查理斯密

大代數學

連江陳　文
南海何崇禮　編譯

商務印書館發行

查理斯密

大代數學

上卷

目錄

		頁
第壹編	定義	1
	例題 A	10
第貳編	本則名數量,正負數量,絕對量	12
	加法	14
	減法	15
	例題 B	18
	乘法,指數之法則	19
	例題 C	24
	除法	25
	例題 D	28
	多項式之公式	29
第參編	加法	33
	減法	34
	括弧用法	35
	例題一	37
第肆編	乘法	39

		頁
	重要之公式…	.45
	例題二…	.55
第伍編	除法	…59
	除法定義之擴張	…63
	恆等式…	…65
	例題三…	…65
第陸編	因子分割法,公式用法	…68
	例題四	…72
	普通二次式之因子,係數之關係,項之整列及集合	…73
	例題五	…83
	整除式之定理 增補之問題…	…85
	輪換次序,等勢式	93
	例題六…	..97
第陸編補	等勢式(荷盧奈脫三十四編拔粹)…	…101
	例題(三十四a)	…101
	例題(三十四b)	…102
第柒編	最高公因子 例題E	…103
	兩多項式之最高公因子	…104
	例題七…	115
	最低公倍數 例題F	…115
	兩多項式之最低公倍數 定理	.117
	例題八…	..118
第捌編	分數 通分母	…120
	分數之加法…	…123
	分數之乘法…	…126
	分數之除法…	…127

		頁
	分數之定理　定理之應用 … …	…129
	例題九 … .. … …	…134
第玖編	方程式　一未知數量 … … …	…140
	一次方程式之解法　例題G … ..	…142
	因子分割法之應用 … … ..	…145
	二次方程式　例題H … … ..	…147
	二根之詳論　特別之例… … ..	…150
	不整方程式… … … … ..	…153
	無理方程式… . … … …	…158
	定理　根及係數之關係… … …	…160
	二次三項式之值 … … … …	…167
	例題拾… … .. … … …	…173
	高次方程式… … … … …	…178
	反商方程式… … … … …	…180
	二項方程式　一之立方根 … …	…183
	例題十一 … … … … …	…186
第玖編補	荷虛及奈脫第九編拔粹 … …	…189
	二次三項式之諸例 … … …	…189
	例題九(b) … … .. . …	…189
	荷虛及奈脫第十編拔粹 … …	…190
	雜方程式　例題十(a) . … …	…190
第拾編	聯立方程式… … … … …	…191
	十文字之法… … .. … …	..193
	一次聯立方程式解法之論　例解 …	…196
	例題十二 … … … .. …	.. 202
	二次聯立方程式　例解… . …	..206
	例題拾三 … … .. … …	..212

		頁
	諸未知數量 例解 例題十四	...213
第拾壹編	問題 例解	...224
	例題十五	...228
第拾貳編	雜定理及雜例題	...234
	消法 例解	...234
	文字值之制限	...238
	例題I	...240
	三次恆等式...	...241
	例解	...242
	定義 雜例	...244
	例題十六	...247
第拾貳編補	荷盧氏奈脫氏第三十四編拔粹	...257
	消法之例	..257
答	... .	259

查理斯密
大代數學
上卷

第壹編

定義 (Definitions)

(1). 代數學(Algebra) 仍如算術 (Arithmetic) 亦論數之學科也。算術之數。以定值之數字 (如 1, 2, 3, 4, 等) 表之。代數之數。以任意之文字 (如 $a, b, c, d,$ 等) 表之。故代數學無論何數。皆可以文字為代表。惟在一演式中。一文字祇代表一數。學者不可不知。

代數學所用之文字。原為任何數之代表。故無論此數為如何之數。其結果恆同。

〔增補〕 如 6 加 6 其結果祇為 12。若 a 加 a。則無論 a 為如何之數。其結果恆為 a 之二倍。

〔增補〕 代數學表數之文字。大抵用小羅馬文字 (即 $a,b,c,d,e,f,g,h\cdots\cdots x,y,z$) 然亦有用大羅馬文字。(即 $A,B,C\cdots\cdots Y,Z$) 及小希臘文字 (即 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots\cdots$) 者。

(2). 數 (Numbers) 代數學所論之數。無論整數,分數皆可。凡名數量。如物價,長,面積,及時間等。均各以所含同類單位之倍數計算。

如有$4, \frac{a}{3}, 5\frac{1}{4}$，等諸長。其單位必爲一尺，一步，一里或他定長。若長爲4。此長必爲4尺，4步，4里，或他定長之4倍。他項類推。如是。代數學中所計之量。原祇論量之單位數。故在代數學中。其代表量之記號。無論爲數字，爲文字。恆代表其單位數。故書中所謂數。言語中每謂之量(Quantity)。

〔增補〕〔注意〕 此後於必要之款。恆加以()括號。如第3款爲必要者。故其式爲(3)。

(3). 加號 +（讀爲〔不拉式〕(Plus)。或讀爲加）置於一數之左。示此數加入左邊之數內。

如$6+3$加號在3之左。故示以3加入左邊之6內。約言之。即加3於6。又$6+3+2$，即以3加於6。其結果爲$6+3$。再以2加於$6+3$。約言之。即加2於其結果。依同樣之理。如$a+b$，即以b所代表之數。加入a所代表之數內。約言之。即以b加於a。又$a+b+c$，即以b加入a。其結果爲$a+b$。再以c加入$a+b$。約言之。即加c於其結果。

(4). 減號 −（讀爲〔買那式〕(Minus)或讀爲減）置於一數之左。示由左邊之數內減去此數。

如$6-3$。減號在3之左。即由6內減去3。又$6-3-2$，即由6內減去3。其所得之結果爲$6-3$。再由$6-3$內減去2。依同樣之理。如$a-b$，即由a內減去b。又$a-b-c$，即由a內減去b。其所得之結果爲$a-b$。再由$a-b$內減去c。其

次序與加法同。又加號，減號，並用。其作用亦同。如 $a+b-c$，卽加 b 於 a。其所得之結果爲 $a+b$。再於 $a+b$ 內減去 c。

〔法則〕 如是，凡加減之運算。始於左而次及於右。

〔增補〕 如 $9+3+2=12+2=14$。爲由左而右者。

又 $9+3+2=9+5=14$。爲由右而左者。

加法由右而左。其所得之結果雖無差。然久之成爲習慣。用於減法則大謬。

如 $9-3-2=6-2=4$。爲由左而右者。

又 $9-3-2=9-1=8$。爲由右而左者。

如是則大謬誤。據此式之理由。乃由9內減去3。其結果爲6。再由6內減去2。其結果爲4。若由右而左，其結果爲8。故誤。

又 $9+3-2=12-2=10$。爲由左而右者。

$9+3-2=9+1=10$。爲由右而左者。仍與正答10符。

然 $9-3+2=6+2=8$。爲由左而右者。

$9-3+2=9-5=4$。爲由右而左者。不與正答8符。

〔注意〕 (5) (6) 兩款與 (3) (4) 兩款同理。

(5) <u>乘號</u> × (讀爲〔因都〕(Into) 或讀爲乘) 置於兩數之間，示以右數乘左數。如 $a\times b$，卽以 b 乘 a。又 $a\times b\times c$，卽以 b 乘 a。其結果爲 $a\times b$。再以 c 乘 $a\times b$。

惟文字與文字相乘，或數字與文字相乘。恆將文字與文字（或數字）連接而乘號從省。如 $a\times b$，可書爲 ab。

$a\times b\times c$ 可書爲 abc, $3\times x$ 可書爲 $3x$, 然數字與數字間之乘號。則決不能省。省之必生大變動。如 $3\times 6=18$。若省其乘號。以 36 爲 3×6 之代表，則成算術中所表之三十六。如是，即生大變動。有時以(點)代 × 號。而將此點置於左右兩數中。或兩文字之底線上。以與在數字上方之小數點區別。如 $a\times b\times c$ 與 $a\cdot b\cdot c$ 及 abc 二式相同。即 a 被 b 乘。其結果爲 $a\times b$。又以 c 乘之。

〔餘論〕 數字與數字之加號。有時從省。

如 $60+3$ 可書爲 63。$6+\frac{3}{10}$ 可書爲 $6\frac{3}{10}$。然 $8+3$ 決不能書爲 83。

(6). <u>除號</u> ÷ (讀爲〔稗〕(Divided by) 或讀爲除) 置於兩數字之間。示前數被後數除。而前數謂之被除數(或名爲實數)。後數謂之除數(或名爲法數)。如 $a\div b$。即 a 被 b 除。又 $a\div b\div c$, 即 a 被 b 除。其結果爲 $a\div b$, 而 $a\div b$ 又被 c 除。

〔增補〕 加減二號並用。其作用相同。乘除二號並用。其作用亦相同。如 $a\div b\times c$。即 a 被 b 除。其結果爲 $a\div b$。又以 c 乘 $a\div b$。

又 $a\times b\div c$. 即以 b 乘 a。其結果爲 $a\times b$。而 $a\times b$ 又被 c 除。

〔法則〕 如是。乘除運算之法。亦始於左而次及於右。與加減之運算同。加減之運算。與乘除之運算同樣。故加減乘除之運算。恆始於左而次及於右。

〔增補〕如 $a-b\times c+e\div d$。其運算別有說明。見第16章。

(7). 積 (Product) 二或二以上諸數相乘。其結果稱爲諸數之連乘積 (Continued Product)。或單稱爲積。而相乘之諸數。稱爲積之因子 (Factor)。

諸因子可任分爲二項。其一項因子之積。恆爲他項因子積之係數 (Co-efficient)。如 $3abx$。有 $3, a, b, x$ 四因子。分此四因子爲二項。若 3 與 abx, 則 3 爲 abx 之係數。abx 亦爲 3 之係數。又若 $3ab$ 與 x, 則 $3ab$ 爲 x 之係數。x 亦爲 $3ab$ 之係數。其他類推。

〔注意〕係數多用數字係數。

(8). 方乘 (Power) 凡積由同一因數疊乘而生者。其積謂之此因數之方乘。如 a 與 a 相乘之積爲 aa。稱爲 a 之二方乘。又 aaa 稱爲 a 之三方乘。以下類推。有時稱 a 爲 a 之一方乘。而 aa 稱爲 a 之平方 (Square)。aaa 稱爲 a 之立方 (Cube)。

(9). 指數 (Index) $aa, aaa, aaaa$ 等諸方乘。可代以簡便記法。如用 a^2 代 aa。用 a^3 代 aaa。用 a^4 代 $aaaa$。而 $aaaaa$……………。設爲以 a 乘 n 回之方乘。則記以 a^n (n 爲整數)。小數字 2, 3, 4, 及小文字 n。恆記於 a 之右肩。以示因子 a 之次數。故 a^3b^2 用以代 $aaabb$。此乃通用之法式。

小數字及小文字。乃指出因子次數之記號。故謂之指數。如 a^n 蓋謂此因子 a 倍至 n 次。或 a 之 n 乘方。n 卽指數。然 a 之一乘方。不必書 a^1。單書 a。

(10). 方根(Root) 某數之平方。等於a。此數卽爲a之平方根。

〔增補〕 如4之平方(卽4^2)等於16。則4卽16之平方根。

平方根(Square Root)之記號。恆以$\sqrt[2]{}$示之。然$\sqrt[2]{}$常略爲$\sqrt{}$。故$\sqrt{a}$爲a之平方根。$\sqrt{16}$爲16之平方根。而$\sqrt{16}=4$。因$4^2=16$。

某數之立方等於a。某數卽a之立方根。

〔增補〕 如3之立方(3^3)等於27。3卽27之立方根。

立方根(Cube Root)之記號。恆以$\sqrt[3]{}$示之。故$\sqrt[3]{a}$卽a之立方根。$\sqrt[3]{27}=3$。卽27之立方根。又四乘根之記號爲$\sqrt[4]{}$。五乘根之記號爲$\sqrt[5]{}$。n乘根之記號爲$\sqrt[n]{}$。故$\sqrt[4]{a}$爲a之四乘根。$\sqrt[5]{a}$爲a之五乘根。$\sqrt[n]{a}$爲a之n乘根。但n以整數爲限。根號$\sqrt{}$原由臘丁文Radix 卽根字)之首字母r變化而成。故此號稱爲根號(Radical Sign)。

(11). 不盡根(surd)不能求盡之根。謂之不盡根。或謂之無理量(Irrational sign)。如$\sqrt{16}$等於4。而$\sqrt{7}$及$\sqrt[3]{4}$無盡。故謂之不盡根。不盡根無庸求其略近數。如求7之平方根。依算術求平方根之法。雖能求其稍精密之略近數2,6457……。然在代數學內。則無庸求其略近數。何則。因以$\sqrt{7}$自乘。卽成爲7。故也。

(12). 代數式(Algebraical Expression) 諸代數記號(卽文字,數字,符號)集合之式。稱爲代數式(或單謂之式)。

〔增補〕 如$7a+b^2-cd$及$\sqrt{a+2}$乃代數式。

又如$+\times6-\div a\times-b$無意義集合者。非代數式。

項(Terms) 代數式中各部以＋或－之號連接者。謂之項。如$2a-3bx+5cy^2$代數式。卽爲有$2a,-3bx,+5cy^2$三項之式。

〔增補〕 以×或÷連接之各部不得謂之項。如$5+6-7$，乃以$5,+6,-7$，爲三項。若$5\times6\div7$，決不能以$5,\times6,\div7$爲三項。乃以全部分爲一項。

如$2a-3bx+5cy^2$，卽$2\times a-3\times b\times x+5\times c\times y\times y$，其在＋及－之間者乃爲項。而在×之間者則非項。

(13). 同類項(like terms) 於兩項中惟數字係數相異者謂之同類項。如$a, 3a$，爲同類項。$5a^3b^2c, 3a^3b^2c$，亦爲同類項。

〔增補〕 又$5a^2b^3c, 3a^3b^2c$，非同類項。乃異類項。何則。$5a^2b^3c$式乃a因子二個。b因子三個。c因子　個。$3a^3b^2c$式。乃a因子三個。b因子二個。c因子一個。a及b因子之倍數不同。故相異。又$5a^2b, 5ax$，亦爲異類項。以因子不同故也。

(14). 單項式(Monomial Expression) 祇有一項之代數式。謂之單項式。如$3ab, 7\div6\times8$，爲單項式

多項式(Multinomial Expression) 二項以上之代數式。謂之多項式。如$a+b, a-bc$，爲二項式(Binomial Expression)，$a+b+c, ax^2+bx-c$爲三項式(Trinomial Expression)。

(15). 等號$=$，(讀爲〔伊苛勒〕(Equal) 或讀爲等於) 置於兩代數式之間，示兩式相等。

〔增補〕 如$a=b$示a等於b。$a+b=c$示$a+b$等於c。

大號$>$，置於兩代數式之間。示左式較右式大。如$a>b$，示a較b大。小號$<$，置於兩代數式間。示左式較右式小。如$a<b$，示a較b小。不等號$\neq$，置於兩代數式間。示左式與右式不相等。如$a\neq b$，示a與b不相等。卽a較b大，或a較b小。有時用$a\gtrless b$記之。

不大號$\ngtr$，置於兩代數式之間。示左式較右式不大，如$a\ngtr b$，示a較b不大。卽a較b小，或a等於b。有時用$a\leqq b$示之。

不小號$\nless$，置於兩代數式之間。示左式較右式不小。如$a\nless b$，示a較b不小。卽a較b大。或a等於b，有時用$a\geqq b$表之。

因號$\because$，置於代數式之前。卽因字之略號。

故號$\therefore$，置於代數式之前。卽故字之略號。

(16). 括弧(Brackets) 取一代數式爲一數。則以括弧括之，如$(a+b)c$，卽以a加於b，其結果爲$a+b$。再以c乘$a+b$。因以$a+b$ (卽以a加於b所得之數) 爲一數。故用括弧括之。又$(a-b)(c+d)$，卽由a減去b，其所得之結果爲一數。卽$a-b$。又以d加入c，以其所得之結果爲一數。卽$c+d$。然後以$c+d$乘$a-b$。又$(a+b)^2(c+d)^2$，卽以$c+d$之平方乘$a+b$之平方。

括弧有種種之形。如( ) { } [ ] 〔 〕等。

括線(Vinculum) 有時用括線——代括弧。

如用$a-\overline{b-c}$代$a-(b-c)$。又用$\sqrt{a+b}$代$\sqrt{(a+b)}$.

若一代數式中祇有根號無括線及括弧,則其根號單屬其後之第一數。如$\sqrt{2}a$,其意義乃指2之平方根。且以a乘$\sqrt{2}$。決非$\sqrt{2a}$或$\sqrt{(2a)}$。但$\sqrt{2a}$或$\sqrt{(2a)}$,則指$2a$之平方根。又$\sqrt{a}+x$,其意義乃指a之平方根。且以x加於$\sqrt{a}$。決非$\sqrt{a+x}$或$\sqrt{(a+x)}$。但$\sqrt{a+x}$或$\sqrt{(a+x)}$則指以x加於a。而取其總數之平方根。因以$a+x$爲一數,故用括線及括弧括之。又分數內分母與分子間之橫線。與括弧有同樣之作用。如以$\frac{a+b}{3}$代$\frac{1}{3}(a+b)$。但$\frac{1}{3}a+b$則非$\frac{a+b}{3}$。

〔注意〕 在代數式中。其自爲一數之各項。用以相加減。爲學者所最宜注意。然自爲一數之各項。與在括弧內之項相同。

如$a+bc-d\div e+b$式。原爲$a, +bc, -d\div e, +b$四項,必先以c乘b。然後能加。又先以e除d。然後能減。故$+bc$及$-d\div e$。當各視爲一項。卽與書作$+(bc)-(d\div e)$。同。由是,上之代數式。必變爲$a+(bc)-(d\div e)+b$。故以b,c之積加於a。其結果爲$a+bc$。然後減去e除d之數。再以b加於其餘數內。

〔增補〕 又 $15+6\times 8-36\times 4\div 18+72\div 9-1$

$$=15+(6\times 8)-(36\times 4\div 18)+(72\div 7)-1$$

$$=15+48-(144\div 18)+8-1=15+48-8+8-1$$

(法則)如是,加減乘除之運算。必先乘除然後加減。(參看第4款及第6款)

例 題 A

1. 求出以下諸代數式之數值。但 $a=1,b=2,c=3,d=4$.

(i) $5a+3c-3b-2d$, (ii) $26a-3bc+d$,

(iii) $ab+3bc-5d$, (iv) $bc-ca-ab$,

(v) $a+bc+d$ (vi) $bcd+cda+dab+abc$.

2. 求出以下諸代數式之數值。但 $a=3,\ b=1,\ c=2$.

(i) $2a^3-3b^2-4c^3$, (ii) $2a^2b-3b^3c^2$,

(iii) $\frac{1}{16}c^3-\frac{1}{2}b^3$, (iv) $a^3+3ac^2-3a^2c-c^3$,

(v) $2a^4b^2c-3b^4c^2a-2c^4a^2b$.

3. 求出以下諸代數式之數值。但 $a=3,b=2,c=1,d=0$.

(i) $(3a+4d)(2b-3c)$,

(ii) $2a^2-(b^2-3c^2)d$,

(iii) $a^3-b^3-2(a-b+c)^3$,

(iv) $a(b^2-c^2)+b(c^2-d^2)+d(a^2-b^2)$,

(v) $3(a+b)^2(c+d)-2(b+c)^2(a+d)$,

(vi) $\frac{2a^2}{b+c}-\frac{2b^2}{c+a}-\frac{2c^2}{b+d}+\frac{2d^2}{a+d}$

4. 求 $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{5ab}+c$, $\sqrt{(b^4c^2+b^2c^4)}$ 及 $\sqrt[3]{a^2+4b^2+4c^2}$ 之值。設 $a=5,\ b=4,\ c=3.$

5. 證 a^2-b^2 與 $(a+b)(a-b)$ 兩式互相等。

(i) 設 $a=2,\ b=1.$　(ii) 設 $a=5,\ b=3.$

(iii) 設 $a=12,\ b=5.$

6. 證 $a^3-b^3, (a-b)(a^2+ab+b^2)$ 及 $(a-b)^3+3ab(a-b)$, $(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$ 兩式互相等。

(i) 設 $a=3, b=2.$　(ii) 設 $a=5,\ b=1.$

(iii) 設 $a=6, b=3.$

第貳編

本則 (Fundamental laws)

(17). 名數量 (Concrete quantities) 凡名數量。皆以同類單位之倍數計算。旣述於第2款。兹無庸贅然其計算。更有種種區別。如計算時間。定刻中有過去未來之別。如計算運動一直線上有正向反向之分。又如計算貿易。其金額有贏朒進退。如計算財產。其價値有出入消長。諸如此類。不遑枚舉。如是。凡名數量。皆有相反對之二種。非用特別之記號。無從區別。

(18). 正數量及負數量 (Positive and Negative quantity) 凡名數量。無論為如何種類。其有 +4 者。則增其量之4單位。其有 −4 者。則減其量之4單位。如計人之財產(以圓為單位)。則 +4 為增其財產4圓。−4 為減其財產4圓。

如計人之借金。則 +4 為增其借金4圓。−4 為減其借金4圓。他如計人之利益。則 +4 為增4圓之利益。−4 為減4圓之利益(卽損金4圓)。又計人之損失。則 +4 為增其損失4圓。−4 為減其損失4圓(卽利金4圓)。

或在特別方向。計算其定點之距離量。則 +4 為在正方向4單位之距離。−4 為在反對方向4單位之距離。