造成对问题求解一片茫然，无从下手。

1.2.1　质点运动学

(1) 运动学研究物体运动的几何性质，即物体的位置在空间随时间而变化的规律，因此必须对运动、空间和时间有一正确的理解。

运动本身是客观存在的，是绝对的；但描述运动却是相对于一定的参照系来进行的，是相对的。这就是运动的绝对性与描述运动的相对性。

在运动学中，与时间有关的两个概念是瞬时时间 t 和时间间隔 Δt。后者表示某一段时间，

对应于运动的某一过程；前者则表示 $\Delta t \to 0$ 的一瞬间，对应于运动的某一时态。

(2) 在质点运动学中，主要研究三个问题，即速度和加速度、运动规律和运动轨迹。换言之，有三种类型。研究方法有两种：矢量法与坐标法。

第一种类型：已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求 $\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{a}$。

这一类问题，基本上就是按速度、加速度在各种坐标系中的表示式直接计算；运算方法就是将运动规律（或运动方程）对时间 t 求一次导、求二次导，并无特别的难点。但在以下情况下稍有一点变化，即：

① 不直接给出 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的函数式，而只告诉质点的具体运动时。这就需要按题意及根据具体运动情况（特殊、个性）先找出 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的函数式（一般、共性）来，然后再对 t 求导，以求得问题的最后解决。

② 给出 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在某一种坐标系中的表示式，求解 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ 在另一种坐标系中的表示式。例如，已知 $x=x(t)$，$y=y(t)$，要求质点的切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n 诸如此类问题，求解的关键是不同坐标系之间的转换关系或是不同坐标系下的速度和加速度的表示式之间的关系。

第二种类型：已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$，求 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 及 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。

第二类问题是第一类问题的逆问题，既然对于第一类问题的运算方法是对 t 求导，那么对于第二类问题的运算方法就是积分了。有时也要解一些简单的微分方程。若对于已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，那只要用普通的积分便可；而对于 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 这两种情况，则要通过分离变量，进行变量代换后再进行积分。

第三种类型：已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的具体函数，或已知质点运动的具体情况，求质点运动的轨道（迹）及曲率半径 ρ（这一类题目也常和第一、第二类问题结合在一起）。

对于这一类问题，其运算思路及方法是想方设法消去变量时间 t 即可。例如由 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，消去 t，得到轨道方程 $z=f(x,y)$。对于求曲率半径，可直接从公式 $\rho=v^2/a_n$ 中求出，也可直接从 $\rho=\dfrac{1}{|k|}=\left|\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}\right|$ 中求得，式中的 k 为曲线的曲率。

(3) 在求解质点运动学时，可归纳为如下步骤，简称“四步法”：

第一步，弄清题意，明确已知条件（包括隐含条件）和所求的问题。

第二步，选好坐标系。一般来说，是直线运动的采用直角坐标系；是平面曲线运动的采用直角坐标系或极坐标系；是一般空间曲线运动的采用自然坐标系或柱坐标系；是球面运动的采用球面坐标系。当然，坐标系选取的合适或巧妙，会使运算简便，方程形式也简便。对于同一质点的运动，尽管选取的坐标系不同，因而得出的方程形式也不同，但所描述的质点对同一参照系的运动却是相同的。

第三步，根据已知条件进行求导或积分，或消去参量 t 的运算方法。

第四步，利用已知初始条件和边界条件，确定积分常数或讨论计算结果的正确性。

解题时要特别注意：一是要明确质点运动的相对性、瞬时性、矢量性及独立性；二是在理论讨论时，要建立矢量式；采用矢量法，但在解具体问题时，多采用分量式。

上述三类问题，只是对常见的和比较典型的质点运动学问题的一个粗略概括，并不能包含所有的质点运动学问题。同时，对于如何求解，前面也仅提供了一些原则上可以求解的方法，并不一定是最简单的方法。

然而有一点可以肯定，掌握了以上这几类问题的解，对更复杂的问题就比较容易找到解决的途径。例如已知质点运动的加速度 a 求质点运动的轨道，这类题目一看就知道它是第二类问题和第三类问题的结合，这条思路就找到了。当然，有些问题还有一定的技巧性。

总之，对于质点运动学中的种种问题，可以这样认为：如果把时间、位矢、速度、加速度等称为与运动有关的参量，而把轨道、曲率半径、质点到某点的距离等称为几何参量；那么对于质点运动学的问题，就是已知某运动有关的参量与几何参量之间的某种关系，或已知某运动有关的参量与另一些运动有关的参量之间的某种关系，求这些参量之间的另外一些关系。

1.2.2　质点动力学

如果说质点运动学只涉及到质点运动的表面现象，那么，质点动力学则要涉及到质点运动的内在规律，不过两者又有密切的联系。

1. 质点动力学主要内容及其相互关系

质点动力学主要内容包括基本定律和基本定理两大部分，前者为牛顿的三个运动定律，后者为三个定理，即质点的动量定理及动量守恒律、动量矩定理及动量矩守恒律、动能定理及机械能守恒律，简称三定律、三定理。

牛顿的三个运动定律中，第二定律最为重要，因为它给出了力与运动的定量关系；第一定律可以看做是第二定律的推论（也有学者认为第一定律是第二定律的特例，编者不能苟同），因为 $\boldsymbol{F}=0$，$\boldsymbol{a}=0$，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t=0$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$（常矢量）；第三定律明确了所谓力就是物体之间的相互作用，并指出了这几种相互作用的关系，是对某一质点进行受力情况分析的基础。在解决实际问题时，第三定律提供了一个方便，即若不能直接求出某力时，可求其反作用力，再由 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$，推知该力。

这里要特别注意的是，在对某一确定质点进行受力分析时，作用力与反作用力绝对不能相互抵消，因为它们是作用在不同的物体上的；在受力分析时，需要用的是作用在该质点上的作用力，而不是其反作用力。特别是在不止一个质点的情况下，一定要分清什么是作用在要研究的质点上的作用力，什么是反作用力。

牛顿的三个运动定律是整个古典动力学的基础，只限于研究物体的速度远小于光速，即光速 $c=3\times10^5$ km/s，且物体本身的几何尺度远小于其运动尺度的宏观物体的运动。动力学中的定理与规律性的结论，都可根据实践从牛顿定律演绎而来，此即为基本命题与非基本命题之间的关系。换言之，牛顿运动定律是从大量的实践观察总结出来的。

三个定理则是以牛顿三个运动定律为依据，用数学的方法演绎而来。这样，对于三定律、三

定理来说,它们的适用条件和范围,应该是相同的。大家都知道,牛顿第二运动定律的表述形式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 在牛顿的名著《数学的哲学原理》一书中原本就是以 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ 的表述形式出现的。

2. 惯性参照系及其常用的坐标系

牛顿的三个运动定律只适用于惯性参照系。

运用牛顿定律时几种常用的坐标系是:

(1) 固定坐标系　固连在地面上的坐标系;

(2) 匀速直线互平动坐标系　相对于地面做匀速直线平动的坐标系;

(3) 地心坐标系　以地球中心为坐标原点,三根轴分别指向三颗恒星的坐标系;

(4) 日心坐标系　以太阳中心为坐标原点,三根轴分别指向三颗恒星的坐标系。

3. 动力学基本定律问题的分类

动力学基本定律问题可分为三类:

(1) 第一种类型　已知质点的运动情况,求物体给此质点的作用力。简言之,已知 $\boldsymbol{r}$,求 $\boldsymbol{F}$,这称之为第一类问题。

(2) 第二种类型　已知质点受其他物体的作用,求该质点的运动。简言之,已知 $\boldsymbol{F}$,求 $\boldsymbol{r}$,这称之为第二类问题。

(3) 第三种类型　已知质点运动情况的某些要素和它所受的部分力,求其余的力和其余的运动要素。显然这是第一种类型和第二种类型的综合,这称之为第三类问题。

4. 解题思路与解题步骤

解题思路如下:

对于第一类问题,是已知 $\boldsymbol{r}$,求 $\boldsymbol{F}$;对照运动学中的第一类问题是,已知 $\boldsymbol{r}$,求 $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{a}$。由此发现,其解题步骤和思路大体相似,都是将 $\boldsymbol{r}$ 对 t 求二次导数,求出 $\boldsymbol{a}$;所不同的是求出 $\boldsymbol{a}$ 后,再乘以 m,即可得到所求 $\boldsymbol{F}$。因此,这类问题最为简单。

对于第二类问题,显然是第一类问题的逆问题。因有建立微分方程,其运算方法当然是对二阶微分方程组进行积分,因此还需要事先给出初始条件。初始条件就是指在初始瞬时(一般指 $t=0$ 时,但不一定是运动的开始),质点在所选定坐标的初始位置(例如在直角坐标系中的 x_0,y_0,z_0)和初始速度(例如在直角坐标系中的 $\dot{x}_0$,$\dot{y}_0$,$\dot{z}_0$),依此来确定积分常数。

这里的已知力 $\boldsymbol{F}$ 是:

(1) 常力,$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{c}$(常矢量),这类问题较为简单。

(2) 力只是时间的函数,即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$。例如冲击力、受迫振动的干扰力 $F=H\sin\omega t$ 等。解这类问题也较为简单,这是因为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 都是对同一变量 t 的。

(3) 力只是位置的函数,即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$。例如弹性力、万有引力等。求解位置函数的力的运算技巧是分离变量,进行变量代换,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

消去变量 t，代之以 r，与 F 的变量相同，这样就便于积分了。

如遇到方程的形式为二阶常系数线性齐次或非齐次方程，可直接写出其解来。

(4) 力只是速度的函数，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$。例如媒质阻力、粘滞阻力等。求解速度函数的力的运算技巧也是分离变量，进行变量代换。

(5) 力是若干参数的函数，如 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$，但对大多数情况解不出，只有少数情况可求解。

对于第三类问题，由于是第一类和第二类问题的综合，其解题思路当然是前二类问题解题思路的综合，只不过情况更复杂些。不论是由 $\boldsymbol{r}$ 求出 $\boldsymbol{F}$，还是由 $\boldsymbol{F}$ 求出 $\boldsymbol{r}$，不管问题如何变化，只要找出题目中还未求出的量与一些已求出的量之间的内在联系，原则上总可以将这些量求出后，再由它解出问题的最后答案。

不论哪一类问题，基本解题步骤归纳如下，也称“四步法”：

第一步，分析题意，弄清已知力（包括大小、方向）和运动情况，找出未知力和运动情况。

第二步，选好研究对象，画出隔离体图，把研究对象看成一质点，进行受力分析。

正确地画出研究对象的受力图，是分析和解决动力学问题的前提和基础，也是关键。但必须注意以下几点：

① 恰当地选择隔离体　选隔离体时既要注意已知力，又要注意待求的未知力，这样可由已知力求未知力。选隔离体时，必须解除约束，代之以约束反力，把隔离体真正分离出来。

② 画隔离体受力图　画隔离体的受力图时，一般先画出已知的主动力，再画未知的约束反力；画约束反力时，一定要根据约束的类型（或约束的性质）和受力特点来画，并注意到实际工程问题的科学抽象与简化。

③ 隔离体受力图的涵义　隔离体的受力图，顾名思义，要把周围约束物体给隔离体的力画在隔离体上，切不可把隔离体给周围其他物体的力画在隔离体上。

④ 注意内力的画法　当取整体为隔离体时，整体内各物体间的相互作用力为内力且勿画出；当需要拆开整体取其间某物体为隔离体时，内力则以外力的形式出现，当然必须要画。物体间的相互作用力，要遵循牛顿第三定律——作用与反作用定律。

⑤ 注意力的画法　在画受力图时，力（含主动力和约束反力）一个不能多，一个不能少，一个不能错，否则，后面的计算将前功尽弃。

⑥ 注意矢量的画法　在画受力图时，因为力是矢量，若能知其大小和方向的，就标出它的大小和方向；若不知其大小但能判断出方向的，就尽量标出其方向，这对于列出分量式微分方程带来方便。

第三步，选取合适的坐标系，标出运动方向，按分量式列出微分方程式。

坐标系的取法不同，运动微分方程的形式随之不同。即使同一问题，同一坐标系只是坐标轴的方向取法不同，方程的形式也会不同。因此说，一定的坐标的取法，对应于一定的运动微分方程。由于 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 是矢量式，故根据所选取的坐标系，列出其分量式的微分方程式组。

第四步，解方程，用题设的初始条件和边界条件确定积分常数，并对结果进行讨论。

5. 动力学基本原理的分类

动力学基本原理可分为下面 2 种类型：

(1) 动量形式 $\begin{cases}\text{动量定理及其守恒律}\\ \text{动量矩定理及其守恒律；}\end{cases}$

(2) 能量形式 $\begin{cases}\text{动能定理}\\ \text{机械能守恒定律。}\end{cases}$

由于基本定律在质点组动力学中有着更广泛的应用，这里就不作赘述。

需要注意的是：

① 由于牛顿定律使用的是惯性系，故质点动量中的速度一定是指绝对速度。

② 由于三个基本定理可由牛顿基本定律推演而来，故当只需要知道质点的始末状态而不需要了解质点的全过程情况时，应运用三个定理解题。这比运用牛顿运动微分方程解题显得简单些，尤其要充分运用三个守恒律，因为它们是二阶微分方程的第一积分。

1.3 习题与解答

1.1 沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离 d 的时间为 t_1，而通过下一等距离 d 的时间为 t_2。试证明枪弹的减速度(假定是常数)为$\dfrac{2d(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$。

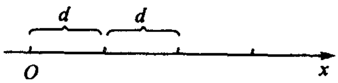


图 1.1

［解］ 如图 1.1 所示，这是匀加速直线运动，且初始条件可选为 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v=v_0$，于是应有

$$d = v_0t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 \tag{1}$$

$$2d = v_0(t_1+t_2) - \frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 \tag{2}$$

式(1)、(2)联立求解，得

$$a = \frac{2d(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)} \tag{3}$$

1.2 某船向东航行，速率为 15 km/h，在正午经过某一灯塔；另一船以同样速率向北航行，在下午 1 时 30 分经过同一灯塔。问在什么时候，两船的距离最近？最近的距离是多少？

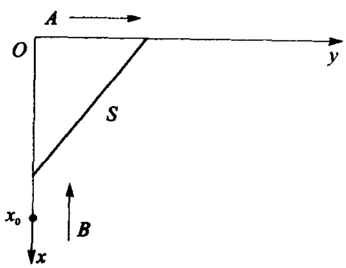


图 1.2

［解］ 如图 1.2 所示，选正午 12 点为 $t=0$，则 A 船、B 船的运动方程分别为

$$y = vt \tag{1}$$

$$x = x_0 - vt = 1.5v - vt \tag{2}$$