经济

JINGJI SHUXUE

数学

主编 张保法

郑州大学出版社

经济数学

主编　张保法

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/张保法主编.—郑州:郑州大学出版社,
2003.2
ISBN 7-81048-707-8

Ⅰ.经… Ⅱ.张… Ⅲ.经济数学-电视大学-
教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第009822号

郑州大学出版社发行
郑州市大学路40号　　邮政编码:450052
出版人:谷振清　　发行部电话:0371-6966070
全国新华书店经销
郑州文华印刷厂印制
开本:787 mm×1 092 mm　　1/18
印张:17.875
字数:345千字
版次:2003年2月第1版　　印次:2003年7月第2次印刷

书号:ISBN 7-81048-707-8/O·17　定价:25.00元

前　　言

本书是受河南广播电视大学教材建设委员会的委托，为本系统高等专科学历教育经济类各专业的经济数学课程而编写的，同时也可作为其他成人高校经济类各专业的教学用书，以及广大经济工作者的自学用书。

该书共由三部分组成：第一篇，微积分及其应用；第二篇，线性代数；第三篇，概率论简介。

在内容的选择上，本书充分体现了经济类各专业对数学知识的需求及成人在职业余学习的特点，在保持数学自身体系基本完整的前提下，着重介绍了与经济工作及后续课程密切相关的数学概念、基本计算和简单应用问题，试图达到在有限的时间内，让学生能够切实掌握必备的数学基础知识之目的。本书在编写过程中，着重于用启发式与几何直观引出基本概念，不过分追求理论上的严密性；着重于加强学生基本运算的训练，不过分强调繁杂的计算和变换技巧。在文字叙述上，尽量采用讲课的形式来编写，重点、难点内容一般都写得较详细，力求做到深入浅出，通俗易懂。为便于自学，在每章的开始，均根据教学大纲要求，介绍了该章的学习目标，使读者做到心中有数。为方便初等数学知识欠缺的读者，还在最后的附录中，对学习本书所必备的一些初等数学知识作了简要介绍，供大家在学习中参考。

参加本书编写的有：符秀华副教授（第一篇第四章，第三篇），张静茹副教授（第一篇第一、二、三章，附录），杜金亮副教授（第一篇第五章，第二篇）。全书由张保法教授统稿、定稿。

本书的编写得到郑州大学出版社、河南广播电视大学教材部和理工教学部的大力支持，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，书中如有不妥和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编者

2002 年 12 月

目　　录

第一篇　微积分及其应用

第二篇 线性代数

第三篇 概率论简介

注:“*”为选学内容.

第一篇　微积分及其应用

第一章　函　数

【学习目标】

1. 正确理解函数的概念，熟练掌握函数定义域与函数值的求法.

2. 了解几种特殊类型的函数，掌握奇函数与偶函数的判定.

3. 掌握基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质及其图形.

4. 了解复合函数、初等函数的概念，掌握复合函数的分解.

5. 了解经济分析中常见的几类经济函数，对简单的经济应用问题，能熟练建立其函数关系式.

函数是微积分中最基本的研究对象. 作为学习微积分的基础，本章主要介绍函数的有关概念、运算以及经济问题中常见的几类经济函数.

第一节　函数的概念

一、函数的定义

先考察几个例子.

例 1　圆的面积 S 与半径 r 之间有关系式

$$S=\pi r^2$$

当半径 r 在 $(0,+\infty)$ 内任取一个数值时，由上式面积 S 就有一个确定的值与之对应.

例 2　某城市出租车的收费标准为:5 千米以内收费 10 元,此后每千米加收 1.2 元,15 千米以后每千米加收 1.8 元. 于是,出租车载客时的收费数额 y(单位:元)与行驶路程数 s(单位:千米)之间的关系可表示为

$$y=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 5\\ 10+1.2(s-5), & 5<s\leqslant 15\\ 22+1.8(s-15), & s>15\end{cases}$$

当行驶路程 s 为 $(0,+\infty)$ 内任一个数值时,由上式收费数额 y 就有一个确定的值与之对应.

以上两个例子都反映了在研究某问题的同一过程中,有两个相互联系、不断变化的量(在过程中不断变化的量,叫做变量;保持不变的量,叫做常量). 当一个变量在某一范围内取值时,按照一定法则,另一个变量有惟一确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系,就是函数关系.

定义 1.1　在某一变化过程中有两个互相联系着的变量 x 和 y. 如果对于 x 在其变化范围内取得的每一个值,y 按照一定的对应法则 f 有惟一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为

$$y=f(x)$$

其中,x 叫做自变量;y 叫做因变量;x 的变化范围叫做函数的定义域.

由定义 1.1,例 1、例 2 中变量间的对应关系式分别表示了两个函数. 如例 1 中,圆的面积公式 $S=\pi r^2$,r 是自变量,S 是因变量,S 是 r 的函数,$(0,+\infty)$ 为函数的定义域.

对于函数 $y=f(x)$,当自变量 x 在其定义域内取定某一数值 x_0 时,因变量按照其对应法则所得到的相应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值,记为

$$f(x_0),\ f(x)\Big|_{x=x_0},\ y(x_0)\ 或\ y\Big|_{x=x_0}$$

当 x 取遍定义域中每个值时,所有函数值的全体,叫做函数的值域.

二、关于函数的几点说明

(一)对应法则

在函数 $y=f(x)$ 中,对应法则“f”是自变量 x 与因变量 y 之间依赖关系即函数关系的具体体现. 函数关系的表达形式是多种多样的. 如在例 1 和例 2 中,函

数关系是由不同的具体解析式来表示的. 另外,函数关系还可由表格或图像来表示. 在微积分学中,我们主要研究以解析式子表示的函数. 再者,对应法则"f"也可以改用其他字母,如"φ"、"g"、"h"等,这时函数就记作 $y=\varphi(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$等等. 在同一个问题中,如果要同时讨论几个不同的函数,为了避免混淆起见,就需用不同的字母来表示它们.

需要指出的是,一个函数并非只能用一个解析式子表示,如例 2 中的函数式,就是由三个不同的解析式表示的. 这种在自变量变化的不同范围内用不同解析式表达的函数,叫做分段函数.

(二)单值函数与多值函数

在我们的函数定义中,对于每一个 x,按其对应法则,只能有惟一的一个 y 与之对应,这种函数叫做单值函数. 如果允许一个 x 有多个 y 值与之对应,则称为多值函数. 在本书范围内,我们主要讨论单值函数.

(三)函数值的求法

对于函数 $y=f(x)$,求其在某处的函数值时,首先要明确函数的对应法则是什么,然后将变量 x 所代表的数值、字母或表达式代入计算即可.

例 3　设 $f(x)=3x^2-x+4$,求 $f(2)$, $f(-x)$, $f(x-1)$.

解　对应法则 f 表示运算:$3(\quad)^2-(\quad)+4$. 于是有

$$f(2)=3(2)^2-(2)+4=12-2+4=14$$

$$f(-x)=3(-x)^2-(-x)+4=3x^2+x+4$$

$$f(x-1)=3(x-1)^2-(x-1)+4=3x^2-7x+8$$

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0;\\ 3x^2, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$.

解　这是一个分段函数,求其函数值时,不同点处的函数值要由相应区间所对应的式子确定. 于是

$$f(0)=(x+2)\Big|_{x=0}=0+2=2$$

$$f(2)=3x^2\Big|_{x=2}=3\cdot 2^2=12$$

$$f(-3)=(x+2)\Big|_{x=-3}=-3+2=-1$$

三、函数定义域的确定

在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定. 例如圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 中，半径 r 的取值应大于零. 由纯解析式表示的函数，其定义域是使该解析式有意义的自变量的全体，它的确定有以下常用原则：

1. 分式的分母不能为零.

2. 偶次根式下被开方因式非负.

3. 对数的真数部分大于零.

4. 分段函数的定义域是各段定义域的和(并集).

5. 若函数的表达式是由若干项经过加、减、乘、除运算组成的，则该函数的定义域是各项定义域的公共部分(交集).

例5 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln(2-x)$；

(3) $y=\begin{cases}x^2-3, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

解 (1)这是一偶次根式，要使函数有意义，须 $4-x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant 4$，亦即 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 即得函数的定义域为：$[-2,2]$.

(2)对于 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，须有 $x-1>0$，即 $x>1$；对于 $\ln(2-x)$，须有 $2-x>0$，即 $x<2$. 取它们的公共部分，得所求函数的定义域为：$(1,2)$.

(3)这是一分段函数，把两部分的定义区间并在一起，即为该函数的定义域：$[-1,+\infty)$.

练习题 1－1

1. 已知函数 $f(x)=x^2+3$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-4)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^2+3x-5$;

(2) $y=\frac{1}{x+1}$;

(3) $y=\ln(2-x)$;

(4) $y=\frac{1}{\ln(x+1)}$;

(5) $y=\sqrt{x^2-9}$;

(6) $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(2x-1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -3\leqslant x\leqslant 1;\\ x^2, & 1<x<8.\end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ 及 $f(x)$ 的定义域.

第二节 几种特殊类型的函数

一、奇函数与偶函数

(一)奇函数与偶函数的定义

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 在某个关于原点对称的区间上有定义. 如果对于该区间内任一 x,恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于该区间内任一 x,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

例 1 判定下列函数是奇函数还是偶函数:

(1) $f(x)=x^2|x|$;

(2) $f(x)=x^3-x$;

(3) $f(x)=e^x+1$.

解 (1)因为

$$f(-x)=(-x)^2|-x|=x^2|x|=f(x)$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2)因为

$$f(-x)=(-x)^3-(-x)=-(x^3-x)=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3)因 $f(-x)=e^{-x}+1$,它既不等于 $f(x)$,也不等于 $-f(x)$,故 $f(x)$ 既非奇函数,也非偶函数.

(二)奇函数与偶函数图形的特点

偶函数的图形是关于 y 轴对称的,这是因为 $f(-x)=f(x)$. 如果点 $P\left(x,f(x)\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个点,则与它对称于 y 轴的点 $M\left(-x,f(x)\right)$ 也在曲线上(图 1-1).

奇函数的图形是关于原点对称的,这是因为 $f(-x)=-f(x)$. 如果点 $P\left(x,f(x)\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个点,则与它对称于原点的点 $N\left(-x,-f(x)\right)$ 也在曲线上(图 1-2).

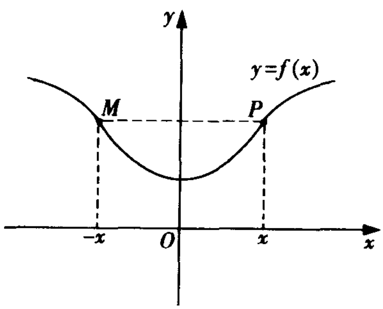

图 1-1

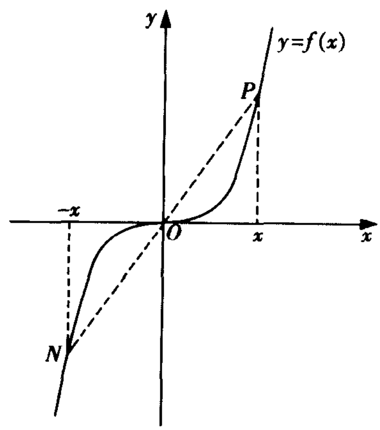

图 1-2

二、单调函数

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加(图 1-3);如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间(a,b)内单调减少(图 1-4).

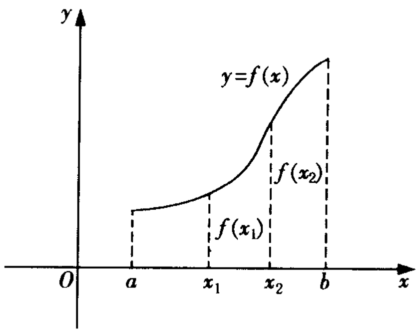

图 1-3

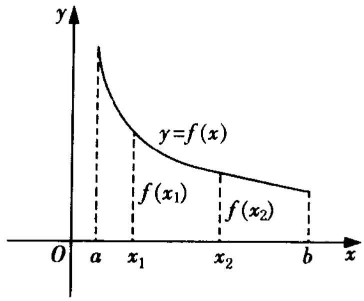

图 1-4

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

练习题 1-2

1. 判定下列函数中,哪些是奇函数?哪些是偶函数?

(1)$y=x^4+x^2-1$;　　(2)$y=2x^3+xe^{x^2}$;

(3)$y=|x|+2$;　　(4)$y=x^3+x-1$;

(5)$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x},x\in(-1,1)$.

2. 证明:两个偶函数之积及两个偶函数之和仍为偶函数. 两个奇函数之积为偶函数;两个奇函数之和仍为奇函数.

第三节　基本初等函数

基本初等函数是指常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数等六类函数.

一、常量函数

函数

$$y=C \quad (C\text{为常数})$$

叫做常量函数. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形是过点$(0,C)$且平行于x轴的一条直线(图1-5). 它是偶函数.

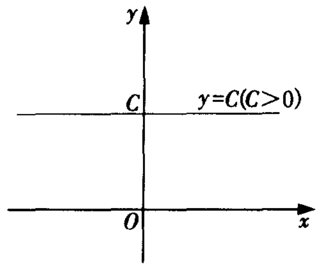

图1-5

二、幂函数

函数

$$y=x^{\alpha} \quad (\alpha\text{为实数})$$

叫做幂函数. 幂函数的定义域随α的取值而定,但无论α取何值,幂函数在$(0,+\infty)$内总有意义,且图形均过$(1,1)$点.

例如,当$\alpha=1$、$\alpha=3$时,$y=x$、$y=x^3$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$. 它们均为奇函数,图形关于原点对称,并且在$(-\infty,+\infty)$内单调增加(图1-6).

当$\alpha=2$时,$y=x^2$的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 它是偶函数,图形关于y轴对称,是顶点在原点、开口向上的抛物线;并且在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加(图1-6).

当$\alpha=-1$时,$y=\frac{1}{x}$的定义域是$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$. 它是奇函数,图形关于原点对称,且在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内分别单调减少(图1-7).

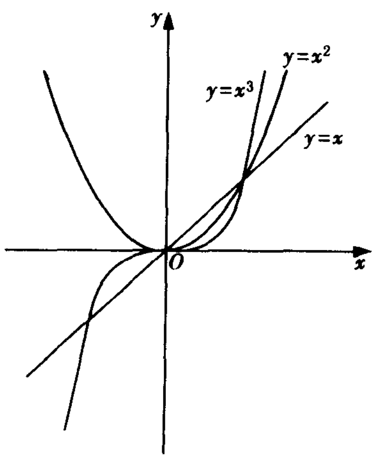

图1-6

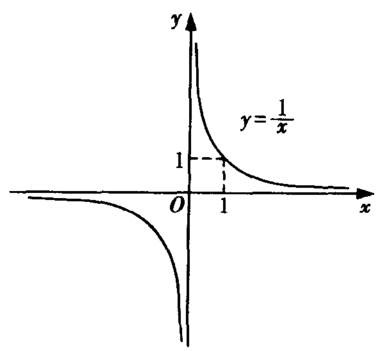

图1-7