第一次全国电子线路专业学术会议论文选集

中国电子学会电子綫路专业委員会編

(內部資料 注意保存)

国防工業出版社

第一次全国电子綫路专业学术会議論文选集

中国电子学会电子綫路专业委員会编

国防工業出版社

1964

内容简介

本論文选集收集了在第一次全国电子綫路专业学术会議上宣讀过的 48 篇論文。这些論文較集中地反映了我国电子綫路方面广大科学技术工作者近年来所取得的成果。本选集按論文的性质分为六部分，第一部分为綜述性論文，綜述了电子綫路的几个重要方面的发展概况。第二部分的論文主要涉及基本理論的工作，例如网絡理論等。其余四部分論文分别涉及振蕩，放大，显示，测試电路等几个方面的問題。

本論文选集可供从事电子綫路方面的科学技术工作者，教学工作者和工程技术人員参考。

第一次全国电子綫路专业学术会議論文选集

中国电子学会电子綫路专业委員会編

*

国防工業出版社 出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第 074 号

国防工业出版社印刷厂印装　　内部发行

*

$787\times1092\ ^{1}/_{16}$　印張$31^{1}/_{2}$　753 千字

1964 年11月第一版　1964 年11月第一次印刷　印数：0,001—2,200册

統一书号：N15034·841　　定价：（科八-2）6.40元

序　言

本論文选集包括了第一次全国电子綫路专业学术会議上所宣讀的絕大部分論文。这次会議是在中国电子学会电子綫路专业委員会主持之下，于1963年9月16日至23日在成都召开的。参加会議的有科学研究部門、生产部門、部队和高等院校等三十八个单位。会議之前和会議期間，收到了論文九十余篇，經初步审查，在会議上共宣讀了六十篇，列为資料交流的共十一篇。在举行学术会議期間，召开了电子綫路专业委員会第一次全体会議，会議决定了出版这次学术会議的論文选集并推选出由七人組成的編輯委員会，初步确定了对論文規格的要求和出版計划。

經过宣讀和討論的論文由原作者进行补充修改之后，由原单位負責审查推荐，再由編輯委員会进行复审，选出了論文四十八篇（其中論文摘要二篇）。

論文选集包括六部分。第一部分是綜述性論文，第二部分是有关綫路理論的論文，第三至第六部分依次为振蕩、放大、显示和測試电路。这样分类是为了讀者查閱方便，但由于有些論文的內容不只涉及一个問題，有些內容也不完全屬于这六項之內，归口之处，也可能不尽恰当。

出版这样的論文选集，对本专业来說，还是初次尝試。我們还缺乏經驗，不妥当之处一定很多。在論文規格和形式上虽然在会議上提出了一个粗略的輪廓，但要求不同作者用同样的風格写出文章是不可能的，也是不必要的。这篇論文与那篇論文在某些具体內容上有重复之处也是难免的。关于使用的名詞，已尽量取得統一，但由于有关綫路的标准名詞尙未頒布，也不宜于强求一致。至于同一物理量在不同論文中采用不同符号，也未予以統一。

在会議期間，与会的全体同志对会議的进行和会后的工作，表現了极大的热情，也給予了大力的支持。由于客观条件，与会人数不能不有所限制。我們深切地希望，这本論文集的出版，对广大的讀者，特别是对原拟参加会議而因故未能列席的同志們，能有一些帮助。

这本論文选集之所以能如期出版，一方面是由于論文的作者們能及时加工修改，准期送到，另一方面也是由于有关单位的大力支持。在这里我們应特别提到中国科学院电子学研究所和国防工业出版社对这一工作的支持。专业委員会編輯組和学术秘书等对本論文选集的組稿、加工等工作付出了大量的劳动。在这里，我們謹对上述单位和同志們表示衷心的謝意。

在成都开会期間，得到当地領导机关的深切关怀和电子学会的大力协助，使会議开得比較成功，也在此順致謝意。

馮秉銓

1964年3月

目　　录

第 一 部 分

綜 述 性 論 文

目　录

第一部分　綜述性論文

振蕩理論的发展概况和动向

馮秉銓

引　言

非綫性振蕩理論近廿年来得到很大的发展；它起源于天体力学，发揚于无綫电电子学，逐漸扩展到其他領域，如自动控制，原子能，乃至生物学甚至社会科学。

列宁在“唯物主义与經驗批判論”一书中曾指出：“自然界的統一在关于各种現象領域的微分方程的‘惊人类似’中显示出来”。用統一語言描述的振蕩理論，不但适用于电子綫路問題，也同样适用于很多其他学科中的問題。

1920 年 Van der Pol[1] 为了說明电子管振蕩器的波形，从研究电子管的非綫性特性开始，导出了 Van der Pol 方程。虽然这一方程和早已提出的 Rayleigh 方程[2] 是彼此互通的（即，从一个可导出另一个），但是，Van der Pol 方程的提出，一般都公认为非綫性振蕩理論的奠基工作。在廿年代后期，A.Liénard 和 W.M.H.Greaves 等在这方面都有較多的貢献。前者发展了 Van der Pol 的理論，后者进一步研究了 Poincaré 天体力学的微分方程，使 Poincaré 早期的工作[3]，对振蕩理論的发展起了很大的作用。

但是，振蕩理論眞正以較快的速度发展，則是在 1930 年左右，这方面的研究中心轉移到苏联以后的十几年。

在苏联主要有两个学派：一个是以莫斯科振动研究所为中心的学派，另一个是以 Крылов，Боголюбов 为首的基輔学派。前者是由著名的物理学家 Л. Мандельштам 創立的，Н.Д.Папалекси，Л.С.Понтрягин，А.А.Андронов，С.Э.Хайкин，А.А.Витт 等都是屬于这一学派。后三人合写的“振动理論”一书，直到現在仍然是这一学科水平較高的經典著作之一。基輔学派发展了漸进法理論，在拟調和振动方面也作出了不少貢献。近年来又形成了高尔基学派。他們的研究工作偏重于振蕩理論在自动控制方面的应用。

对三十到四十年代苏联在振蕩理論方面的发展，資本主义国家的学术界是毫无所知的。直到 1947 年由 N.Minorsky 写出了“非綫性力学引論”一书，介紹了苏联在这方面的成就，此后才引起了美国和西欧各个国家学术界的注意。在美国，以 S.Lefschetz 为首在普林斯頓大学成立了研究中心，陆續出版了“非綫性振蕩論文集”若干册（現出至 5 册）。在这方面工作有成績的有 N.Levinson，M. L. Cartwright，P. LeCorbeiler，K. O. Friederichs，W. Wasow，J. J. Stoker 等。

在德国，法国，日本都有一些力量投入这方面的工作。

*　　*　　*

分析一个系統的振动或振蕩过程，大致可归結为下列几个步驟：

（1）从系統的力学或电学特性写出系統的运动方程；

（2）引入合理的近似条件，設法将运动方程化为在数学形式上有办法求解的微分方程；

（3）用适当的方法，研究該微分方程的性质，特别是，是否有周期性的解；

（4）用某种方法进行求解；

（5）研究解的稳定性；

（6）根据对問題的具体要求，如相位关系，波形等等作出分析。

三十到四十年代的工作主要是研究二阶非綫性微分方程的求解方法以及有解的条件和稳定性問題。到目前，这些問題可以說已經基本上解决了。所謂“某种在数学形式上有办法求解的微分方程”，在目前来說，也就是二阶，最多是三阶非綫性微分方程。

一个自由度的二阶方程可写为

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x}) \tag{1}$$

式中 $f(x,\dot{x})$ 是 x 和 $\dot{x}$ 的非綫性函数。

如所周知，当 $\mu\ll 1$ 时，得到近似正弦振蕩。当 $\mu\gg 1$ 时，得到張弛振蕩。当 μ 旣不甚小也不甚大时，得到的振蕩将介乎正弦与張弛振蕩之間。

对非綫性微分方程求解，一般有两种方法：几何作图法（拓扑法）和近似解析法。前者适合于定性的研究，优点是能看到全貌，缺点是不准确；后者适用于定量的研究，优点是比較准确，缺点是計算繁瑣且往往“只見树木不見森林”。这两种方法是相輔相成的。

非綫性振蕩系統可分为自治系統和非自治系統二种。前一种的微分方程式不明显地包含时間 t，如式（1），后一种則明显地含有 t，如下式（2）：

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x},t) \tag{2}$$

自激振蕩的問題屬于前者，同步問題、次諧共振問題、参量共振問題等則屬于后者。

此外，当出現有“滞后作用”时，例如当系統中含有“延迟綫”时（自动控制系統中，这是很普遍的），就不能用一般非綫性微分方程来处理。此时应采用差微分方程[4]。

上述情况可总結为下表：

序号	問題分类	式（1）或（2）中	振蕩性质	处理方法
1	弱非綫性	$\mu\ll 1$	近似正弦	自治系統用拓扑法或解析法，非自治系統用解析法
2	强非綫性	$\mu\gg 1$	張弛振蕩	用解析法或不連續理論
3	中等非綫性	介乎上列二者之間	非正弦	用近似解析法
4	“滞后”問題			用差微分方程法

本文第一部分将对上表中前三項过去发展的情况作一概括的介紹。第二、三、四部分則簡略地介紹一下近几年来的一般动向。挂一漏万，在所难免。希望得到讀者的指正。

一、处理非綫性振蕩問題的两种基本方法

研究非綫性振蕩的两种基本方法——定性的拓扑法和定量的解析法都是起源于前一世紀 Poincaré 关于天体力学的著作[3]。經过了若干年的补充、发展之后，現在的振蕩理論

又回过头来为天文学和其他学科服务。經典著作的充分利用，各門学科之互通有无，在振蕩理論的发展史上是一个很好的例子。

I. 拓扑法的簡单介紹

(A) 相位平面图及平衡点

設某一系統的运动方程可用下式表示：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=P(x,y)\\ \dot{y}&=Q(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

則系統的运动，即式（3）的解，可由 $x-y$ 座标面上一条曲綫来代表，这一平面称为相位平面，这条积分曲綫上任何一点代表着該瞬时的运动状态，称为相点，相点的軌迹称为相軌，亦称为相位平面图。

式（1）所代表的自治系統，显然是式（3）的一个特殊情況（这里，$y=\dot{x}$），而 Van der Pol 方程

$$\ddot{x}+x+\mu(x^2-1)\dot{x}=0 \tag{4}$$

又是式（1）的特殊情况。

如果在 (x_0,y_0) 一点，$P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$，則在此点上，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{P(x_0,y_0)}{Q(x_0,y_0)}=\dfrac{0}{0}$，此点称为奇异点。数学上的奇异点就是物理上的平衡点。

平衡点可以是稳定的，也可以是不稳的。如果在軌道上相点趋于奇异点，則該点是稳定的平衡点，如果从該点走开，則是不稳的平衡点。例如，当 $t\to\infty$ 时，x 和 y 均 $\to 0$，則原点称为稳节点；如 x，y 均 $\to\infty$，則为不稳节点。除节点外，还有所謂焦点，鞍点和中心点。中心点总是稳的，鞍点总是不稳的，焦点可以是稳的，也可以是不稳的。

(B) 判断平衡点稳或不稳的条件

对于式（1）所描述的系統，式（3）可改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{cx+dy+P_1(x,y)}{ax+by+Q_1(x,y)}$$

式中 P_1 和 Q_1 是二个多項式，其最低阶次等于或大于 2。Poincaré 曾証明[3]，如果 $ad-bc\neq 0$，則上式中 P_1，Q_1 二項可忽略不計。在一般工程問題中，这些条件是容易滿足的。在此情况下，平衡点的性质决定于下列特征方程：

$$S^2+pS+q=0$$

式中，$p=-(a+d)$，$q=ad-be$。S 有两个根：S_1 和 S_2。根据上述稳和不稳的定义，对不同情况进行分析之后，結果可綜合如下表所示。

序号	p	q	S_1	S_2	平衡点为	出現于
1	$p>0$	$p^2/4\geqslant q>0$	$S_1<0$	$S_2<0$	稳节点	非守恒系統
2	$p<0$	$p^2/4\geqslant q>0$	$S_1>0$	$S_2>0$	不稳节点	非守恒系統
3	$p>0$	$q>p^2/4$	$R_e[S_1]<0$	$R_e[S_2]<0$	稳焦点	非守恒系統
4	$p<0$	$q>p^2/4$	$R_e[S_1]>0$	$R_e[S_2]>0$	不稳焦点	非守恒系統
5	$p\gtreqless 0$	$q<0$	二根共軛		鞍点（不稳）	守恒系統或非守恒系統
6	$p=0$	$q>0$			中心点（稳）	守恒系統

（C）极限周

当相点軌迹形成一閉合迴綫时，这一迴綫称为极限周。显然，极限周以外的軌迹描述瞬变过程，极限周本身則代表稳态过程。自激振蕩之能否建立，就要看极限周之是否存在。寻求极限周的問題也就是寻求有无周期解的問題。下面我們指出极限周的几个特性。

（1）每个极限周之內，至少包括一个奇异点，一般是焦点。

（2）极限周可以是稳的，也可以是不稳的，也可以是半稳的。邻近一个不稳焦点之外，只能有一个稳定的或半稳的（內稳外不稳）极限周。邻近一个稳焦点之外，只能有不稳的极限周。

（3）一个焦点之外，可能有一个以上的极限周，但稳与不稳的极限周，只能間隔地出現，两个稳定极限周絕不能相邻而只能相間，这是显而易見的。

（D）极限周存在的条件

有几种方法可用以試探极限周之是否存在：

（1）Bendixon 反条件：如$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$在某一区域內不变号，則在此区域內不可能有极限周存在。

这一条件只能用以証明不存在周期解，而不能用以証明有周期解，且一般只能用于一个自由度的系統。

（2）Poincaré-Bendixon 定理。

設由两条閉合曲綫 C_1 和 C_2 規定一区域 D（图1）。如在 D 的边界上，所有的相軌都通过 C_1 和 C_2 的每一点进入（或离开）D 区，且在 D 区內和边界上均不存在任何奇异点，則在 D 区內至少有一个稳定的（或不稳的）极限周。

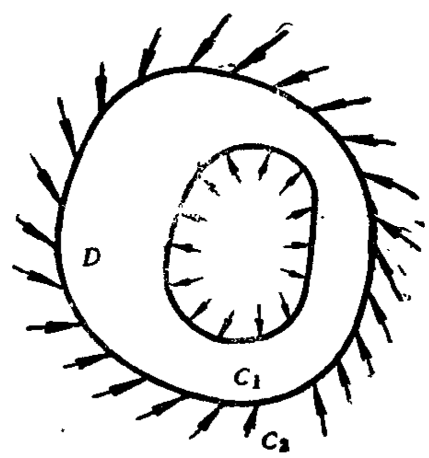

图 1

这一条件用起来并不容易。主要是因为在未知解的性质之前，很难确定 C_1 和 C_2 所处的位置。

（3）Levinson-Smith 定理[5]。

在形式为
$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0 \tag{5}$$
的 Liénard 方程中，令 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$，如

1° $f(x)=f(-x)$，且 $f(0)<0$，

2° $g(-x)=-g(x)$，且当 $x\neq 0$ 时，$xg(x)>0$，

3° $F(x)$ 有 x_0 存在使 $F(x_0)=0$，且

$$\begin{aligned} &\text{当 } 0<x<x_0 \text{ 时，} && F(x)<0\\ &x>x_0 \text{ 时，} && F(x)>0\\ &x\to\infty \text{ 时，} && F(x)\to\infty \end{aligned}$$

則式（5）具有唯一的周期解。

在上列三种方法中，第三种对一般常碰到的問題最便于使用●。

● 关于Levinson-Smith定理的正确性和完整性，目前在数学界仍有爭論，例如 Z. Mikopajska 曾指出原有三个条件不是唯一的，張芷芬又对后者的論点提出了反例和修正，而最近李炳熙又对張的論点提出了异議[6]。但是，到目前为止，用原来的 $L-S$ 定理来驗証一般工程問題，看来还沒有发現明显的錯誤。

（E）相位平面图的作法.

一般有两种作法：等傾綫法和Liénard作图法。前者是讀者所熟悉的。令

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=F(x)=a=\text{const} \tag{6}$$

式（6）即等傾綫方程。根据式（6）画出对应于不同 a 值的等傾綫。在給定的初始条件下入图，随着等傾綫各点上所代表的斜率，就可以一步一步地画出相軌。

Lienard 作图法的步驟是首先將式（3）化为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+f(y)}{y}$$

的形式。作 $x=-f(y)$一条曲綫。在給定初始条件下入图。設入图点为M。由M点作水平綫与曲綫相交于N点，然后作垂直綫NP，P点落在x軸上。以$\overline{PM}$为半徑，作一小圓弧$\overset{\frown}{MM'}$，$\overset{\frown}{MM'}$即所求相軌的一部分。由M'点起重复上述步驟，即可逐步求出整个相軌。

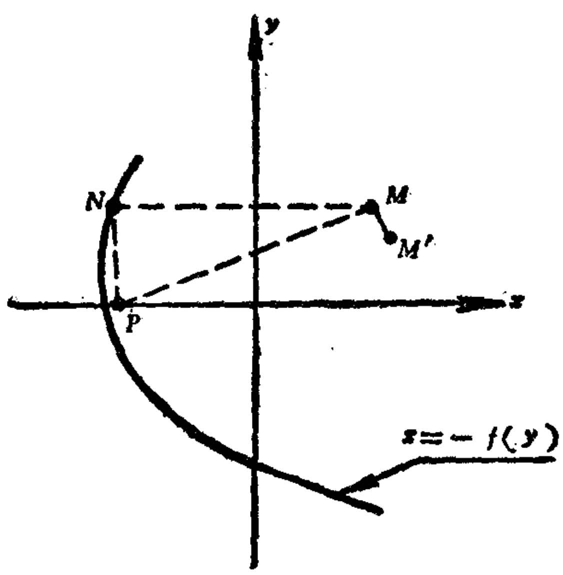

图 2

这两种方法在实质上是一样的。对于一般間題来說，后一方法較为方便。

关于拓扑法我們就簡单地介紹这一些。

2. 解析法的簡单介紹

对式（1）进行求解的方法有很多种。主要的有下列四种。

（A）能量平衡法

这是最簡单的方法。这一方法的出发点是，假如有一个稳态周期解，則达到稳态之后，每周期內能量必然“出入相等”，換言之，增量必等于零。因此，式（1）右边在一周期內的积分必等于零：

$$\int_0^T \mu f(x,\dot{x})dx=0$$

如已知(或假定)解的形式$x(t)$，則利用上式，即可求出振蕩的幅值。这一方法是最簡单的，但只能用来研究稳态的情况，而且必須預先知道解的形式。因此它的应用面是較窄的。

（B）Poincaré 法（微扰法）

应用面受限制較少的是 Poincaré 法[3]，这种方法本来是用于天体力学的，莫斯科学派对这一方法作了不少的补充和发展。这一方法的基本概念是这样的：对于含有某一小参量μ的微分方程式（如式1），它的解恒可表示为μ的冪級数的形式。例如，对于式（1），解可写为：

$$x=x(t,\mu,A)$$
$$y=\dot{x}=y(t,\mu,A)$$

式中A是振幅。如果$\mu=0$，則解变为綫性的。写出非綫性解（$\mu\neq0$）初始条件与綫性解（$\mu=0$）初始条件之間的差值：

$$\beta_1=x(0,\mu,A)-x(0,0,A)$$
$$\beta_2=y(0,\mu,A)-y(0,0,A)$$

并令 β 为新的参量。对于一个自治系統来說，相位是任意选擇的，換言之，我們可以用 $t+t_0$（t_0 为常数）代替 t，并选擇 t_0 使 β_1 或 β_2 其中一个等于零，比方說，令 $\beta_2=0$，$\beta=\beta_1$。这样，存在周期解的条件将是：

$$x(2\pi+\tau,\mu,\beta,A)-x(0,\mu,\beta,A)=\mu\Phi(\tau,\mu,\beta,A)=0$$
$$y(2\pi+\tau,\mu,\beta,A)-y(0,\mu,\beta,A)=\mu\psi(\tau,\mu,\beta,A)=0$$

上式中，我們用无量綱的量 τ 代替了有量綱的时間 t。

由上式显而易見，如 $\mu=0$，上式自然滿足，故有周期解。如 $\mu\neq0$，則有解条件将为

$$\Phi=\psi=0$$

在上述 μ，β，τ 三个参量中，μ 是自变量，β 和 τ 是 μ 的因变量。当 $\mu\to0$ 时，$\beta(\mu)$ 和 $\tau(\mu)$ 均 $\to0$。

我們可以将 Φ 和 ψ 写为級数的形式

$$\Phi=\Phi_0+a\mu+b\tau+c\beta+d\mu^2+e\tau^2+f\beta^2+\cdots\cdots$$
$$\psi=\psi_0+a_1\mu+b_1\tau+c_1\beta+d_1\mu^2+e_1\tau^2+f_1\beta^2+\cdots\cdots$$

如果 $\mu\ll1$，可只取綫性项并設 $\tau(\mu)=\alpha\mu$，$\beta(\mu)=\gamma\mu$，这里 α 和 γ 是待求的未知量。于是，上式簡化为

$$\Phi=\Phi_0+\mu(a+b\alpha+c\gamma)=0$$
$$\psi=\psi_0+\mu(a_1+b_1\alpha+c_1\gamma)=0$$

为了滿足上式并使 α 和 γ 有解，必須有：

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\quad \Phi_0=\psi_0=0 \\ 2^\circ\quad \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}\neq0,\ 即\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\beta} \end{vmatrix}\neq0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

式（7）即存在周期解的充要条件。

这种方法的計算是比較麻煩的：首先将 x 表为 μ，τ，β 級数的形式，称此式为式(A)，然后求出 $\dot{x}$，$\ddot{x}$ 的式子以及函数 $f(x,\dot{x})$ 在 $\mu=0$ 时的表示式。将这些式子代入原始微分方程式（1），令左右两边具有同次 μ，同次 τ……以及各同次 μ^2，τ^2……的各项分别相等，这样就得出了一系列的綫性微分方程，这些方程的解将給出上述級数每一項的系数。将这些系数代入 x 表为級数的方程式（A），就得到最后的解。

由此可見，这种方法的实质是把解非綫性方程的問題归化为解若干个綫性方程的問題。所取項数愈多，結果会愈准确。

这种方法用的人不很多，主要是工作量太大。但是它并不受很多条件的限制，当其他方法不适用时，采用此法还是比較可靠的。

（C）Van der Pol 法和 Крылов-Боголюбов 法（平均法或縮短方程法）

这种方法的出发点是这样的：当 $\mu=0$ 时，得到正弦振蕩 $x=a\sin(\omega t+\varphi)$，其中振幅 a 和相位 φ 都是常数。如果 $\mu\neq0$ 但为值甚小，則仍然可以設 $x=a\sin(\omega t+\varphi)$，但此时 a 和 φ 都变为时間 t 的函数。因为 $\mu\ll1$，所以变化是緩慢的。因此，这种方法有时

也称为緩变振幅法。

Van der Pol所取的形式是 $x=A(t)\sin\omega t+B(t)\cos\omega t$，这就是說，微弱非綫性項的存在（$\mu\neq0$），体現在$A$和$B$都成为緩变量。K-Б所取的形式則是 $x=a(t)\sin[\omega t+\varphi(t)]$，体現在$a$和$\varphi$成为緩变量。显然，这两种方法在本质上是相同的。以K-Б方法为例，待解方程取如下形式：

$$\ddot{x}+\omega^2x+\mu f(x,\dot{x})=0 \tag{8}$$

式（8）的解取 $x=a(t)\sin[\omega t+\varphi(t)]$的形式。当$\mu\ll1$时，可令$\dot{x}=a\omega\cos(\omega t+\varphi)$，从而得到：

$$\dot{a}\sin(\omega t+\varphi)+a\dot{\varphi}\cos(\omega t+\varphi)=0 \tag{9}$$

将x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$代入原式（8），得

$$\dot{a}\omega\cos(\omega t+\varphi)-a\omega\dot{\varphi}\sin(\omega t+\varphi)+\mu f[\quad]=0 \tag{10}$$

式中 $f[\quad]\equiv f[x,\dot{x}]=f[a\sin(\omega t+\varphi),\ a\omega\cos(\omega t+\varphi)]$

联解（9）（10）二式，得

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}&=-\frac{\mu}{\omega}f[\quad]\cos(\omega t+\varphi)\\ \dot{\varphi}&=\frac{\mu}{\omega a}f[\quad]\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这样，我們就把原来的二阶方程变为两个一阶方程。因$\mu\ll1$，这説明a和φ的变化是很慢的，在一个周期之內可假定a和φ保持不变。在这一前提下，我們可以将$f[\quad]\cos(\omega t+\varphi)$和$f[\quad]\sin(\omega t+\varphi)$两个三角函数展为傅里叶級数，代入（11）然后进行由0至T的积分，結果所有的三角函数項都变为零。

令$\psi=\omega t+\varphi$，最后得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\mu}{\omega}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f[a\sin\psi,\ a\omega\cos\psi]\cos\psi\,d\psi=\Phi(a)\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega+\frac{\mu}{a\omega}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f[a\sin\psi,a\omega\cos\psi]\sin\psi\,d\psi=\Omega(a)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

这就是通常所謂短縮方程，达到稳态时，$\frac{da}{dt}=0$，即$\Phi(a)=0$，这样就可以求出稳态振幅。式（12b）右边第二項給出了由于非綫性所引起的頻率修正。

短縮方程法是比較常用的方法之一。它只給出第一次近似的解。如果需要更准确的計算，可用漸进法进行更高次的近似。在这一方面 Боголюбов 等[7]作了很多工作。

（D）間歇法（閃測法）

Minorsky 在1959年发展的"閃測法"[8]或間歇法介乎拓扑法与解析法之間，它同样适用于自治或非自治系統。这一方法的特征是把研究极限周的問題变换为研究平衡点的問題。它的基本概念是这样的：例如，对于方程 $\ddot{x}+x=0$ 来說，相位平面图是一个圓，相点每經过2π就回到原处。假如我們要研究的問題仅限于周期解之有无及其性质，则我們尽可以不管相軌的全貌而只管这一点。也就是說，我們不需要用光来照耀全图（因为我們不需要看到全图），只須用閃頻光照着这一点就够了。再例如 Van der Pol方程 $\ddot{x}+x+\mu(x^2-1)\dot{x}=0$ 的稳态解是 $a=2$，就是說，从初始条件a_0点入图，相点經过多次旋轉最后到达$a=2$这一点。在此之前，每經过2π所达到的点为a_1，a_2，a_3等等。在原始的相位平面上，这一过程表現为連續旋轉的曲綫，而在另一想像中的"閃測"平面中，我

們将只看到連接 a_0，a_1，a_2……的一条綫 （基本上是一条直綫），如图 3 所示。这样，我們把一条曲綫变成了一个点，多条連續曲綫变成了一条直綫。这样作法的一个优点是可以把一个非自治系統的問題变为相应的自治系統的問題来处理。

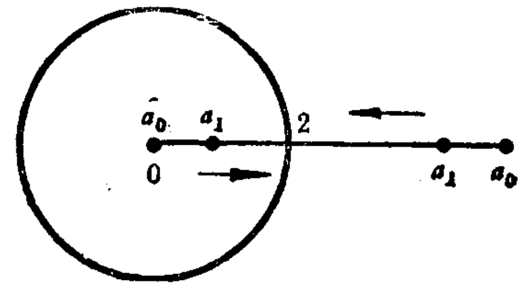

图　3

令 $\rho = r^2 = x^2 + y^2$，　$\psi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，$x = r\cos\psi$，$y = r\sin\psi$，然后又令 $y = \dot{x}$。这样，ρ 和 ψ 可視为两个新变量，用以代替 x 和 y。例如对于諧和振蕩 $\ddot{x} + x = 0$，显然有

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\psi} = -1$$

对于式（2）形式的微分方程，則有

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mu f(\rho, \psi, t) \\ \dot{\psi} &= -1 + \mu g(\rho, \psi, t) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

这样我們得到了两个一阶方程来代替原来的式（2）。式（13）的解可写为級数形式：

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \mu\rho_1(t) + \cdots\cdots$$
$$\psi(t) = \psi_0(t) + \mu\psi_1(t) + \cdots\cdots$$

式中　$\rho_0(t) = \rho_0$，$\psi_0(t) = \varphi_0 - t$，$\rho_0$ 和 φ_0 是初始条件。$\rho_1(t)$ 和 $\psi_1(t)$ 是一次修正項，可由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(t) &= \int_0^t f(\rho_0, \varphi_0 - \sigma, \sigma)\,d\sigma = K(\rho_0, \varphi_0) \\ \psi_1(t) &= \int_0^t g(\rho_0, \varphi_0 - \sigma, \sigma)\,d\sigma = L(\rho_0, \varphi_0) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

因此，第一次近似解可写为

$$\left.\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 + \mu\rho_1(t) \\ \psi(t) &= \varphi_0 - t + \mu\psi_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式（15）可以当作一个变換式来看待，用变数 τ 来代替 t，結合（14）（15）二式得差分方程：

$$\Delta\rho = \Delta\tau K(\rho, \varphi)$$
$$\Delta\varphi = \Delta\tau L(\rho, \varphi)$$

式中　$\Delta\tau = 2\pi\mu$，　τ 可称为“閃測平面上”的时間。

由此得，

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta\tau} = K(\rho, \varphi), \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau} = L(\rho, \varphi)$$

当 $\Delta\tau \to d\tau$ 时，$\Delta\rho \to d\rho$，$\Delta\varphi \to d\varphi$，故可得，

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= K(\rho, \varphi) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= L(\rho, \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

这样就得到了两个“閃測”微分方程。我們注意到（13）是包含 t 的，而（16）則不含有 t。由于閃測面和原始面的对应性，如（16）确定一稳定的奇异点，則相应地，在

(13) 中将存在一稳定的极限周。这一条件显然是

$$K(\rho_0, \varphi_0) = L(\rho_0, \varphi_0) = 0 \tag{17}$$

由此可見，閃測法的特点是把极限周的問題变为奇异点的問題，从而使非自治系統也可以用处理自治系統的方法来处理。

二、数学方法的某些改进及存在的問題

尽管从三十年代起振蕩理論已有很大的发展，但大部分的工作都是研究弱非綫性的問題。在这一方面，由于 Боголюбов 等的貢献[7]，在目前已能作到这一点：只要不怕麻煩，不断逐次漸进，总可以得到所需要的准确度。

对于强非綫性的問題（$\mu \gg 1$），亦即張弛振蕩的問題，研究工作还不能說做得很多。早期 Мандельштам 的不連續性理論，只能給出一些定性的描述。近年来，Haag[9]，Дородницын[10] 曾分别用漸进法对 Van der Pol 及其他形式的二阶非綫性方程进行求解，并得到了一些有用的近似公式。

对于 μ 既不甚大也不甚小的情况，最近 Urabe[11] 利用牛頓法和数值积分对 Van der Pol 方程的解进行了計算，包括了 $\mu = 0$ 到 $\mu = 10$ 的情况。

微扰法有較广的普遍性，但使用不便，已如前述。近来 Clauser[12] 曾建議采用阻抗的概念● （从而避免了时間的因素）来表征微扰，并且設計了一套完整的运算程序，使解微分方程的問題变为代数运算問題。这一方法也是值得注意的。

必須指出，所有以上这些，都是对 Van der Pol方程或类似的二阶方程进行的工作。这些工作无疑是很有价值的。但对解决实际問題，特别是工程設計問題来說，则还远远不够。应該說，目前振蕩理論的发展还远落后于实际的需要。

在引言中我們已經提到，在分析实际問題时，必須“引入合理的近似条件，設法使运动方程化为某种在数学形式上有办法求解的微分方程”。当然，在目前最有办法的是限于非綫性二阶方程。問題是，那怕是一个最簡单的三极管振蕩器电路，它的运动方程式一般是不会低于三阶的。引入某些条件使它退化为二阶当然是可以作到的。問題是这些条件是否合理。

以自激振蕩器为例，熟悉这一方面的讀者一定会注意到，一般的作法总是首先不計柵流，然后再忽略板极反作用，再不然就是假定耦合很紧，在这一系列的假定之下才能写出所能解的二阶方程。否則，一下就会出現一个四阶甚至四阶以上（如果是多迴路的話）的方程。

忽略板极的反作用是可以容忍的，特别是用五极管或高 μ 三极管时，引入的誤差是不大的，問題在于忽略柵流。对于一个电路工程师来說，柵流这个概念是非常重要的。大家都知道，判断一个自激振蕩器是否振蕩，最簡单的办法就是看有无柵流。当柵流与板流共同出現在一个式子里时，忽略柵流是可以容許的。但目前大家在振蕩理論中的做法不是“忽略”而是“不計”。这是說不过去的。有人认为可以先不計柵流，在計算完了之后再加以修正，把柵流的影响算到跨导 S 的“帳上”，这样当然也可以，問題是这个帳怎样算？我們曾作过一些实驗来驗証“不計柵流”所带来的誤差[13]。在不計柵流的前提下所算出某些

● 值得指出的是，这一概念曾不約而同地应用到微波网絡的問題[36]。

参量（例如某一調諧电容）的数值，比实驗数值可差一倍以上。不計則誤差太大，計入則得到高阶微分方程。怎么办？

对于高阶非綫性微分方程的解法，数学家們是作过一番努力的。对于某些个別的三阶問題也曾作出了解答[14,15]。E. F. Mishchenko 等[37]曾提出解决高阶項具有小参量的微分方程的一种通用方法，这种方法可用以研究寄生参量的影响，特别是在張弛振蕩問題中的影响，这种方法是否可用以解决其他問題，例如栅流影响的問題，还有待于进一步的研究。

一般来說，解高阶非綫性微分方程的問題毕竟是困难的。比方說，对于如下形式的方程：

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, y, \dot{y})$$
$$\ddot{y} = g(x, \dot{x}, y, \dot{y})$$

直到目前，似乎还沒有什么好办法，而方程式具有这种形式的电路是并不稀罕的。

对于三阶以上的方程，用拓扑法是不現实的，因为在一个四維空間中，积分曲綫将繞在一起，难以辨认，更不要說加以分析了。

有人认为[16]，企图用經典的微分方程来解决这种問題，看来是“此路不通”的。这种看法可能是过于悲观了。

从科学发展史来看，实踐的需要必然会刺激理論的发展。一种新的物理現象，往往促进一种新的数学工具的形成。假如說，原子物理的某些实驗現象促成了量子力学的发展，那么，目前存在的大量的电路問題会不会促成一种新的数学学科的分支呢？只取“拭目以待”的态度是不行的。我們深切地希望，电路工作者能更多懂一点数学，更希望数学家們对无綫电发生一点兴趣。当两方面的人有了更多的共同語言和共同願望时，解决問題的日子大概就不远了。

三、近年来被探索的一些典型問題

1. 关于自激振蕩器的分析

如前所述，尽管近年来对 Van der Pol 和 Rayleigh 方程研究得很多，但結合到一个实际的振蕩系統（例如上述的三极管振蕩器电路），还不能很好地解决定量的問題，甚至对某些基本概念也还有模糊不清之处。看来，振蕩理論与实际系統設計之間还缺乏一个“桥梁”。为了說明这一論点，让我們举两个例子。

第一，所謂“准直綫法”能否用于自激振蕩器的計算？过去一般人是采取默认或不置可否的态度。Pамм 在 1954 年[17]用 Liénard 作图法对一个簡单的調板振蕩器进行了分析，得出了极限周的图形从而証明了准直綫法不适用于自激振蕩器——特别是工作于过压的振蕩器。Pамм 沒有說明他是否曾經作过实驗来驗証他作出的图形。我們曾初步进行过一些实驗，所得图形与 Pамм 計算出来的有相当大的区别。我們很怀疑他所用的 Van der Pol 方程是否与实际情况相符。

第二，过去对振蕩器的研究，不外是从 Rayleigh 方程

$$\ddot{x} - \mu\left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3}\right) + x = 0$$

或　Van der Pol 方程