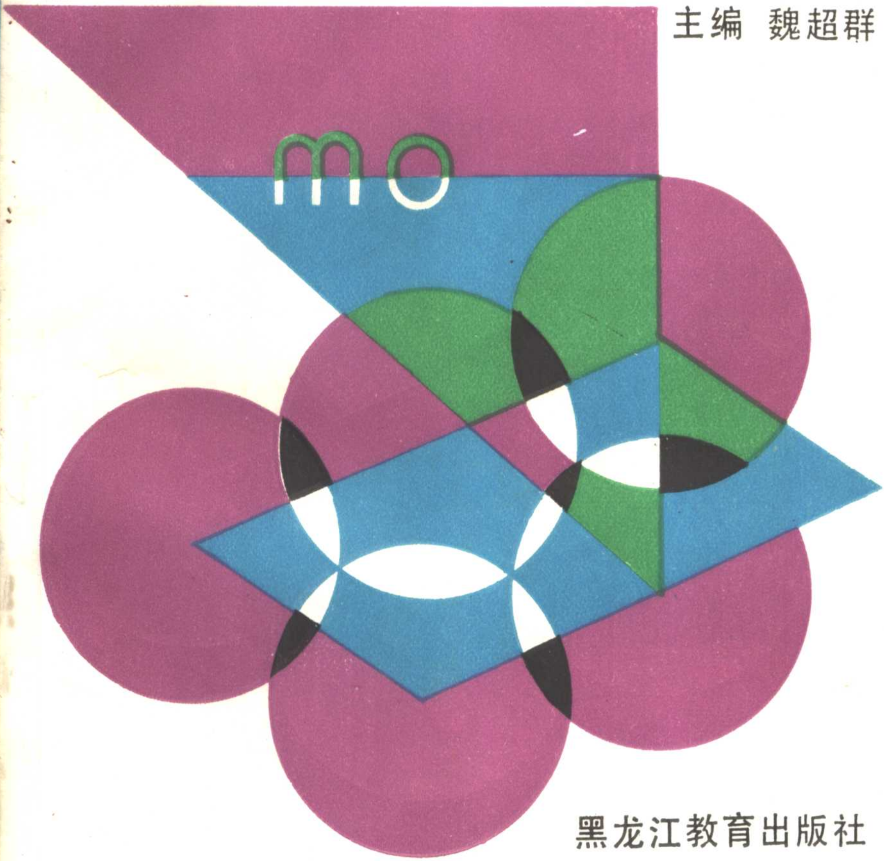
数学奥林匹克教练丛书

（初中一年级用）

主编 魏超群



黑龙江教育出版社

数学奥林匹克教练丛书

初中一年级用

主编　魏超群

黑[illegible]育出版社

1991年·哈尔滨

数学奥林匹克教练丛书

初中一年级用

主编　魏超群

责任编辑：韩殿发

封面设计：冯春兰

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市道里区九站街1号)
哈尔滨龙华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张 5.75·字数 120 千
1991 年 7 月第 1 版·1991 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—13,421

ISBN 7-5316-1434-0/G·1065　　定价：2.00元

前　言

数学竞赛是数学课外活动的主要形式之一，它可以扩大学生的视野，锻炼学生的智慧，帮助学生理解数学在现实生活、生产、科技中的地位和作用，促进学生个性品质的形成和数学才能的发挥，有利于培养人才。

数学竞赛活动在世界各国都很活跃，迄今为止，国际数学奥林匹克（IMO）已经进行了31届比赛。自1985年我国首次参加第26届“IMO”以来，逐年取得优异的成绩，现已进入世界强国之列。为使这项活动更加深入、广泛地开展，有计划分层次地对不同年级的学生进行训练，我们编写了《数学奥林匹克教练》丛书。全书共三册，分别供初中一、二、三年级使用。

本套教练丛书以《中学数学教学大纲》为依据，参照《数学竞赛大纲》（草案），以现行初中代数、几何课本为基础，考虑到学生的实际水平，通俗易懂地渗透数学思想、数学方法，强化数学技能与技巧的训练，培养学生既能提高数学成绩，又能掌握参加各类数学竞赛的基本常识和解题要领。

每册教练书按相应的教科书内容，同步精选专题，介绍基本原理，范例与方法，给出相关的练习题与答案。

参加本册编写的原作者，刘振山、李国华、金广成、谢

永达、李成宏、徐隆茂、曹德厚、沈长亮、李长胜。在原书的基础上，马守诚、艺飞、吕品又进行了重新编写。在此对原作者表示感谢！

借本书出版的机会，敬请广大读者提出批评指正，我们致以谢意！

编者

1991年1月

目　录

一 整 数

数是我们迈进数学大门的第一步．于是自然数、整数、……就走过来了，它们的进一步发展则成为数学的一个重要分支——数论．数论是数学王国里一座绚丽多彩的大花园．在这里开放着无数朵奇异的鲜花，如世界知名的哥德巴赫猜想、费尔玛猜想、……，吸引了古今中外的许多知名学者为她们的灿烂开放贡献了宝贵的一生．我国古今数学家在这方面也有过卓绝的贡献，如我国古代的勾股定理、孙子定理、圆周率、……等．现代数学家华罗庚、陈景润、王元、……在哥德巴赫猜想问题的研究上，在世界上都处于领先地位，这种事例不胜枚举，在这一专题里我们想就初一同学能够接受的一些最基础的，也是非常有兴趣的，又是近年数学竞赛经常接触到的知识向同学们作一些简单的介绍，作为同学们走进这门殿堂的第一步，希望同学们能用智慧与汗水，浇灌这美丽的百花园，为我们伟大祖国的数学的未来作出自己的贡献．

（一）基本原理

1．奇数和偶数的基本性质

我们通常把自然数（正整数）分为两部分，其中被 2 除后余数为 1 的称为奇数，能被 2 整数（即余数为 0 ）的称为

偶数。

0作为偶数。

负整数同样可以分为负奇数和负偶数。

通常用 $2k-1$ 或 $2k+1$ 表示奇数，用 $2k$ 表示偶数（k为整数）。

对于奇偶数有以下明显的性质：

（1）偶数±偶数=偶数；

（2）奇数±奇数=偶数；

（3）奇数个奇数的和是奇数；

（4）n个整数的积，只要有一个数是偶数，则积必是偶数；

（5）n个奇数的积，仍是奇数；

（6）如果n个整数之和是偶数，则和项中出现奇数的个数必是偶数个；

（7）偶数若能被奇数整除，则商必是偶数；

（8）奇数除以偶数，永远不能整除；

（9）任两个连续自然数n、$n+1$，必为一奇一偶，且积$n(n+1)$必是偶数；

（10）对任一整数a，有：①a加偶数与a同奇同偶；②a加奇数与a不同奇偶；③任三个整数a、b、c中，必有两数同奇偶。

2．整数整除的性质

整数a除以整数b，除得的商正好是整数而没有余数叫做a能被b整除。

（1）一个数的约数是有限的，其中最小的约数是1，最

大的约数是它本身；

（2）一个数的倍数的个数是无限的，最小的倍数是它本身，最大的倍数不存在；

（3）一个整数的个位是偶数，则它一定能被2整除；

（4）一个整数的各位数字之和能被3整除，则它一定能被3整除；

（5）一个整数的个位数字是0或5，则它一定能被5整除；

（6）个位数字以前的数字组成的数与个位数字的2倍的差能被7整除，则它一定能被7整除；

（7）一个整数的各位数字之和能被9整除，则它一定能被9整除；

（8）一个整数的奇位数字的和与偶位数字的和的差能被11整除，则它一定能被11整除。

3. 完全平方数的性质

（1）偶数 $n=2k$ 的平方数，一定是4的倍数；

（2）奇数 $n=2k+1$ 的平方数，$(2k+1)^2=4k(k+1)+1$ 一定是 $8N+1$ 形的整数；

（3）平方数的个位数字只能是0、1、4、5、6、9。

4. 质数和合数

一个大于1的整数 a，如果除了1和本身以外不能再被其它正整数整除时，这个正整数叫做质数（或素数）；一个正整数除了1和本身外，还能被另外的正整数整除时，这个正整数叫做合数。于是全体正整数可以分为：数1、质数和合数三类。

质数、合数是整数中的重要概念。由于质数分布的不规则性，人们至今还没有一个一般方法去判断哪些自然数是质数。

除有关定义外，关于质数，我们要了解和掌握以下两个结论：

（1）算术基本定理：任何大于1的自然数都可以分解成质数的乘积，如果不考虑这些质因数的顺序，这种分解的方法是唯一的。

（2）质数中无最大数，即不存在最大的质数。

5． 最大公因数

同时整除两整数 m 与 n 的整数称为这两个数的公因数。

若整数 d 是整数 m 与 n 的一个公因数，并且它能被 m 与 n 的其它公因数都整除，则称 d 是 m 与 n 的最大公约数。

6． 互质数

若两个整数 m 与 n 的最大公约数是1，则称这两个整数互质。

7． 最小公倍数

若整数 m、n 均能整除整数 a，则称 a 是 m 与 n 的公倍数。

若整数 a 是 m 与 n 的一个公倍数，而且它均整除 m 与 n 的其它公倍数，则称 a 是 m 与 n 的最小公倍数。

8． 同余

整数 a 被整数 m 除，商数是 t，余数是 r，必有关系式：

$$a=m\times t+r，0\leqslant r<m。$$

如果整数 a 和 b 分别除以正整数 m 所得的余数都是 r，即 $a=mt+r$，$b=ms+r$（t、s 为整数），那么称 a、b 对于模 m 同余。如 $18\div5$ 的余数是 3，$33\div5$ 的余数也是 3，那就称 18与33 对于模 5 同余。由于 $18=5\times3+3$，$33=5\times6+3$，所以容易推想到，对于模 5 而言，与18同余的一切整数可以表示为 $5\times t+3$（t 为整数），把所有这样的整数作为一类，称为以 5 为模的一个同余类，对于模 5 而言，一共可有五个同余类，它们的余数分别是 0、1、2、3、4. 这五个同余类可以分别表示为：$5t$，$5t+1$，$5t+2$，$5t+3$，$5t+4$（t为整数）.对于任何一个整数来说，它总是属于这五类中的一类，并且也只能属于一类，这是不言而喻的。

一般地，对于模 m而言，应当有 m个同余类存在，分别表示为：

mt，$mt+1$，$mt+2$，…，$mt+(m-1)$，（t为整数）.任何一个整数必定属于并且也仅属于其中的一个同余类。

这样，一切整数就可以按照模 m来进行同余分类，把无数个整数分成有限个同余类，给我们解决问题提供了方便.特别地，按模 2 分类，就得奇数与偶数两类；如按模 3 分类，可以得如下形式表示的三类：$3t$，$3t+1$，$3t+2$（或 $3t-1$），（t 为整数），等等.

（二）范例与方法

例 1 若某数 N 接近 2000，小于 2000，能被 3 整除；被 5 除余 4；被 7 除余 1，求 N.

思路 在能被 3、5 整除的数中，即 3、5 的公倍数中找

出被7除余1的最小数；在能被3、7整除的数中，即3、7的公倍数中找出被5除余4的最小数，再加上3、5、7的最小公倍数105乘以k（k是正整数）就得出满足这个题目的数。

解：能被3、5整除，且被7除余1的最小数是15；能被3、7整除，且被5被余4的最小数是84。因此满足这个问题的数N必满足下列条件：

（1）$N=105k+15+84$（k是整数）；

（2）$N<2000$。

由上述条件可得：

$$105k+15+84<2000,$$

$$k<\frac{1901}{105}=18\frac{11}{105},$$

$\therefore$ $N=105\times18+15+84=1989$。

$\therefore$ 满足这些条件的数$N=1989$。

说明 此题的解法，可以推广到这一类问题，即一个数被几个数除，余几的问题，以3个数为例，可从其中两个数的公倍数中，找被第三个数除恰好余数满足条件的最小数，将几个最小数之和与这三个数的最小公倍数的k倍相加，即得出满足题意的所有数。

这是中国古代最典型的问题之一，也称作韩信点兵，解决这个问题的办法也称作“孙子定理”——中国剩余定理。

韩信点兵：有兵一队，若列成五行纵队，则末行一人；列六行纵队，则末行五人；列七行纵队，则末行四人；列十一行纵队，则末行十人。求兵数？

解：被6、7、11整除，被5除余1的最小数是1386；被

5、7、11整除，被6除余5的最小数是1925；被5、6、11整除，被7除余4的最小数是1320；被5、6、7整除，被11除余10的最小数是2110。于是

$$N = 1386 + 1925 + 1320 + 2100 = 6731,$$

$$6731 - 2310 \times 2 = 2111,$$

所以得 $N = 2111 + 2310k$。

即兵数是2111或 $2111 + 2310k$。

例2 不论 n 是什么整数，$n^5 - n$ 能被30整除。

思路 因为 $30 = 2 \times 3 \times 5$，所以我们需分别说明 $n^5 - n$ 能被2、3、5整除即可。

这类问题的解法不少，其中常用因式分解的方法，把式子写成几个连续整数的乘积，再进行讨论。

有一个显见的结论：k 个连续整数的乘积一定能被 k 整除。

解： $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$$= (n-1)n(n+1)(n^2+1).$$

显然前三个因式 $n-1$、n、$n+1$ 是三个连续整数，因为在两个连续整数中至少有一偶数，所以在三个连续整数中至少有一个偶数，所以它们的积必能被2整除。

又三个连续整数中一定有一个能被3整除的整数，所以它们的积必能被3整除。

而2、3互为质数，所以原式能被6整除。

改写原式 $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2 - 4 + 5)$

$$= (n-1)n(n+1)(n^2-4) + 5(n-1)n(n+1)$$

$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$$

第一部分是 5 个连续整数的乘积，能被 5 整除，第二部分显然是 5 的倍数，其和自然也是 5 的倍数。

由以上可得：不论 n 是什么整数，n^5-n能被 30 整除。

说明 用因式分解的方法，把一个多项式分解为若干个因式之积的形式，并且使这些因式中恰表现为 n 个连续整数的积的形式，从而根据整数的特征判断多项式能被 n 整除是解这类问题的常见方法。

大家不妨试一试，用这个办法解下一道题：

若 n 是自然数，则 $n^4+2n^3+11n^2+10n$ 能被 24 整除。

提示：原式 $=(n-1)n(n+1)(n+2)+12n(n+1)$。

例 3 除以 5 时余数为 2 或 3 的整数，是不是完全平方数。

思路 整数是无限的，要想逐个验证这是不可能的，但是可以采取适当的方法把全体整数进行分类，化无限为有限，然后将有限的几类逐一平方看余数的情况，然后结合问题作出结论。

解：设 k 为整数，全体整数可分为以下五类：

$$5k、5k+1、5k+2、5k+3、5k+4。$$

即被 5 除余数为 0、1、2、3、4 的五种情况。现在把它们逐一平方：

$$(5k)^2=5(5k)^2+0;$$

$$(5k+1)^2=5(5k^2+2k)+1;$$

$$(5k+2)^2=5(5k^2+4k)+4;$$

$$(5k+3)^2=5(5k^2+6k+1)+4;$$

$$(5k+4)^2=5(5k^2+8k+3)+1.$$

根据上述情况可知，完全平方数除以5时的余数只能是0、1、4，决不会是2或3。所以除以5时，余数为2或3的整数不可能是完全平方数。

说明 整数、自然数是无限的，采取分类思想往往能化无限为有限，分类之后而逐一验证是一种常用的方法，大家不妨试一试下题。

若n为任意正整数，则$n(n^2-1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$能被7整除。

提示：按被7除将正整数分为七类，再仔细想一想如何验证。

例4 若a、b为任意自然数，$25a^2-5b\pm3$是不是完全平方数。

思路 利用整除性质，看$25a^2-5b\pm3$的末位数与完全平方数的末位数对比，看它是不是完全平方数。

解：$25a^2-5b=5(5a^2-b)$能被5整除，所以它的末位数必是0或5，因此$25a^2-5b\pm3$的末位数就只能是2、3、7、8，而完全平方数的末位数是0、1、4、5、6、9，

所以$25a^2-5b\pm3$不是完全平方数。

说明 验证一个数是不是完全平方数，除例3中考查它被几除时的余数特征之外，一般的情况是看它的末位数是否符合完全平方数的末位数的特征，这也是一种常用的解题方法。同学们不妨依此规律试一试下题。

有没有两个奇数的平方和等于1988？

提示：考察一下奇数的平方的末位数的特征。

例5 求这样的素数，当它加上10和14时仍为素数。

思路 这是一个找符合条件的素数问题，由于素数的分布无一定规律，因此我们从最小的素数试验起，希望能找到所要求的素数，然后再加以逻辑的证明。

证： $\because$ $2+10=12$，$2+14=16$，$\therefore$ 素数2不适合；

$\because$ $3+10=13$，$3+14=17$，$\therefore$ 素数3合乎要求；

$\because$ $5+10=15$，$5+14=19$，$\therefore$ 素数5不适合；

$\because$ $7+10=17$，$7+14=21$，$\therefore$ 素数7不适合；

$\because$ $11+10=21$，$11+14=25$，$\therefore$ 素数11不适合；

… … …

从上面观察，3合乎要求。但符合题设的素数是否只有3，这必须加以证明。证明除3以外的所有正整数加上10和14均不能是素数。为此把正整数按模3同余分类，即$3k-1$，$3k$，$3k+1$（k为正整数）

$\because$ $(3k-1)+10=3k+9=3(k+3)$是合数，$(3k+1)+14=3k+15=3(k+5)$是合数，

$\therefore$ $3k-1$和$3k+1$这两类整数中的素数加上10和14后不能都是素数。

因此在$3k-1$，$3k+1$两类整数中的素数加上10和14后当然也就不能都是素数。

对$3k$这类整数，只有在$k=1$时$3k$才是素数，其余均为合数。

所求的素数只能是3。

例6 若1782，2628，1386，2044四个整数都被同一个正整数相除，所得的余数相同，但不为零，求除数和余数

思路　因为是求除数和余数的问题，故可考虑用带余式。

解：设除数为 m，余数为 r（m、r 为正整数，且 $r<m$），则

$$1782=ma+r, \quad ①$$
$$2628=mb+r, \quad ②$$
$$1386=mc+r, \quad ③$$
$$2044=md+r, \quad ④$$

（a、b、c、d 为正整数）。

②－①，得 $(b-a)m=846$，

④－①，得 $(d-c)m=658$。

846，658 都能被 m 所整除，所以 m 是 846 与 658 的公因数，而 $846=2\times3^2\times47$，$658=2\times7\times47$，所以 $m_1=2$，$m_2=47$，$m_3=94$。

当 $m_1=2$ 时，$r=0$，$m_1=2$ 舍去。

当 $m_2=47$ 时，$r=43$，

当 $m_3=94$ 时，$r=90$。

故除数为47，余数为43；或除数为94，余数为90。

例 7　试证方程 $x^2-5y^2=17$ 无整数解。

思路　如将原方程化为 $(x+\sqrt{5}y)(x-\sqrt{5}y)=17$，则从方程的左式可以看出，无法讨论适合原方程的整数 x 及 y。因此对整数 x、y 的可能取值情况可改为按 5 的倍数分类，即 $5k-2$，$5k-1$，$5k$，$5k+1$，$5k+2$（k 为整数，以下同）来考虑。

证：(1) 如 x 为 $5k$ 形式的整数，代入原方程，有