一九五〇年北京市中學教員暑期學習會

自然科學講座

數學之部

中國科學院編印

…科學講座除數學之部以外，物理之部、化學之部、生物之部均已出版。物理之部定價 4,000元，化學之部 3,500 元，生物之部 4,000 元。新華書店總經售。各部之目錄如下：

物理之部

化學之部

生物之部

自然科學講座數學之部

編印者：中國科學院
發行者：中國科學院
總經售：新華書店
印刷者：新華印刷廠北京第一廠

(00001—10000) 一九五〇年十二月初版
(10001—15000) 一九五一年五月再版

定價 3,000元

科學通報

科學通報是中國科學院編印的一種月刊。它的內容主要的是國內科學工作的報導、科學界的動態、科學新知的介紹、中央人民政府科學政策的解釋、學術論著的評介以及國內外科學界的發明、發現、科學工作、科學建設、科學生活的消息等等。

這一刊物自從1950年5月創刊以來，讀者羣日益擴大，現在每期印行份數已達八千份。為了更好地服務於科學工作者和祖國所有愛好科學的人民，1950年底它曾廣泛地徵求讀者的意見以謀改進，結果得到熱烈的反應。讀者們都對科學通報表示滿意和關懷，期望很高，熱誠支持，提出了很多寶貴的意見。

但是也有許多讀者埋怨我們的，說是在市上不容易買得到，要求我們改善發行工作。這是很好的意見，我們以後自當盡力做好發行工作，使科學通報在祖國的每一個地方都可以買得到；一方面還希望讀者直接向北京延壽寺街劉家大門新華書店雜誌訂閱科訂閱，這樣比較來得簡捷。更希望讀者們在親友中間廣為宣傳，使大家都知道科學通報這一雜誌和它的內容，使得科學通報能够盡量發揮它的作用，能够予愛好科學的同志以幫助。

同時，我們迫切地希望讀者們在各方面給我們提意見，因為如所週知，要辦好一個刊物，必需讀者和編者間密切的合作。科學通報永遠和讀者站在一起，決不以過去的成就自滿。讀者們的批評和指教，我們都是非常歡迎的，而且我們一定要盡力去做的。

中學數學教材精簡之報告

傅 種 孫

(北京師範大學數學系)

我今天報告的是，中央人民政府教育部中教司，應全國中學的呼籲而召集的，中學數學教材精簡座談會討論的結果。參加討論的有老解放區中學，北京市中學，河北省中學，師大附屬中學，有經驗的教員，中國數學會和北京師大有研究的教授。討論的次數，正式的和非正式的，大小幾十次。同時，各大城市，如天津、武漢等都有同樣的會商。與中學數學教材精簡運動同時進行的又有工農速成中學數學教材的編訂。這兩事我個人雖然都參預了，但是學識有限，並無貢獻。參預會商時又不曾寫筆記，雖然想將各方面寶貴意見今天拿到會場來轉播，也說不全，說不好。好在數學精簡綱要已經教育部印好了，原撰稿諸公今天又都出席了，如果我說錯了，馬上可以請他們指正，回去還可以查書對照。

精簡之先有幾個公認的事實：

1. 中學三三制暫難變更．
2. 高中暫難分科．
3. 目前中學生的負担太重了．
4. 現行中學數學太深了．
5. 在不攪亂科學系統，不太降低中學生知識水平，不妨礙升學，這些條件之下，中學數學不是沒有精簡的餘地。

因此我們切實進行精簡。茲將精簡結果分門報告如下：

算 術 (每週四點初一授畢)

算術在小學已經講過，在初一是複講。但是小學教算術，爲遷就兒童心理，是割裂錯雜着教的。初一再教，必須把它系統化。因此我們强調要加精四點：(一)了解意義，(二)認識道理，(三)熟練演算，(四)通達應用。

(一) 了解意義． 顧名思義，是一切談論的開端，在數學尤其要緊。譬如×，÷，:，( ) 這些名詞記號的意義，如果不能一看就了解，一聽就明白，糊糊塗塗去談論去計算，不但毫無用處，而且把習慣弄壞了，影響一切的學習。

(二) 認識道理． 道就是路，理就是紋，道理就是路線，認識道理就是認識路線，認識由這裏走到那裏，由近處走到遠處，由熟處走到生處，由學習過的走到沒有學習過的，由簡單的走到複雜的，由零星的走到綜合的……的路線。譬如，通分是一條路，經過這條路我們可以由整數的加減除走到分數的加減除；齊位是一條路，經過這條路我們可以由整數的加減除走到小數的加減除。這些路線，領路的教員必須指點明白，走路的學生必須認識清楚。

(三) 熟練演算． 算術中的演算多半是簡化算式。初一的學生必須訓練到(1)看得準(每逢看見一個算式，自己能夠判斷會算不會算)，(2)算得穩 (不大算錯)，(3)寫得規矩。

(四) 通達應用． 算術的應用，一言以蔽之，就是翻譯：將涉及計算的普通語言文字，翻譯成算術式子，將算術式子翻譯成普通事例。前者是實際算術化，後者是算術實際化。

以上四點是我們主張加精的。但是有些教材我們認爲不適宜於初一，應該分別刪簡：

(一) 四則難題．

四則難題的解法思索起來難着想，說 (寫) 起來難措辭，聽 (看) 起來又難理會，與其放在算術中難人，不如移到代數中去。

(二) 循環小數．

循環小數，除與分數互化，在算術中可略略提及，俟代數中講了無窮等比級數再複講以外，循環小數直接的加減乘除，涉及數論，都不必講。

(三) 混合比例．

混合比例三物以上題涉及數論，可全刪，二物題可置四則雜題中。

（四） 數目開方.

數目開方較多項式開方更難，應移至代數中，講過了多項式開方再講。

（五） 求積公式之繁難者.

（六） 繁分數之太繁者.

（七） 外國度量衡在中國不常用者.

教育部公佈的，"魏羣"同志擬的初中算術要目是：

1. 記數法和讀數法.
2. 整數小數和十進複名數四則.
3. 非十進複名數.
4. 整數性質.
5. 分數四則和百分法的應用.
6. 比及比例.
7. 指數和統計.
8. 求積.

魏同志是老解放區來的行家，曾經和徐特立合編過算術教科書。如果我的報告有遺漏或是不合的地方，回頭請他補充修正。

初中代數（每週五點 初二授畢）

坊間初中代數教本內容材料相差不多，但是爲照顧初中學生的了解能力，我們主張删去幾部分：

（一） 不等式.

不等式移至高中講授。

（二） 對數.

對數移至三角法及高中代數中講授。

（三） 調和級數及無窮等比級數.

調和級數及無窮等比級數移至高中講授。初中僅講等差級數及有窮等比級數。

（四） 虛數及複素數.

虛數及複素數初中不講。因此得虛解的二次方程就算沒有解。

（五） 行列式.

行列式是解聯立一次方程的武器，解文字方程時用行列式最便利。但是初中學習的聯立一次方程多半是數目方程，用消元法去解比用行列式去解，不但容易懂而且算的快。所以行列式這個工具，不如等到高中解聯立一次文字方程時拿出來。

諸位聽見我剛才口裏說"聯立方程"，也許有人以爲說溜了嘴，說掉了一個式字。其實"方程"這個名詞不是舶來品，九章算經方程章劉徽註曰"一物一程，再物再程，故曰方程"所以"方程"是中國原有的老名詞，不知誰畫蛇添足地加一"式"字。"程"和"式"就字義上講嫌重複，而且現在大家通用"式"字來指 expression，在"方程"後面加一"式"字頗不方便。爲節省口力（說），手力（寫），耳力（聽），目力（看），財力（印刷紙張），省一"式"字，國家社會，子子孫孫，實利賴之。

該講的教材中，我們認爲有些應該互相連繫的部分：

（一） 一次方程與四則難題.

一次方程，一次聯立方程及分式方程後面加些四則難題，不但可以解決許多四則難題，更可使學生認識代數這個工具的功用。

（二） 乘方與面積體積.

乘方與面積體積連繫起來講，正是形數匯通。雖然初二不曾學幾何，用數方塊的辦法來計算面積體積是不難明白的。

（三） 多項式開方與數目開方.

先講多項式的開方，後講數目的開方，不但先易後難，而且可以使開方的理論與實際連繫。

（四） 正變，反變，連變，函數，圖象，用圖象解方程，這些題材連繫起來講，可以初步啓發函數思想及其應用。

教育部公佈的，韓桂叢，周成傑二同志擬的，初中代數要目是：

1. 代數式.
2. 正負數及其四則.
3. 整式四則.
4. 一元一次方程.
5. 一次聯立方程.
6. 析因式.
7. 最高公因式及最低公倍式.
8. 分式方程及分式四則.
9. 乘方及開方.
10. 根式與根式方程.
11. 一元二次方程.
12. 二元二次聯立方程.
13. 比及比例.
14. 因變法.
15. 函數的圖象.

16．等差級數與等比級數．

初中平面幾何（每週五點 初三授畢）

初中學生觀察力强，思考力弱，初中平面幾何該誘導學生觀察簡單美麗的圖形，不該用難題去減低學習的興趣．因此初中幾何的選材最好是限於：（一）很容易見文知義的名詞，（二）很容易見因知果的定理，（三）很容易見圖會畫的作圖題。譬如：(1)極限，(2)軌跡，(3)正切，這些名詞，都不是一望而知，一聽就懂的，很費解釋，初中根本不必提起。因爲極限難懂，而(i)面積基本定理，(ii)比例基本定理，(iii)弧與圓心角互度，(iv)圓周長，(v)圓面積，這些定理嚴格證明起來都要用極限；所以這些定理，在初中只該具文，證明務求簡略，不必過於嚴格。因爲軌跡這個名詞難懂，所以一個軌跡定理，（綫段之中垂線，角之平分綫，圓弧之內含角），寧可用兩個普通定理去代替，不必因爲一個名詞倒把顯明的事理弄糊塗了。又，因爲正切…這些名詞不易見文知義，所以數值三角計算雖不難，在初中還是不講爲是。

此外，凡是較難的定理，公式，作圖，習題，都可從刪，或移到高中去講。

但是也有例外。譬如商高定理（勾方加股方等於弦方）及其推廣，無論用什麼證法，並不簡單，但是爲保持幾何的完整，不但要，而且該多方的證明。又如正五邊形的作法，不算容易，但是因爲它關係國徽，不但要會，而且還要熟。

同時我們主張，在幾何教科書上，不惜工本地多多畫圖，以便增加學生直觀的興趣，減少學生空想的麻煩。

教育部公佈的，趙子毽，曹振山，鍾善基三同志擬的初中幾何要目是：

1．引論．
2．直線形．
3．圓．
4．比例，相似形．
5．多邊形的面積．
6．正多邊形和圓的度量．

高中平面幾何

平面幾何是不是該在高中複習一遍？這是二十多年來，（也就是從與三三制以來），爭論最激烈的問題，這回精簡運動中也會激起熱烈的爭論。起初，精簡的空氣濃厚，傾向不複習。繼而，工科同仁認爲中學生幾何程度差了，圖形性質太糢糊，將來學理工農（尤其是工）處處感覺困難，主張高中須複習平面幾何。其後有些理科同仁以爲與其花費時間複習平面幾何，不如加强解析幾何。最後這問題的解決依賴兩個先決問題：

（一）中學畢業生必須具備的，最低的，幾何知識水準何如？

（二）初中畢業生能否學到這個水準？

第一個問題的答案，一致認爲三S幾何是中學生應有的最低水準，不到這個水準，將來學什麼都有缺憾。但是，現在初中學生的年齡小，程度差，要學到這個水準是不可能的。這是教初中幾何富有經驗的教員共同的感覺。因此我們才又決定，針對現實，初中幾何盡量淺易精簡，把較爲艱深繁複的材料都擱到高中去學習。

高中平面幾何雖是複習，也該精到祇講：

(1) 不可不懂的名義。（如軌跡，極限，極大極小）

(2) 不可不知的定理．

(3) 不可不有的概括觀念。（如推理方法）

(4) 不可不會的技術。（如證題，作圖，……的種種方法和規矩）。

過此，太深邃的理論（如幾何基礎，作圖不能問題），太偏僻的材料，……一概都該刪去。

趙曹鍾三位根據這些意見，擬定的高中平面幾何要目是：

1．引論（幾何學的目的與派別）．
2．初中平面幾何摘要（備徵引，不講授）．
3．推證通法（對常用的推理方法，分別講授）．
4．證題雜術．
5．相似形（程度較好的班，此兩章可略）．
6．軌跡．
7．作圖（着重種種思想方法）．
8．極大極小．
9．量法與極限（初中提到的五定理，現在加以證明）．

高中立體幾何

高中立體幾何這十幾年的運氣不好，大學入學試驗什九不考它，因此中學也就什九不教它。精

簡議與，有人提議，既然大學不考，中學何必教呢？討論的結果是：三度空間的人，祇認識二度空間是不够的。大學不考它是大學的錯，中學不該將錯就錯不教它。

高中幾何排在前三學期，每週兩點；平面佔前半，立體佔後半，立體幾何以三S書爲準，刪去

（一） 不共面二綫之公垂綫，

（二） 球面幾何的大部分，

（三） 球面距離定理之證法（改用實驗法），

（四） 球底角錐體.

趙曹鍾三位擬的，教育部印佈的，高中立體幾何要目是：

1. 直綫及平面（空間直綫及平面，二面角，垂直投影，多面角）.
2. 多面體（稜柱，稜錐，相似多面體，正多面體）.
3. 圓柱，圓錐，圓台.
4. 球（性質，截面，面積，體積）.

三位都是教幾何的老手，以上關於幾何的三段總結（初中平面幾何，高中平面幾何，高中立體幾何），如果我說偏差了，回頭請三位糾正。

高中代數（高二每週三點 高三每週二點）

最近武漢數學通訊，載有史濟彥同志代表漢口第三區同人，"關於高中代數學教材精簡的意見"，是根據人民教育第一期所載"中央人民教育部關於普通中學數學教材精簡提綱草案"寫的批評。其實人民教育所載是初稿，不够精簡。最後精簡的結果比史君所主張的似乎還精簡些。

我們主張刪去的材料是：

1. 高級等差級數及插入法，（堆垛問題可置數學歸納法中作爲例題學習）.
2. 多項定理.
3. 斯特穆定理及其緒餘.
4. 普通三次方程解法.
5. 普通四次方程解法.
6. 結式和判別式.
7. 無窮級數（但等比的例外）.
8. 部分分式（俟微積分用它時臨時補講）.

這些材料都太專門，不是尋常用得着的，不是普通科學水平的人必須知道的，學起來難，忘起來快，不如中學乾脆不學，等到用得着的時候再學。

此外我們主張不應全刪，但須概略講授的部分是：

（一） 基礎（或曰數系）.

（二） 特殊高次方程

（三） 特殊聯立方程 }（用二次方程解法可解者）.

（四） 極大極小，（祇講二次多項式的）.

（五） 或然率.

該講授的教材中，我們認爲有連繫必要的是：

（一） 多元聯立方程與行列式.

（二） 最高公因式，最大公因數，一次無定方程，有限連分式，混合比例（這些東西可拿輾轉相除一以貫之）.

（三） 二項定理，排列，組合，數學歸納法.

（四） 等比無窮級數，記數法，循環小數.

（五） 對數，複利，年金.

我這裏附帶聲明幾句話：Hall and Knight 及 Smith 的高等代數，Fine 的大學代數，原來就是大學用的書，我們拿來做中學教本，教員學生都吃力不討好。若不及早改變，爲害教育實非淺鮮。又"小代數"，"大代數"這兩個名詞來歷不明，謬種流傳，習見不怪，其實不妥。此後我們就程度的淺深說，應該叫初等代數，高等代數，就適用的年級說應該叫初中代數，高中代數。名不正則言不順，大小何取焉！

教育部印佈的，韓周二位所擬的高中代數要目是：

（1） 數的種類（由自然數到複素數）.

（2） 基本演算複習.

（3） 一次聯立方程.

（4） 除法變形.

（5） 析因式.

（6） 最高公因式與最低公倍式.

（7） 分式及分式方程.

（8） 乘方與開方（附數目開方）.

（9） 根式，分指數，根式方程.

（10） 虛數和複素數.

（11） 一元二次方程.

（12） 用二次方程能解的高次方程.

（13） 用二次方程能解的聯立方程.

（14） 不等式.

（15） 一次不定方程，附有盡連分數，混合比例.

（16） 等差等比及調和級數.

(17) 對數及其應用.

(18) 數學歸納法.

(19) 排列與組合.

(20) 二項定理.

(21) 方程論.

(22) 或能率.

(23) 行列式.

二位是北京教代數的名家，如果我的報告失實，回頭請他們再說過。

高中三角 (每週三點 高一授畢)

關於高中三角法我們有幾個主張：

(一) 對數的道理和應用都在三角法中切實講。

(二) 現場測量是三角法聯系實際的最好方法，必需好好講授。

(三) 三角恒等式，反三角恒等式，三角方程，反三角方程都要去難留易。

(四) 取材繁簡大約可以葛氏三角法為標準。

因此王明夏管怨二同志擬訂高中平面三角法要目如下：

1. 量角法.
2. 銳角三角函數.
3. 任意角之三角函數.
4. 複角的三角函數.
5. 反三角函數與三角方程.
6. 對數.
7. 三角形性質及解法.
8. 現場測量.

兩位都是三角老手，想必另有精闢的見解，一會兒請他們補充。

高中解析幾何 (第四學期每週二點 第三學年每週三點)

我們對解析幾何的精簡意見是：

(1) 將切線長·法線長，切影·法影，因為應用太少，刪去不講。

(2) 先講直線，後講曲線和方程，學生容易了解。

(3) 關於圓錐割線的性質部分，僅作簡易的講解，而着重於方程的描跡。

(4) 極坐標較難部分，蹇變方程中較深部分，圓錐割綫系，因需用較少，理解較難，均予刪減。

(5) 超越曲線（指數曲線·對數曲線和三角函數曲線）只舉例說明，併入曲線和方程章內講授。

(6) 將節省下來的時間，講授立體解析幾何大意，一則使學生對整個解析幾何（平面和立體）稍窺門徑，二則升學後學理工醫農也諸多方便。

根據這些意見，王光兆，王景慧，劉從謙三同志擬定高中解析幾何要目如下：

1. 直角坐標.
2. 直線.
3. 曲線和方程.
4. 圓.
5. 拋物線，橢圓，雙曲線（重描跡，略性質）.
6. 坐標的轉換（附圓錐割線分類）.
7. 切線和法線.
8. 極坐標（簡要）.
9. 蹇變方程（簡要）.
10. 立體解析幾何大意.

最後，我要聲明，以上的總結報告，甚至教育部印行的數學精簡綱要，都不是最後決定，不帶任何拘束性，極盼各方加以研究，修正。尤其是今天出席的幾百個同行，難得薈萃一堂，更該不吝珠玉。現在就請諸位發言，共同解決我們自己的問題。

(1950年7月27日)

關於數學理論與實際

趙訪熊

（清華大學數學系）

數學好像是一棵桃樹。這棵桃樹有很老很粗的根子，主要是三大條根子——分析，代數，幾何，又有很茂盛的樹枝樹葉，並且還結了許多好吃的桃子。樹根是『純粹數學』樹枝樹葉及桃子是『應用數學』。枝葉離了樹根不能活；祇有樹根而沒有枝葉亦不成為桃樹了。種桃樹的目的是在吃桃子，不過也得培養壯實的樹根，保護茂盛的枝葉，才能有桃子吃。提倡應用數學而反對純粹數學，跟重視純粹數學而輕視應用數學同樣是偏差。

應用數學是直接結合實際的科學。數學是有用的，不過也是抽象的。數學的園地是抽象的園地。怎樣才能利用抽象的數學來解決實際問題呢？假設我要從北京市政府到漢口市政府，並想乘飛機去，應該怎樣走呢？第一步是乘汽車從北京市政府到北京的飛機場。第二步是在北京的飛機場上乘飛機飛到漢口的飛機場。第三步是從漢口的飛機場乘汽車到漢口市政府。汽車，飛機，汽車是飛機旅行的三部曲。應用數學的三部曲是實際，理論，實際。第一步是從待解決的實際問題內抽出數學內容使他變成一個數學問題。就是實際的抽象化。第二步是解決這個數學問題。第三步是解釋所得數學結果應用於該實際問題時的實際意義。就是抽象的實際化。

舉一個極簡單的例來說明應用數學的三部曲。假設我買了三個燒餅，每個價二百元。我給燒餅舖掌櫃的一千元，他該找我多少錢？這是一個很實際的問題了。第一步是實際的抽象化。假定我用一百元當錢的單位，那末這個實際問題就變成下列數學問題：

$$10-(3\times 2)=?$$

第二步是解這個四則題，結果是一個數字4。

第三步是說明這個數字4代表什麼。答案是代表掌櫃的該找我的四百元錢。

我們數學家是種桃樹的，所以人家有權問我們要桃子吃。下面是一個比較上例稍難的一個實際問題及答案。這是我剛從桃樹上採下的一個不太成熟的小酸桃。請大家嘗嘗，並予以批評。

節氣日晷——大衆的錶

引言 大家都需要知道時間，所以大家都希望有一個錶，有錢的可以買一個；沒有錢的就祇能希望將來有錢買一個了。不過沒有鐘錶是不是就不能知道時間呢？發明鐘錶以前是不是就沒有時間觀念呢？不是的。經驗豐富的農民看看太陽亦可以知道大概是幾點鐘，有些城市裏的共公場所，有一種圓盤日晷：一個圓盤，圓盤中心插一根鋼針，垂直於圓盤，裝置時使鋼針指北極星。要是鋼針的方向定準了，這種圓盤日晷，可以相當準確地定出地方時間，唯一的缺點，是這種日晷是固定的，移動時需要先定出南北方向才能拿他裝置準確了。所以這種圓盤日晷如不加改造，祇能當固定的鐘用；如加上指南針就可以自由移動，亦可以當錶用了。不過磁針指的是磁極，不是眞北極，磁性北極在北緯70°，西經 97°43′。所以應用磁性指南針時尙須根據應用日晷地點的經緯度作偏角改正。再者磁針指南針並不便宜，所以帶指南針的日晷是不容易普及到農村的。我們現在想改造這個圓盤日晷，不加指南針而使他能當錶用。祇要有日光，知道今天交什麼節氣，或是那個節氣過了幾天，或是那個節氣還差幾天，就可從這個已經改造好了的日晷看出時間並看出南北方向。這種改造

好了的日晷叫做『節氣日晷』。所有農民都知道節氣，日曆農曆上都有節氣，任何人知道了陽曆日期亦能算出那個節氣過了幾天，所以節氣日晷是很容易普及到農村的。他是大衆的錶，亦是大衆的非磁性指南針。

改造方法關鍵 改造圓盤日晷使成節氣日晷的關鍵是在看出裝置準了的圓盤『日晷』有下列兩個功用：(1)圓盤上鋼針的日影定時間；(2)鋼針上圓盤的日影定節氣。

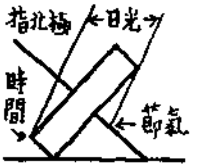

圖 一

第一個功用很明顯，不必細說了。大家所不大注意的是第二個功用。在冬至時鋼針上的日影最高，在夏至時日影最低。從冬至到夏至針上日影連續地從盤上最高位置下降到盤下最低位置，在春分時針上的日影從盤上降到盤下。從夏至到冬至針上日影連續的從盤下最低位置上升到盤上最高位置。在秋分時從盤下升到盤上，假定我們在鋼針上記上一年二十四個節氣交節氣時日影的位置，那末這個日晷就已改成節氣日晷了。再假定鋼針下端已放長使針的下端與圓盤最下點在同一地平線上。現在我們可以移動這個圓盤日晷了。取下日晷座上的圓盤日晷放在任何一個地平面上算出今天是那個節氣，過了幾天了使圓盤上午時點恆在最下點轉動圓盤使鋼針上的日影射到今天應佔的位置上，那麼鋼針上端已指北極星，圓盤上日影亦定準確時間了，注意我們沒有用指南針而已定出南北方向及時間。

天文常識 日晷是測量太陽位置的簡單儀器。研究日晷的原理需要有一點兒天文常識。大家都知道地球圍繞了太陽轉，一年轉一週，就是所謂『公轉』。

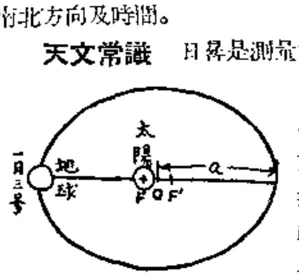

圖 二

地球的軌道差不多是一個橢圓，太陽在橢圓的一個焦點 F，是近冬至的焦點。冬至時地球離太陽較夏至時爲近。地球軌道偏心差是

$$e=\frac{OF}{a}=0.0167406$$

這個橢圓的長徑與短徑的比例是1比$\sqrt{1-e^2}$，差不多是一比0.0992地球用一年的時間(365.256天)圍了太陽轉了一週，從地球起到太陽止的有向線段的角度一共轉了三百六十度平均每天轉0.9856度，比一度少一點兒，按照刻卜勒(Kepler)定律自太陽到地球球心的直線線段每單位時間內掃過的面積是一個常數，所以地球公轉在冬至附近轉了快些；在夏至附近轉了慢些，天文家將這個三百六十度平分成二十四個節氣。一年二十四個節氣是：

春分，清明，穀雨，立夏，小滿，芒種，
夏至，小暑，大暑，立秋，處暑，白露，
秋分，寒露，霜降，立冬，小雪，大雪，
冬至，小寒，大寒，立春，雨水，驚蟄。

從秋分到春分(冷天)兩個鄰近節氣間的時間平均是十五天，從春分到秋分(熱天)兩個鄰近節氣間的時間平均是十五天半，因爲冷天地球公轉角速度比較快些，所以冷天兩個鄰近節氣間的時間亦比較短些。

同時地球每天『自轉』一週，角速度是每小時15度。地球自轉軸是南北兩極所定的直線，亦即自地心指北極星的直線地球自轉軸的方向是不變的。

總結：地球的公轉定一年的節氣，自轉定一天的時間。日晷是測量地球跟太陽相對位置的儀器，所以日晷應當可以測出時間及節氣。

日晷原理 作單位球面代表地球，球心在原點，名地球軌道平面爲$x-y$平面。名自地心指北極星的單位矢量爲ON，ON之方向不變。

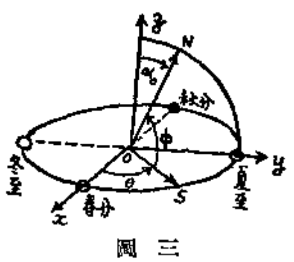

圖 三

ON在$y-z$平面上與z軸所作角度爲

$$\alpha_0=23°27'$$

名自地心指太陽的單位矢量爲OS，則OS在$x-y$平面上。一年內OS在$x-y$平面上轉一週，S點的軌跡就是$x-y$平面上的單位圓。

指北半球說，夏至時日最長夜最短，太陽在天上的位置最高，ON與OS的角度最小所以OS在夏至的位置在正y軸，冬至時日最短夜最長，

ON 與 OS 之角最大所以 OS 在冬至的位置在負 y 軸，春秋二分時，日夜長短相等，OS 的位置在 x 軸上。

名自正 x 軸(春分)到 OS 的角度爲 θ，ON 與 OS 的角度爲 ϕ，那末 ϕ 是 θ 的函數。怎樣求出 ϕ 及 θ 間的函數關係是一個數學問題了。

(甲) 假定你學過解析幾何，那末就該知道設兩個方向的方向，餘弦依次是 (l,m,n) 及 (l',m',n')，則二個方向間的角度 ϕ 的公式。

是：$\cos\phi=ll'+mm'+nn'$。

現在 ON 及 OS 的方向餘弦依次是：

$ON(O,\ \sin\alpha_\circ,\ \cos\alpha_\circ)$

$OS(\cos\theta,\ \sin\theta,\ O)$

所以 ON 及 OS 間的角度 ϕ 滿足：

$$\cos\phi=\sin\alpha_\circ\ \sin\theta$$

名 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\phi$ 則有

$$\sin\alpha=\sin\alpha_\circ\ \sin\theta$$

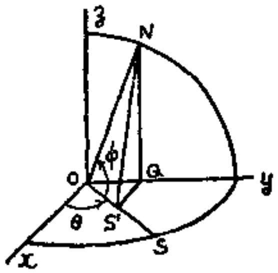

圖 四

(乙) 假定你祇學過三角就需要比較長的證明了。

自 N 作直綫平行於 z 軸，與 y 軸相交於 Q 點。自 Q 點作直綫平行於 x 軸，與 OS 相交於 S' 點。準畢達哥拉斯定理

$$\overline{NS'}^2=\overline{QN}^2+\overline{S'Q}^2=\overline{QN}^2+\overline{OS'}^2-\overline{OQ}^2$$

$$=\overline{OS'}^2+\cos^2\alpha_\circ-\sin^2\alpha_\circ$$

$$=\overline{OS'}^2+\cos2\alpha_\circ$$

準餘弦定律，$\overline{NS'}^2=1+\overline{OS'}^2-2\,\overline{OS'}\cos\phi$。

故有 $$\cos\phi=\frac{1-\cos2\alpha_\circ}{2OS'}=\frac{\sin^2\alpha_\circ}{\sin\alpha_\circ\csc\theta}$$

$$=\sin\alpha_\circ\sin\theta$$

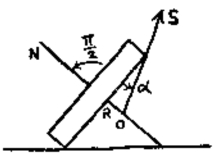

圖 五

圓盤日晷是一個圓盤，圓盤中心插一根鋼針垂直於圓盤。鋼針的方向 ON 指北極星。OS 與 ON 之角爲 ϕ。OS 與圓盤邊所成之角爲

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\phi。$$

圓盤在鋼針上之日影從圓盤量起的距離是

$OR=a\ \tan\alpha$，a爲自鋼針到圓盤邊之距離。

從 $\sin\alpha=\sin\alpha_\circ\sin\theta$，可算出交下列節氣時 $\tan\alpha$之值：

節 氣	θ	$\tan\ \alpha$
夏 至	90°	0.4338
芒 種	75°	0.4176
小 滿	60°	0.3673
立 夏	45°	0.2931
穀 雨	30°	0.2035
淸 明	15°	0.1051
春 分	0°	0

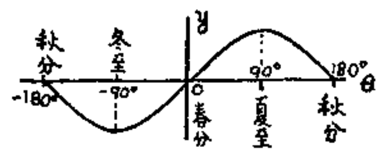

圖 六

$y=\tan\ \alpha=f(\theta)$的圖形大致如上圖。y 之最大值在$\theta=90°$(夏至)；最小值在 $\theta=-90°$(冬至)，其值依次爲$\pm\tan\ \alpha_\circ=\pm\ \tan\ 23°27'=\pm0.4338$。$y$ 的增加率之最大及最小值在春秋二分，其值爲：

$$\pm\ \sin\ \alpha_\circ=\pm\ \sin\ 23°27'=\pm0.398。$$

所以在春秋二分時鋼針上的日影變得最快，不過有日光的半天內，θ 的變量不超過半度，卽 $\frac{2\pi}{720}$弧度(差不多$\frac{1}{115}$弧度)。所以卽使在春秋二分時在有日光的半天內，y 的變量的絕對值亦不超過$0.398\times\frac{1}{115}=\frac{1}{289}$。所以在有日光的半天內 y 差不多是一個常數，OS 亦差不多是一個常數矢量。

$$y=\tan\ \alpha=\frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}=\frac{\sin\ \alpha_\circ\ \sin\ \theta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\ \sin^2\theta}}=f(\theta)。$$

因$f(-\theta)=-f(\theta)$，故 y 爲 θ 的奇函數。故圓盤在鋼針上在與春分或秋分對稱的兩個節氣時的日影對於一圓盤是對稱的。因 $f\ (\pi-\theta)=f\ (\theta)$，故 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$(夏至及冬至)是 y 的對稱軸。就是說在夏至或冬至前 K 個及後 K 個節氣時鋼針上的日影的位置是相同的。所以我們已經完全知道二十四個節氣時鋼針上圓盤日影的位置了。名圓盤日晷的鋼針爲『節氣軸。』在節氣抽上畫上十四

個節氣圈。八個主要節氣圈的位置如下：

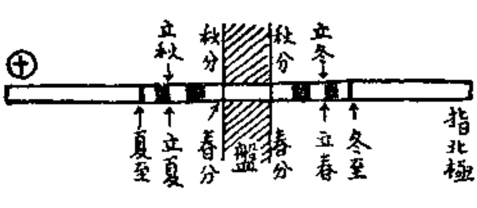

圖 七

假定日晷使用地點 P 的緯度是 $\lambda°$ 經度是 $\mu°$。例如北京的經緯度是北緯40°東經117°。

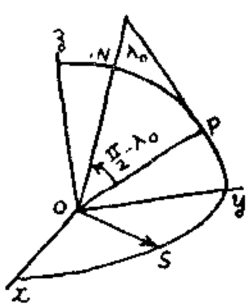

圖 八

假定 OS 是固定的那末一天內 OP 圍了 ON 軸用每小時 15° 的角速度轉了一週。OP 是在 P 點垂直於地平面的直線。假定 OP 不動那麼一天內太陽光線 OS 圍了北極綫 ON 用每小時15度的相反角速度轉了一週。因為在有日光的半天內，OS 與 ON 所成角度差不多是不變的所以射到 ON 軸上 O 點的日光綫 OS 的軌跡差不多是一個以 ON 為軸以 O 為頂點的圓錐面。OS 圍了 ON 的旋轉角速度是每小時15度，所以圓盤上鋼針日影的角速度亦是每小時15度，因此日晷的圓盤上的時間刻度是等分的，每十五度代表一小時。

ON 與 P 點的地平面所作的角度就是 P 點的緯度 $\lambda°$ 所以假定從節氣軸面量到圓盤邊的距離是 a，那末節氣軸從圓盤下面量到地平面的長度是 $a \cot \lambda°$。

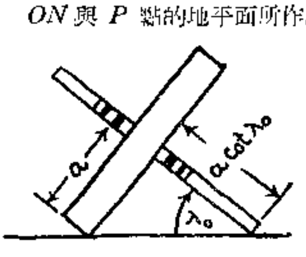

圖 九

例如北京的緯度是 $\lambda_0 = 40°$，那麼所說的長度是 $a\cot\lambda° = a\cot 40° = 1.192\ a$ 了。

標準時間 太陽在正南的時候是地方時間的正午12時。我們在公共場所所見到的圓盤日晷上的「午」時都是在圓盤的最低點，所以定出的時間是地方時間。無線電所報告的時間是「標準時間」，就是離電台最近的一個經度是15°的倍數處的地方時間，例如北京的經度是東117°，所以北京電台所報告的標準時間是東經 120°上的地方時間。東經117°在東經 120° 之西 3°，每度代表四分鐘，所以北京午時的標準時間是12時12分，所以作適用於北京的標準時間日晷時，應使圓盤上的最低點即午時點為12時12分。

製法：

用車床作一個木圓盤，正中鑽圓孔，用木或金屬作圓棍使圓棍與圓孔之半徑相同。圓盤必須充分厚使圓棍，插進圓孔後不致左右搖動，圓盤邊加木針子一個長度的約為圓盤半徑之半，名自圓孔邊到圓盤邊的距離為 a。

圓棍在盤下之長度為 $a\cot\lambda°$，$\lambda°$ 為應用日晷地之緯度，例如北京之緯度為40°圓棍在盤下之長度為1.192 a。

圓棍在盤上及盤下部分各刻對稱的七個節氣圈，與 α 相應的節氣圈離最近盤面距離為 $a\tan\alpha$（$\tan\alpha$ 之值見表）。用紅白漆漆成兩邊對稱的一邊三對紅白圈。每一個紅圈或白圈代表十五天。紅白交界的七個圓就是七個節氣圈，這個圓棍就是節氣軸。

拿圓棍插進圓盤中心圓孔，使春秋二分節氣圈與圓盤兩面看齊，必要時用膠膠住使不移動。以圓盤邊所加木釘當脚平放此未完成日晷於鏡子上，定圓盤邊之最低點即午時點。其法為使圓棍與其影在一條直線上此直線與圓盤邊相交於午時點。

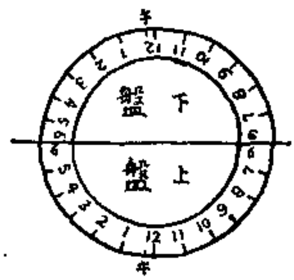

圖 十

在圓環紙上畫好每十五度代表一小時之刻度，註上自早六點到晚六點的數字碼如圖，並註上「午」字代表午時的標準時間，在圓環紙上6—6處剪開，一半貼在盤上面，一半貼在盤下面，貼時應使紙上午字對準盤邊午時點。在圓盤上面刻日晷應用地地名，節氣日晷已完成。

用法： 先以玻璃或鏡子一塊平放在平地上或任何平面上，上置玻璃圓球一個。設玻璃球不動那末這塊玻璃或鏡子就已經是地平面了。

算好今天是那一個節氣後或前幾天，將節氣日晷放在定好的地平面上，使午時點在下。轉動此日晷使節氣軸上日影指本日，注意棍上每個白圈或紅圈均代表十五天，轉好後圓盤上日盤影定標準時間，圓棍即節氣軸上端指北極星。注意上午用時應使定出時間爲上午時間，下午用時應使定出時間爲下午時間。

（1950年8月5日）

參考書目

Encyclopaedia Britanica: Dial, Planet 等條。

辭源：二十四節，二分條。

數學與辯證法唯物論關係問題總結報告（附答問題）

王壽仁

（北京大學數學系）

各位先生：

今天我能够代表中國數學會北京分會，來向各位報告關於數學與辯證法的討論總結，我感覺到非常榮幸。關於這個問題，中國數學會北京分會理事會曾在七月二日請了許多位哲學家與數學家，開了一次座談會。後來中國數學會又公推北大數學系來担任作總結報告。北大數學系接到這個任務後，就組織了一個小組，專門來作這件事。因爲這個報告不是在當天座談會上作的，這裏邊就難免不滲雜了我個人的意見，有什麼錯誤的地方，那大概就是我個人的錯誤，希望大家不客氣的加以指正。

關於數學與辯證法唯物論的問題，這對於中國數學會來說，是一個過去沒有碰到過的問題，是一個新的問題。數學會對於這個問題還是正在研究中；就像七月二日所召開的座談會，也還只是頭一次的嚐試。我們對於這個問題有一些意見，但是這些意見都還是不成熟的意見。今天把這些不成熟的意見來向大家報告，其目的是想通過這次報告引起大家對於這個問題注意，對於這個問題發生興趣，以便在今後展開熱烈的討論。

我的報告可以分成四段：（一）數學是什麼？（二）數學與形式邏輯。（三）辯證法的數學方法。（四）數學的任務問題。

（一） 數學是什麼？

談起數學與辯證法唯物論的關係來，首先就使我們聯想到數學究竟是什麼？哲學觀點不同的人就會有不同的答案。唯心論的哲學家與數學家對於這個問題有許多唯心的看法。例如有人說：數學祇不過是一種符號的遊戲。說數學是一種遊戲好像捉迷藏一樣，這是一種閒情逸致，拿數學作爲一種玩藝兒有閒階級的看法。我們無產階級一天到晚忙生產，我想不會有這麼多的閒情逸致，也不需要這種看法。英國的羅素說："數學是這樣的一種學科，在這裏我們永遠不曉得我們所談論的是什麼，也不知道我們所說的是不是眞的。"我們認爲羅素的說法完全不對，事實上我們搞數學的人們是非常清楚地知道我們所談論的是什麼，也十分相信我們所說的是眞實的。我們認爲恩格斯對於數學的看法很正確，他說數學研究的對象，就是形和數。現在距離恩格斯時代雖然已經有好幾十年，近幾十年來雖然數學方面有了非常偉大迅速的發展，但是恩格斯的話基本上還是正確的。蘇聯的數學家廓勒莫郭洛夫(Kolomogorof)說，恩格斯的數學的定義本身，在自己內部隱含着發展的可能性，隨着數學的生長而得到日益寬廣的含義。廓勒莫郭洛夫把數學的主題的發展，分成三個階段：第一階段是，數學作爲數，運算和幾何圖形的科學；第二階段是，數學作爲變量和幾何映像的科學；第三階段是，數學作爲實在世界的最一般性的數量與空間形式的科學。

現在我們談談數與形的發展。

（甲） 數的發展

剛才已經說過數與形的含義是不斷變化和不斷發展的。談到數時，是和數的運算分不開的。數學上的數總是處在運算當中。一開始學習１２３４５……時總離不開加減乘除。用加減乘除作關於正整數的運算，便把正整數投入了一個脫變的過程，產生了與整數性質相反的分數，產生了與正數性質相反的負數。這些組成了有理數系。對於有理數施行開方的運算，又可以產生與有理數性質相反的無理數；更可以產生與實數性質相反的虛數。

在較比高深一點的數學裏面，除了數的運算

之外，還講到數量本身的變化，在數學發展史上，由固定的不變的數的概念，進入數量變化，變量的概念是一個偉大的劃時代的革命，這個革命的成果便是微積分的發明，而微積分的發明標示着一個嶄新的歷史時代的到來。這是很顯然的，世界上一切都處於不斷的變化與發展之中，絕對不變的靜止狀態，事實上是不存在的，因此，作為一切事物的標誌的數量便不會是不變的，而是不斷變化着的。由於事物間的普遍聯系與相互依存，變量與變量之間，便產生了函數的關係。函數概念，變量及變量的極限概念是微積分及近代分析學的基礎。

（乙） 形的觀念的發展

形的概念本身，是與形的運動，也就是變換分不開的。線段的長短角的大小的概念，基本上離不開剛體運動的概念。在歐幾里得幾何學裏面，我們怎樣證明兩角及夾邊相等的兩個三角形全等呢？我們是利用剛體運動，把一個三角形搬到另一個三角形上面去，然後證明這兩個三角形完全重合起來，於是便證明了他們全等。從根本上說，線段的相等，角的相等和一切初等幾何圖形的全等，都是利用剛體運動來完成的。因此我們可以說：初等幾何圖形是處於剛體運動的平移與旋轉當中。如果圖形的運動不是剛體運動，而是投影變換，這便產生了投影幾何的各種圖形觀念，得到投影幾何學。又如果圖形的運動是一一連續的變換，我們所得到的圖形觀念便是可以任意壓縮伸張但不准許拉斷的，如同橡皮似的圖形觀念，所得到的幾何學便是近些年來數學上最引人注意的一支幾何學，叫作拓撲學。

（丙） 數與形的對立及統一

一組特定的數量和那些數量間的幾個特定的運算組成功一個特定的運算系統；一組特定的圖形和那些圖形間的一組特定的運動（或者說變換）組成功一個特定的幾何空間。運算系統與幾何空間顯然是不同的，對立而又包含着互不相容的矛盾的。自從笛卡兒在空間引進了坐標的觀念以後，數與形之間互不相容的矛盾，便在基本上統一起來了。在代數與幾何的基礎上發展了解析幾何，從此解析的式子，有了幾何的解釋，幾何的觀念也有了解析的意義。這樣一來，幾何的眼界就大大的擴大了。幾何的空間可以擴展到 n 度，幾何學研究的方法從綜合的方法發展到代數的與分析的研究方法。

（丁） 分析與代數

初等解析幾何有兩個發展的方向，一個方向是從切線斜率的研究發展到微積分，另一個方向是從一次方程組的研究發展到近世代數。這兩個發展方向形成近代數學的兩大分支。分析方法與代數方法在近代數學的研究裏面，好像是一對雙生子一樣：如果是研究數論，那麼既有分析數論，又有代數數論；如果是研究幾何，那麼既有微分幾何，就一定要來一個代數的幾何；如果是研究拓撲學，那麼既有分析的拓撲學，又有代數的拓撲學。分析方法與代數方法，在近代數學的各種題材裏面，同時存在，互不相容。正如北大王湘浩先生所說：近代數學的主要矛盾就是分析方法與代數方法的矛盾。

現在我們已經得到一個結論就是：數學並不是一下子突然造成的，或者生來如此的，而是逐漸發展起來的。這一個發生發展的過程，也不是單純的量的堆集，而是一個包含着內在矛盾的，活生生的辯證的發展過程。

（二） 數學與形式邏輯的關係

數學與形式邏輯有什麼關係呢？邏輯家說：形式邏輯是關於正確推理底規律的學問。數學的思維，必須有嚴格的邏輯推理，這是無可懷疑的。因此數學必須用形式邏輯，這也是必然的事實。問題不在於把形式邏輯從數學裏面驅逐出去，而在於正確地估計形式邏輯在數學裏面的地位。對於它的地位給予過高或過低的估計，都是不正確的。

（甲） 過高的估計

什麼是過高的估計呢？例如有人說：數學祇不過是一套形式邏輯；數學思想的方法，完全是形式邏輯的方法。把數學看作是一套形式邏輯，這是完全不合乎事實的。因為數學有數學的對象，形式邏輯有形式邏輯的對象！二者研究的對象不同，內容不同，我們怎麼能夠硬說數學祇不過是一套形式邏輯呢？如果說數學按照它敘述的形式來講，就它表現的方法來講，是合乎形式邏輯規律的，這一點也不錯，完全正確的。但是敘述形式與表現方法祇是數學的外在形式，不是數學的內容。祇看兩個東西的外在形式是一樣的，就斷定它們是一樣，就如同把紙老虎認成真老虎，這就犯了形式主義的錯

誤。那麼說數學思想方法完全是形式邏輯方法對不對呢？這也不對。現在我們拿證明幾何定理來看看。例如我們要證明三角形內三角和是一百八十度。我們當然假定事先並不知道這個定理，也不知道它的證明。那麼當我們聽說三角形內角和是一百八十度的時候，我們怎麼想呢？我們完全同意呢？還是表示懷疑呢？當然我們不能隨便同意，我們需要通過證明，才能够消滅我們的懷疑。什麼叫作懷疑呢？仔細地分析起來就是一種內心的矛盾；內角和是一百八十度，和不是一百八十度，這兩種思想在我們腦子裏同時存在，互相衝突，等於一百八十度的思想暫時還沒有征服了不等於一百八十度的思想。那麼又怎麼辦呢？於是我們任意拿一個三角形ABC，過頂點C作輔助線EF平行於底邊AB。我們為什麼要任意拿一個三角形ABC呢？因為我們腦子裏還有矛盾存在，不能解決，要想看一看客觀的事實究竟是怎樣，因此隨便拿一個三角形ABC來看一看，看看它的內角和是不是等於一百八十度，我們是利用客觀事實來解決主觀的矛盾。那麼要看客觀事實為什麼不用量角器來量一量呢？為什麼又要作輔助線EF呢？因為我們所選的三角形ABC，一方面是特殊的具體的三角形，但在另一方面同時還是一般的抽象的三角形，如果我們用量角器，那麼我們便祇顧到了它的特殊性，而忽略了它的一般性。為了要一般地來考察三角形內角和是不是一百八十度，我們就得要想一個辦法，這個辦法就是作輔助線EF。有人要問這個辦法是怎麼想出來的？我們的答覆是：無論如何，這個辦法都不是用形式邏輯想出來的。形式邏輯的同一律，矛盾律，排中律都不能够幫助我們想出這個辦法。因此說數學思想方法完全是形式邏輯方法，這是不正確的。

（乙） 過低的估計

那麼數學的推理是不是可以完全不用形式邏輯？這也完全不對。數學必須要用形式邏輯，才能使自己成為科學，才能避免發生荒謬的錯誤。數學推理的每一步驟，除了根據事實，還必需要有嚴格的邏輯依據。‘想當然’‘大約如此’的含糊思想，在數學裏面是絕對不許可的。在數學上回答一個‘為什麼’，除了要有事實來作根據外，還必須每一步都要有嚴格的邏輯的依據。符合形式邏輯的規律是數學思維的一個起碼要求。在數學與形式邏輯的發展史上，它們相互間曾經有過非常大的影響，在一方面，形式邏輯曾經幫助數學發現和避免了許多錯誤，把數學納入安全發展的軌道上；另一方面，數學又影響了形式邏輯使形式邏輯更加精密。

總起來說，一個數學家，除了他必須具備豐富的數學知識以外，還應當有支配邏輯的能力。這種能力自然是漸漸培養，逐漸發展起來的。如果一個數學家，不特沒有支配形式邏輯推理的能力，而且被數學上的形式邏輯給束縛住，作了形式邏輯的俘虜，成了形式邏輯的奴隸，完全不能離開那些表面的邏輯，而深入到問題的實質裏去，這樣的人，便不能被稱為數學家，事實上，數學家也不是這樣。數學家考慮問題時，他必須離開那些表面的形式邏輯，深入到問題的實質裏去。問題的實質是什麼？簡單說問題實質就是矛盾。前提與結論在主觀意識中，所認識的矛盾，已知與未知的矛盾，客觀事實與主觀願望的矛盾。有了矛盾就必須把它們揭露出來，然後才能加以解決。因此數學家不祇是要作一個形式邏輯的支配者，而且為了深入問題的實質，推動數學的發展，還必須主動地有意識地有系統地使用辯證法的邏輯。

（三） 辯證的數學方法

辯證法，並不需要我們從外面引進到數學裏面去，而是需要我們從數學中把辯證法發現出來。發現數學辯證法的方法就是按照數學本來的面目去瞭解它。現在我們談一談數學的方法。

（甲） 一般與特殊

在數學中，到處都遇到“我們任意取一個，然後把它固定起來”。證明三角形內角和是一百八十度，就是先任意取一個三角形，然後就這個取定的三角形來加以證明。又如說一個函數在一個間隔內是連續的，那意思就是說此函數在間隔內任意取定的點是連續的。所謂‘任意取定的一個’是什麼意思呢？他的意思就是：他是特殊的一個，同時又是一般的一個。例如我們用 a 代表任意一個有理數，a 就是一個特殊的有理數，同時又是一個一般的有理數，a 具有特殊性，所以它可以是 $½$，a 又具有一般性，所以它又可以不是 $½$。一切東西的特殊性質中間都包含着某種一般的性質。數學的方法，就是要從特殊的數學對象中，尋求它的一般特性。例如一組特殊方程組：

$$x+y+z=0$$

$$2x-y+3z=0$$
$$x-5y+3z=0$$

它的係數所組成的行列式等於零

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}=0$$

它有一組非零的根 $x=4$，$y=-1$，$z=-3$。

上面所說的是一個特殊事實，這個特殊事實包含着下述的一般眞理：

任意 n 個 n 元一次齊次聯立方程，有非零根的必要與充分條件是：他的係數行列式等於零。又例如：假如一個直角三角形的兩個腰一個是三寸長，另一個是四寸長，那麼它的斜邊的長必定是五寸。這個特殊的事，包含什麼一般的眞理呢？大家都知道就是勾股弦定理。

當我們由特殊的事實找出了一般的特性後，這個一般的特性就是一個定理，而這個定理更往往是另外一個更普遍的定理的特例。例如對於所有的正整數 n 都成立的定理如：

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

即是更普遍定理，等差級數求和公式：

$$a+(a+d)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}d)$$
$$=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$$

的特例。而等差級數求和公式，又是高級等差級數求和定理的特例。

因此，所謂一般的，他的本身往往又是特殊的，而特殊的，又包含着某種一般的特性。這種從特殊到一般的過程，在數學上叫作一般化或普遍化 (generalization)。另外一種過程，是把我們所要想證明的一般定理，不當作一般定理來證明，而把它當作一個特殊的定理而加以證明，這種過程叫作特殊化 (Specialization)。例如我們要想證明對於任意正整數 n 都對的一般公式如：

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2,$$

我們不把它看作一般公式，却把它當成一個特殊公式來加以證明。我們祇消把等差級數求和公式加以特殊化，使 a 等於一，d 等於二即可。

由此可以看出，我們在數學上的方法是：一方面通過特殊的眞理去認識一般的眞理，通過局部的認識，提高到全部的認識；另一方面對於個別的問題的解決辦法是，我們不是把它當作個別的問題來處理，而是要說明他是某種一般的普遍眞理的特例。這種由特殊到一般，再由一般得到高級的特殊的方法過程，是一種辯證的正反合的過程。這個辯證的過程在數學上的支配力量，是廣泛而深刻的，它在各種不同的場合，採取各種不同的形式。例如我們往往需要把一個整體，分拆開來成爲個別的，然後又把個別的，合攏起來成功一個整體，把一件事情分別情形來加以證明。

(乙) 具體與抽象

上面已經說過，特殊與一般，在不同的場合，可以採取不同的形式。有時候，特殊的顯現爲具體的，一般的顯現爲抽象的。具體與抽象形成一種矛盾，這種矛盾是近代數學發展的源泉。大家都知道，近代數學的主要特徵，就是不斷地走向抽象化。數學家把原來被認爲是抽象的，當作是具體的，在這個基礎上，再加以抽象。近代數學家們，除了要有高度抽象的能力外，還必須要有具體觀察已經抽象化了的事物的能力。他們往往能够把一個極其抽象的概念，一下子引導到極其具體的事物上去。一個數學教員比他的學生更高明，其原因不僅祇是在於，這個教員比學生具有更多的數學知識，而且還在於他比學生具有更强的抽象化與具體化的能力。

對於一個極其複雜的具體的四則問題，我們大家都能够把它化爲抽象的一次方程來加以解決，同時也能够根據抽象的一次方程的解法，以求具體的算術解法。但是一般程度壞的中學生却不一定有這種能力。由算術到代數的發展，是數學史上典型的由具體到抽象的發展過程的範例。我們也可以看出抽象之所以成爲必要，其原因就是因爲抽象的比具體的較爲簡單，較比容易掌握，可是因爲它由具體中來的，在某種意義上看，它是具體的一部份，包含於具體之中。從另一方面去看，因爲抽象是經過洗鍊的具體，比具體更爲具體。但是有一點應當特別提起，如果抽象脫離了具體，很容易發生錯誤的。一個初學代數的中學生很容易把 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 誤寫爲 $(a+b)^2=a^2+b^2$。這個錯誤的發生的主要原因，就是因爲抽象的東西脫離了具體，而使這個抽象的東西，內容比較貧乏，因之很容易被人忘掉；同時也不容易使人們具體地感到它的錯誤。一個數學教員，即使他停止了教書已經很多年，但是他仍然很容易判斷 $(a+b)^2$