

钟锡华 周岳明 编著

《现代光学基础》
题解指导

3-44
34



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

《现代光学基础》

题解指导

钟锡华 周岳明 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

《现代光学基础》题解指导/钟锡华,周岳明编著. —北京:北京大学出版社,2004.5

ISBN 7-301-07158-2

I. 现… II. ①钟… ②周… III. 光学-高等学校-题解
IV. 043-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 028082 号

书 名:《现代光学基础》题解指导

著作责任者:钟锡华 周岳明 编著

责任编辑:顾卫宇

标准书号:ISBN 7-301-07158-2/O·0589

出版发行:北京大学出版社

地 址:北京市海淀区中关村 北京大学校内 100871

网 址:<http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn

电 话:邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

排 版 者:北京高新特打字服务社 51736661

印 刷 者:北京大学印刷厂

经 销 者:新华书店

890×1240 A5 7 印张 200 千字

2004 年 5 月第 1 版 2004 年 5 月第 1 次印刷

印 数:0001—4000 册

定 价:12.00 元

作者前言

本书对原著《现代光学基础》所含 186 道习题，均一一作了解答，并借题发挥，或扩展引伸，或深化提高，或联系其理论背景和实际背景，或说明其训练意图。这类内容，散见于各题，随机从缘，无一定格，权作指导。寓指导于题解之中，正是本书的一个特色，也是书名之来由。

原著《现代光学基础》，系北京市高等教育精品教材首批立项成果，出版于 2003 年 9 月（北京大学出版社）。出版后作者和出版社陆续收到读者来电，询问该书的题解何时面世。好在作者心境尚佳，笔境犹顺，于是，便抓紧笔耕，又历经四月，完成此作。愿它在分析和解决现代基础光学中的实际问题时，能成为读者的一个好助手。

于北京大学物理学院

2004 年 2 月 4 日·甲申立春

目 录

- 1 费马原理与变折射率光学····· (1)
- 2 波动光学引论····· (14)
- 3 介质界面光学与近场光学显微镜····· (54)
- 4 干涉装置与光场时空相干性 激光····· (66)
- 5 多元多维结构衍射与分形光学····· (99)
- 6 傅里叶变换光学与相因子分析方法 ····· (126)
- 7 光全息术 ····· (156)
- 8 光在晶体中的传播 ····· (170)
- 9 吸收·色散·散射 ····· (204)

1

费马原理与变折射率光学

- 1.1 惠更斯原理
 - 1.2 折射率
 - 1.3 光程
 - 1.4 费马原理
 - 1.5 费马原理与成像
 - 1.6 自然变折射率
 - 1.7 人工变折射率 强光变折射率
 - 1.8 光线方程
 - 1.9 评述费马原理
- 习题 8 道

1.1 可见光谱区在真空中的波长范围一般认定为 $380 \sim 760 \text{ nm}$, 现针对其紫端 $\lambda_1 = 380 \text{ nm}$, 中部 $\lambda_2 = 570 \text{ nm}$ 和红端 $\lambda_3 = 760 \text{ nm}$,

(1) 算出这三种光波的时间频率 f_1, f_2 和 f_3 .

(2) 当它们传播于折射率为 1.33 的水中, 光波长 λ'_1, λ'_2 和 λ'_3 各为多少? 其光速 v' 为多少? (忽略色散)

(3) 当它们传播于折射率为 1.58 的玻璃中时, 光波长 λ''_1, λ''_2 和 λ''_3 各为多少? 其光速 v'' 为多少? (忽略色散)

解 (1) 根据波速 v 等于其频率 f 与其波长 λ 之乘积, 可以算出:

$$\text{短波紫光频率 } f_1 = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{380 \times 10^{-9} \text{ m}} \approx 8 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

$$\text{中部黄光频率 } f_2 = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{570 \times 10^{-9} \text{ m}} \approx 5 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

$$\text{长波红光频率 } f_3 = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{760 \times 10^{-9} \text{ m}} \approx 4 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

本题旨在让我们感知可见光的扰动频率是一个多么高的数量级. 若用光频的倒数即光扰动的周期 $T=1/f$ 来表示, 则可见光扰动的周期 T 在 10^{-15} s 量级, 即 fs(飞秒)量级, 这与当今超短激光脉冲已达到的脉冲时间同一量级. 长期以来, 人们均是通过光波长的测量, 而间接地推算出如此高的光频数值, 直至 20 世纪 70 年代, 人们着手建立了激光频标, 继而精确地测量了红外至可见光波段各种特征谱线的频率值. 这是现代光学测量技术领域的一项重大进展.

(2) 根据介质折射率 n 等于同一光谱线在真空中的波长 λ_0 与在该介质中的波长 λ 之比值, 即 $n=\lambda_0/\lambda$, 求出

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{n_1} \approx \frac{380 \text{ nm}}{1.33} \approx 286 \text{ nm}, \quad \lambda'_2 \approx \frac{570 \text{ nm}}{1.33} \approx 429 \text{ nm},$$

$$\lambda'_3 \approx \frac{760 \text{ nm}}{1.33} \approx 571 \text{ nm}.$$

这里忽略了水的色散效应带来的不大于 1% 的影响. 同理, 在不考虑色散的情况下, 这三种光波在水中的传播速度是相同的; 其数值为

$$v' = \frac{c}{n} \approx \frac{3 \times 10^8}{1.33} \text{ m/s} \approx 2.26 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

(3) 仿照(2)的物理根据和计算程序, 求出这三条光谱线在那玻璃中的光波长分别为

$$\lambda''_1 \approx \frac{380 \text{ nm}}{1.58} \approx 241 \text{ nm}, \quad \lambda''_2 \approx \frac{570 \text{ nm}}{1.58} \approx 361 \text{ nm},$$

$$\lambda''_3 \approx \frac{760 \text{ nm}}{1.58} \approx 481 \text{ nm};$$

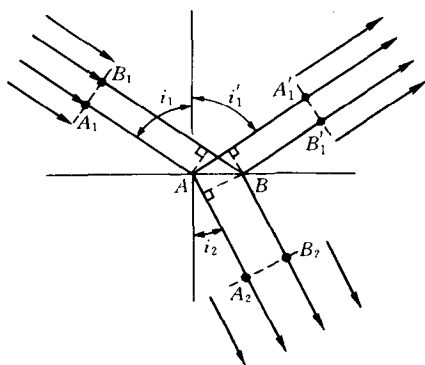
在该玻璃中光波的传播速度为

$$v'' = \frac{c}{n} \approx \frac{3 \times 10^8}{1.58} \text{ m/s} \approx 1.90 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

从(2)和(3)计算中看出, 介质折射率仅影响着光波长或光速, 但它不改变光频; 光扰动的频率具有本征性, 不因介质而改变——这是通常线性介质所具有的一个基本性质.

1.2 试从具体考察光程出发, 论证:

- (1) 反射定律给出的反射光束方向满足等光程性.
- (2) 折射定律给出的折射光束方向满足等光程性.



题 1.2 图

解 (1) 参见图, 设光束入射角为 i_1 , 反射角为 i_1' . 入射平行光束的等相面为一正交截面, 选其上任意两处 A_1 和 B_1 , 并从此出发考察光程 $L(A_1AA_1')$ 与 $L(B_1BB_1')$ 相等的条件. 从图中可以看出,

$$\overline{B_1B} = \overline{A_1A} + \overline{AB}\sin i_1, \quad \overline{BB_1'} = \overline{AA_1'} - \overline{AB}\sin i_1',$$

两式相加, 得

$$\overline{B_1BB_1'} = \overline{A_1AA_1'} + \overline{AB}(\sin i_1 - \sin i_1'),$$

当 $i_1' = i_1$, 即反射角等于入射角时,

$$\overline{B_1BB_1'} = \overline{A_1AA_1'};$$

因这两束光处于同一介质, 其折射率为 n_1 , 故光程

$$n_1 \overline{B_1BB_1'} = n_1 \overline{A_1AA_1'} \quad \text{或} \quad L(B_1B_1') = L(AA_1').$$

这就证明了光的反射定律给出的反射光束满足了等光程性; 或者说, 人们可以从等光程性的要求出发, 而导出光的反射定理; 根据光程与相位差的关系, 也可以这样理解上述推演的含义, 已知 A, B 两点的光扰动是同相位的, 由于等光程性可以断定 A_1', B_1' 两点的光扰动也是同相位的, 这正说明 $i_1' = i_1$ 指出的反射光束是一个确实存在的实际光束. 若从光波衍射的眼光看, 这等光程方向正是零级衍射波的主方向, 虽然界面有限而产生的衍射场是弥漫的.

(2) 我们不妨虚设一折射光束其折射角为 i_2 , 参见题图, 考察光程 $L(A_1AA_2)$ 与 $L(B_1BB_2)$ 相等的条件, 这里 A_2, B_2 处于折射光束

的正交截面上. 从图中看出

$$\begin{aligned}\overline{B_1B} &= \overline{A_1A} + \overline{AB}\sin i_1, \\ \overline{BB_2} &= \overline{AA_2} - \overline{AB}\sin i_2.\end{aligned}$$

两式分别乘以折射率 n_1, n_2 , 且相加得

$$n_1 \overline{B_1B} + n_2 \overline{BB_2} = n_1 \overline{A_1A} + n_2 \overline{AA_2} + \overline{AB}(n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2),$$

显然, 当折射角 i_2 满足 $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$ 时, 上式左右两段光程相等, 即光程

$$L(A_1AA_2) = L(B_1BB_2).$$

这就证明了光的折射定律给出的折射光束满足了等光程性; 或者说, 人们可以从等光程性的要求出发, 而导出光的折射定理; 若从普遍的光波衍射的眼光看, 这折射等光程方向正是透射区零级衍射波的主方向.

1.3 巨蟹星座中心有一颗脉冲星其辐射的光频信号和射频信号到达地球有 1.27 s 的时差, 且光波快于射电波.

(1) 求这两种电磁波从脉冲星到地球的光程差 ΔL .

(2) 试估算这两种电磁波传播于宇宙空间中的折射率之差 Δn 的数量级, 以及相应的速度差 $\Delta u/c$ 之数量级. 已知这颗脉冲星与地球之距离为 $D \approx 6300$ 光年 $\approx 6 \times 10^{16}$ km.

解 本题暂不考虑脉冲辐射的群速与单频辐射的相速之差别, 姑且将本题提供的数据看作单频辐射的相速在不同波段有不同的取值.

(1) 光程差 ΔL 等于真空中光速 c 乘以时差 Δt ,

$$\Delta L = c \cdot \Delta t \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 1.27 \text{ s} \approx 3.8 \times 10^8 \text{ m}.$$

(2) 这时差反映了宇宙空间对电磁波存在色散效应. 设光频信号的传播速度为 u_1 、折射率为 n_1 ; 射频信号的传播速度为 u_2 、折射率为 n_2 , 则光程差也可以由折射率之差 Δn 表示为

$$\Delta L = \Delta n \cdot D, \quad \text{得} \quad \Delta n = \frac{\Delta L}{D} \approx \frac{3.8 \times 10^8 \text{ m}}{6 \times 10^{16} \text{ km}} \approx 6 \times 10^{-12}.$$

再根据

$$u = \frac{c}{n}, \quad \text{有} \quad \Delta u \approx \frac{c}{n^2} \Delta n \approx c \Delta n \quad (\text{取 } n \approx 1),$$

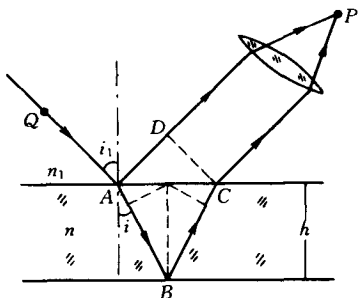
故

$$\frac{\Delta u}{c} \approx \Delta n \approx 6 \times 10^{-12}.$$

1.4 如图所示,一透明平板其厚度为 h 、折射率为 n . 一光线从空气射向平板,经其上、下表面反射而分成两条光线,再经透镜而相交于 P 点,试导出光程差公式

$$L(QABCP) - L(QAP) = 2nh \cdot \cos i,$$

这里 i 为折射角.



题 1.4 图

解 参见题图,从 C 点向 (AP) 段作一垂线,其垂足为 D ,于是,借助透镜对平行光束的聚焦性质,可以断定 (DP) 段光程等于 (CP) 段光程,即 $L(DP) = L(CP)$. 故本题要求的光程差被简化为

$$L(QABCP) - L(QAP) = L(ABC) - L(AD),$$

通过几何三角关系不难导出:

$$L(AD) = \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin i_1,$$

$$L(ABC) = n \overline{AC} \cdot \sin i + n2h \cdot \cos i$$

$$= \overline{AC} \cdot \sin i_1 + 2nh \cos i \quad (\text{折射定律 } \sin i_1 = n \sin i),$$

最终求得光程差

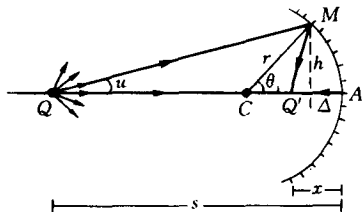
$$\Delta L = 2nh \cos i.$$

此公式将在第 4 章论述薄膜干涉问题时用到. 当上方介质不是空气而是折射率为 n_1 的介质,此公式依然正确,只要注意到此时的折射定律表示为 $n_1 \sin i_1 = n \sin i$,故以上公式中的折射角 i 也有了相应的变化.

1.5 试从费马原理出发导出球面镜反射傍轴成像公式:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r} \quad (\text{要求作出示意图}).$$

解 如图所示,一点光源 Q 发出一光束射向一球面反射镜. 实验上发现,当光束孔径角很小,即傍轴窄光锥入射,经球面镜反射,可以获得一个很好的聚焦点;当宽光束入射,经球面镜反射,不能聚焦于一点而是一个光斑. 本题旨在从费马原理出发而不是基于反射定律,求证球面镜反射在傍轴条件下可以成像,进而给出其成像公式且明确“傍轴条件”的确切含义.



题 1.5 图

我们将物点 Q 与球面镜中心 C 的连线 \overline{QCA} 称为轴光线. 显然,此光学系统具有轴对称性,因此,自左向右入射的轴光线经球面顶点 A 的反射必定沿原路返回,即光线 (QAQ') 是一条业已存在的实际光线. 再设倾角为 u 的一条光线,其入射点为 M ,经反射而相交于轴上 Q' 点,设距离 $Q'A$ 为 x , QA 为 s . 显然,光程 $L(QMQ')$ 取决于 x 和倾角 u 或 h 或 Δ (见图),即 $L(QMQ') = L(x, \Delta)$. 根据费马原理导出的物像等光程性,我们令

$$L(QMQ') = L(QAQ'),$$

若由此方程能解出 x 与 Δ 无关,则表明 Q' 点为一个像点. 为此,分别采取代数法和变分法作如下推演.

1. 代数法.

$$h^2 = (2|r| - \Delta)\Delta = -(2r + \Delta)\Delta \quad (\text{这里球心在左侧, } r < 0),$$

$$\begin{aligned} \overline{QM} &= \sqrt{(s - \Delta)^2 + h^2} = \sqrt{(s - \Delta)^2 - (2r + \Delta)\Delta} \\ &= \sqrt{s^2 - 2(s + r)\Delta}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\overline{MQ'} = \sqrt{(x - \Delta)^2 + h^2} = \sqrt{x^2 - 2(x + r)\Delta}. \quad (2)$$

在 $\Delta \ll r, s, x$, 即傍轴条件下, 忽略以上展开式中的高于二阶的小量, 得近似式

$$\overline{QM} \approx s \left(1 - \frac{s+r}{s^2} \Delta \right), \quad \overline{MQ'} \approx x \left(1 - \frac{x+r}{x^2} \Delta \right),$$

而轴光线的光程为

$$L(QAQ') = (s+x) \quad (\text{这里一概略写折射率 } n),$$

令 $L(QMQ') = L(QAQ')$, 即

$$s \left(1 - \frac{s+r}{s^2} \Delta \right) + x \left(1 - \frac{x+r}{x^2} \Delta \right) = (s+x),$$

$$\frac{s+r}{s} \Delta + \frac{x+r}{x} \Delta = 0, \quad \frac{s+r}{s} + \frac{x+r}{x} = 0,$$

满足此方程的 x 与 Δ 无关, 换句话说, 从 Q 点发出的不同倾角对应不同 Δ 的光线均能会聚于轴上一点 Q' , 其位置 x 由上式确定, 便是像距 s' ,

$$\frac{s+r}{s} + \frac{s'+r}{s'} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}. \quad (3)$$

这就论证了在傍轴条件下球面镜的反射能够成像, 其物距-像距关系式由(3)式给出. 其实, 以上推演过程中还隐含着一个事实—— r 是一个常数, 即反射镜面是一个球面; 若镜面是一个其他形状的旋转曲面, 泛指 $r=r(\theta)$, 就不可能有以上“成像”的结论对于任意距离 s 的物点成立.

2. 变分法. 借用(1)式和(2)式, 写出光程函数

$$L(x, \Delta) = \sqrt{s^2 - 2(s+r)\Delta} + \sqrt{x^2 - 2(x+r)\Delta},$$

考察其一阶导数,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx} &= \frac{-(s+r)}{\sqrt{s^2 - 2(s+r)\Delta}} + \frac{-(x+r)}{\sqrt{x^2 - 2(x+r)\Delta}} \\ &\approx \frac{-(s+r)}{s} \frac{1}{\left(1 - \frac{s+r}{s^2} \Delta\right)} + \frac{-(x+r)}{x} \frac{1}{\left(1 - \frac{x+r}{x^2} \Delta\right)} \\ &\approx \frac{-(s+r)}{s} \left(1 + \frac{s+r}{s^2} \Delta\right) + \frac{-(x+r)}{x} \left(1 + \frac{x+r}{x^2} \Delta\right) \\ &\approx -\frac{s+r}{s} - \frac{x+r}{x} \quad (\text{与 } \Delta \text{ 无关}). \end{aligned} \quad (4)$$

以上近似均为傍轴条件 $\Delta \ll s, x, r$ 之下作出的推演。

物像等光程性要求程函 $L(x, \Delta)$ 的一阶导数和二阶导数均为零, 即

$$\frac{dL}{d\Delta} = 0, \quad \frac{d^2L}{d\Delta^2} = 0,$$

式(4)表明 $dL/d\Delta$ 与 Δ 无关, 故 $d^2L/d\Delta^2 = 0$ 得以满足; 再令 $dL/d\Delta = 0$, 遂得

$$-\frac{s+r}{s} - \frac{x+r}{x} = 0,$$

简化为

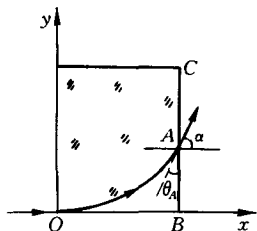
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{x} = -\frac{2}{r} \quad \text{或} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}.$$

这就以变分法(目前情形下简化为微分法)求证了傍轴条件下球面镜反射成像, 且求得物距 s 与像距 s' 的关系式。

1.6 如图所示, 宽度为 d 的一玻璃块其折射率随高度 y 而变化,

$$n(y) = \frac{n_0}{1 - \frac{y}{r_0}},$$

其中 $n_0 = 1.2$, $r_0 = 13 \text{ cm}$. 一光线沿 x 轴射向原点而进入这玻璃块, 最终从 A 点出射其倾角为 $\alpha = 30^\circ$. 试求



题 1.6 图

- (1) 这条光线在玻璃块中的径迹。
- (2) 玻璃块在出射点 A 处的折射率 n_A 。
- (3) 玻璃块的宽度 d 。

解 (1) 此玻璃块的折射率 $n(y)$ 随高度 y 的增加而递增, 即下方为光疏介质层, 上方为光密介质层, 故定性看, 光线向上弯曲而越益靠近介质层的法线方向(平行 y 轴)。

我们已经获知, 在 n 仅沿 y 方向连续变化的介质中光线方程为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y)}{n_0^2 \sin^2 \theta_0} - 1, \quad (1)$$

这里, (n_0, θ_0) 为边条件——光线出发点 $y=0$ 处的入射角和折射率。

对于本题,

$$n(0) = n_0, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \theta_0 = 1;$$

$$\text{故} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(1-y/r_0)^2} - 1 = \frac{1 - (1-y/r_0)^2}{(1-y/r_0)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - (1-y/r_0)^2}}{(1-y/r_0)}.$$

$$\text{因此,} \quad \int_0^y \frac{(1-y/r_0)}{\sqrt{1 - (1-y/r_0)^2}} dy = \int_0^x dx,$$

先作一次积分变量替换,令 $Y = 1 - y/r_0$, $dY = -dy/r_0$,得

$$\int \frac{-r_0 Y}{\sqrt{1 - Y^2}} dY = x.$$

再作一次积分变量替换,令 $Z = 1 - Y^2$, $dZ = -2Y dY$,得

$$\frac{r_0}{2} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} dZ = x,$$

解出,

$$r_0 Z^{1/2} = x, \quad r_0^2 Z = x^2,$$

$$\text{即} \quad r_0^2(1 - Y^2) = x^2, \quad r_0^2 \left(1 - \left(\frac{r_0 - y}{r_0}\right)^2\right) = x^2,$$

$$\text{最后化简为} \quad x^2 + (y - r_0)^2 = r_0^2, \quad (2)$$

它正是圆周方程,这表明此光线径迹为一圆弧,其圆心位于 y 轴 r_0 处,半径为 r_0 ,参见题图.

(2) 首先在 (BC) 面上 A 处应用折射定律,并注意到该面法线平行于 x 轴,

$$n_A \cos \theta_A = \sin \alpha,$$

其左边

$$n_A \cos \theta_A = n_A \sqrt{1 - \sin^2 \theta_A} = \sqrt{n_A^2 - (n_A \sin \theta_A)^2} = \sqrt{n_A^2 - n_0^2}.$$

最后一步是应用了对于介质层的折射定律 $n_A \sin \theta_A = n_0 \sin \theta_0 = n_0$.

已经注意到介质层的法线平行于 y 轴,于是,

$$\sqrt{n_A^2 - n_0^2} = \sin \alpha, \quad \text{则} \quad n_A = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

代入 $\sin \alpha = \sin 30^\circ = 0.5$, $n_0 = 1.2$, 得 A 点折射率为

$$n_A = \sqrt{(1.2)^2 + (0.5)^2} = 1.3.$$

(3) 应用圆方程(2)于 A 点,

$$x_A^2 + (y_A - r_0)^2 = r_0^2,$$

而其中 y_A 可由 n_A 值导出,

$$n_A = \frac{n_0}{1 - y_A/r_0}, \quad \text{即} \quad y_A = \frac{n_A - n_0}{n_A} r_0. \quad (4)$$

于是,

$$x_A^2 = r_0^2 - (y_A - r_0)^2 = r_0^2 - \left(\frac{n_A - n_0}{n_A} r_0 - r_0 \right)^2 = \frac{n_A^2 - n_0^2}{n_A^2} r_0^2,$$

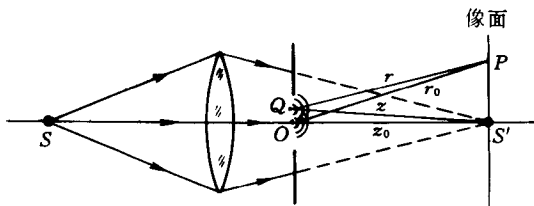
最后求出此玻璃块的宽度

$$d = x_A = \frac{\sqrt{n_A^2 - n_0^2}}{n_A} r_0 = \frac{\sqrt{(1.3)^2 - (1.2)^2}}{1.3} 13 \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

(4) 我们不妨进一步思考: 若一束平行光(平行于 x 轴)射入这一玻璃介质, 将产生怎样的光线簇? 或者, 先考量另一条光线从 $y = \Delta$ 高度处射入, 其在玻璃中的径迹与本题结果比较有什么变化?

1.7 如图所示, 一点源 S 发出球面波, 经透镜聚焦于 S' 点. 一光阑插入此光场, 光阑上开有两个小孔 O 和 Q 作为次波源, 发出次波而到达像面. 距离 OS' , QS' 分别表示为 z_0 和 z ; 距离 OP , QP 分别表示为 r_0 和 r . 设光程差 $(z - z_0) = \lambda/6$, 光程差 $(r_0 - r) = \left(10 + \frac{1}{4}\right)\lambda$. 问:

- (1) 两个次波源 O 与 Q 之间是否有相位差? 如有, 试求之.
- (2) 到达 P 点的两个次级扰动之间是否有相位差? 如有, 试求之.



题 1.7 图

解 (1) 这两个次波源之间是存在相位差的, 我们可根据物像等光程性作出此判断. 设次波源 O 与 Q 的相位分别为 $\varphi_0(O)$ 与 $\varphi_0(Q)$, 其差值

$$\delta_0 = \varphi_0(Q) - \varphi_0(O) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(L(SQ) - L(SO)),$$

根据物像等光程性,

$$L(SQ) + L(QS') = L(SO) + L(OS'),$$

于是前场光程差被转化为后场光程差如下,

$$L(SQ) - L(SO) = L(OS') - L(QS') = z_0 - z = -\frac{\lambda}{6},$$

故
$$\delta_0 = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

这表明点源 Q 的相位超前点源 O 的相位有 $\pi/3$.

(2) 决定到达场点 P 的两个扰动之相位差 $\delta(P)$ 有两个因素, 一是点源之相位差 δ_0 , 二是后场传播的光程差所导致的相位差 $\delta'(P)$, 即

$$\delta(P) = \delta_0 + \delta'(P),$$

这里,

$$\delta'(P) = -\frac{2\pi}{\lambda}(r - r_0) = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(-10\frac{1}{4}\right)\lambda = 20\frac{1}{2}\pi,$$

故

$$\delta(P) = \frac{\pi}{3} + 20\frac{1}{2}\pi = 20\frac{5}{6}\pi, \quad \text{即} \quad \delta_{\text{eff}}(P) = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ.$$

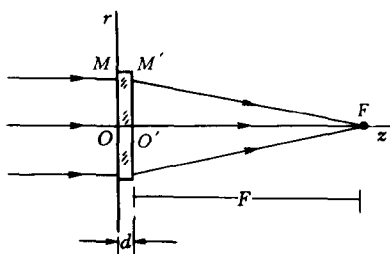
本题旨在为今后处理光波衍射问题提供概念储备.

1.8 如图所示, 由变折射率材料制成的微透镜被用以聚焦平行光束, 其折射率分布 $n(r)$ 关于 z 轴对称. 现要求其焦距为 f , 且 f 值远大于微透镜之孔径 a , 而 a 又远大于微透镜之厚度 d .

(1) 试定性分析此折射率变化函数 $n(r)$ 随 r 增加是降低还是提高?

(2) 试定量导出 $n(r)$ 函数, 设轴上折射率值为 n_0 .

解 本题应当从物像等光程性出发求解. 考虑一条轴距为 r 的光线 ($MM'F$), 其光程为 $L(MM'F)$, 而轴光线之光程为 $L(OO'F)$.



题 1.8 图

等光程性要求

$$L(MM'F) = L(OO'F),$$

即 $L(MM') + L(M'F) = L(OO') + L(O'F),$

$$n(r)d + \overline{M'F} = n_0 d + f, \quad (1)$$

这里已经考虑到此微透镜甚薄, 即 $d \ll a$, 以致点 M' 与 M 等高.

(1) 从几何上显然可以看出 $\overline{M'F} > f$, 故 $n(r) < n_0$ 方能满足方程(1), 这表明该材料的折射率 $n(r)$ 随 r 增加而递减.

(2) 目前微透镜孔径 $a \ll f$, 满足了傍轴条件, 于是

$$\overline{MF'} = \sqrt{f^2 + r^2} \approx f + \frac{r^2}{2f},$$

即 $\overline{MF'} - f \approx \frac{r^2}{2f},$

代入(1)式得

$$n(r) = n_0 - \frac{r^2}{2fd}. \quad (2)$$

这表明该微透镜材料的变折射率函数 $n(r)$ 呈现二次抛物线型. 当今制备这种二次函数型的变折射率材料的工艺已臻成熟.

(3) 释疑: 可能会有一个疑问, 既然折射率 $n(r)$ 仅沿横向 r 方向变化, 而沿轴向无变化, 这似乎相当于沿轴向系均匀介质, 那么一束平行于轴向的光束入射, 为什么不照直前进, 而是拐弯且聚焦?

这涉及到对“波场”的一个基本认识. 孤立的一条光线实际上是不存在的, 与一条光线相联系的有一个横向小波前 $\Delta\Sigma$. 如果像本题这样, 波前上方折射率较小, 则其次波速度稍快于波前下方次波速